

H PRÉPA

EXERCICES ET PROBLÈMES

1^{RE}
ANNÉE

PHYSIQUE

MPSI/PCSI/PTSI

POUR S'ENTRAÎNER ET RÉUSSIR SA PRÉPA

- Plus de 300 exercices et extraits de concours corrigés
- Un rappel des connaissances essentielles
- Conseils, astuces et méthodes

hachette
SUPÉRIEUR

EXERCICES ET
PROBLÈMES



PHYSIQUE

MPSI/PCSI/PTSI

Jean-Marie BRÉBEC
Tania CHABOUD
Thierry DESMARAIS
Alain FAVIER
Marc MÉNÉTRIER
Régine NOËL

Composition et mise en page : *Laser Graphie*

Maquette intérieure : *Véronique Lefebvre*

Maquette de couverture : *Guylaine Moi*

Relecture : *Anne Panaget*

© Hachette Livre 2010, 43 quai de Grenelle, 75905 Paris Cedex 15

www.hachette-education.com

I. S. B. N. 978-2-0118-1306-0

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes des articles L. 122-4 et L. 122-5 d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et, d'autre part, que « les analyses et les courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

A vant-propos

Quel est l'objet de cet ouvrage ?

Nous avons élaboré cet ouvrage d'exercices de première année de classes préparatoires aux grandes écoles avec deux objectifs principaux, **l'assimilation du cours** par la mise en pratique, et la préparation aux **interrogations écrites et orales, pendant l'année et aux concours** :

– *Les rappels de cours complets* permettent de voir rapidement les résultats importants à connaître pour toute préparation d'épreuves orales ou écrites, que ce soit une colle, ou un concours de première ou deuxième Année.

– *Les exercices, choisis pour leur contenu*, préparent à toutes ces épreuves.

Comment travailler de manière optimale avec cet ouvrage ?

À la suite de l'énoncé, il existe une partie « conseils » ; les solutions sont présentées après l'ensemble des énoncés. Comment utiliser de manière optimale cette disposition ?

– Comme pour une épreuve d'écrit, il faut commencer par lire entièrement un énoncé : pour résoudre une question donnée certaines informations peuvent être présentes dans les questions suivantes.

– Après une période de réflexion « correcte », fructueuse ou non, il est possible de lire la partie « conseils » : cette partie peut se présenter ainsi :

- soit une idée de résolution est proposée ;
- soit une question est posée pour la mise en évidence d'un phénomène ;
- soit un théorème est énoncé,....

– Si l'aide ne permet pas de résoudre l'exercice, il faut alors s'aider de la solution, qu'il ne suffit pas de lire : après lecture il faut essayer de refaire l'ensemble de l'exercice seul.

Dans un souci d'aide maximale à ces préparations, et à cette méthode de travail :

– Les exercices choisis sont *conformes aux nouveaux programmes*.

– Nous avons choisi des exercices « réalistes » :

- ayant une application en physique, soit fondamentale, soit industrielle,
- ou étant en relation avec l'explication d'un phénomène observable.

– Lors de la résolution d'un exercice, nous avons privilégié les arguments physiques, les schémas et simulations (en faisant appel à la mémoire visuelle), aux arguments mathématiques ; mais lorsque les calculs sont nécessaires, l'ensemble des étapes intermédiaires est présenté.

– Lorsqu'un exercice peut être résolu par plusieurs méthodes intéressantes, ces méthodes sont présentées et développées.

– Pour certains exercices nous mettons le lecteur en garde contre certaines erreurs que nous voyons trop souvent lors d'épreuves écrites ou orales de concours.

Nous souhaitons que cet ouvrage puisse aider de manière efficace une majorité d'étudiants

SOMMAIRE

PARTIE 1 MÉCANIQUE

Chapitre 1 – Cinématique du point – Changement de référentiel	9
Chapitre 2 – Dynamique du point matériel	18
Chapitre 3 – Puissance et énergie en référentiel galiléen	28
Chapitre 4 – Oscillateurs	40
Chapitre 5 – Théorème du moment cinétique	59
Chapitre 6 – Forces centrales conservatives – Interaction newtonienne	69
Chapitre 7 – Mécanique en référentiel non galiléen	83
Chapitre 8 – Référentiels non galiléens usuels	95
Chapitre 9 – Système de deux points matériels	111

PARTIE 2 OPTIQUE

Chapitre 1 – Les bases de l’optique géométrique – Réflexion et réfraction	125
Chapitre 2 – Formation d’images	134
Chapitre 3 – Miroirs et lentilles	142
Chapitre 4 – Instruments d’observation	164
Chapitre 5 – Focométrie	181
Chapitre 6 – Le prisme, utilisation en spectroscopie	190

PARTIE 3 THERMODYNAMIQUE

Chapitre 1 – Équation d’état d’un fluide	201
Chapitre 2 – Statique des fluides	215
Chapitre 3 – Premier principe de la thermodynamique. Bilans d’énergie	227
Chapitre 4 – Second principe. Bilans d’entropie	250
Chapitre 5 – Corps pur diphasé	266
Chapitre 6 – Machines thermiques	279

PARTIE 4 ÉLECTRICITÉ

Chapitre 1 – Réseaux linéaires en régime continu	301
Chapitre 2 – Réseaux linéaires en régime variable	320
Chapitre 3 – Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé.....	346
Chapitre 4 – Amplificateur opérationnel.....	363
Chapitre 5 – Fonctions de transfert.....	383

PARTIE 5 ÉLECTROMAGNÉTISME

Chapitre 1 – Distributions, champ et potentiel électrostatiques	413
Chapitre 2 – Le champ magnétique permanent	438
Chapitre 3 – Dipôles électrique et magnétique	462
Chapitre 4 – Force de Lorentz	485
Annexes	510

Mécanique

1 ■ Cinématique du point – Changement de référentiel	9
2 ■ Dynamique du point matériel	18
3 ■ Puissance et énergie en référentiel galiléen	28
4 ■ Oscillateurs	40
5 ■ Théorème du moment cinétique	59
6 ■ Forces centrales conservatives – Interaction newtonienne	69
7 ■ Mécanique en référentiel non galiléen	83
8 ■ Référentiels non galiléens usuels	95
9 ■ Système de deux points matériels	111

1

Cinématique du point

Changement de référentiel

LES OBJECTIFS

- Préciser les caractéristiques d'un mouvement : vitesse, accélération, trajectoire dans un référentiel donné.
- Apprendre à choisir le bon système de coordonnées en fonction du problème étudié.

LES PRÉREQUIS

- Notions sur l'intégration des vecteurs vitesse et accélération en tenant compte de conditions initiales.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

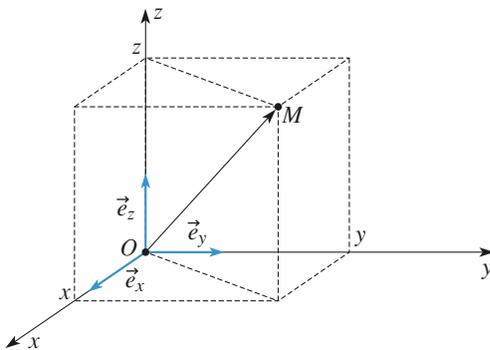
- Notions sur l'intégration vues en mathématiques.

ESSENTIEL

• Systèmes usuels de coordonnées

• Coordonnées cartésiennes

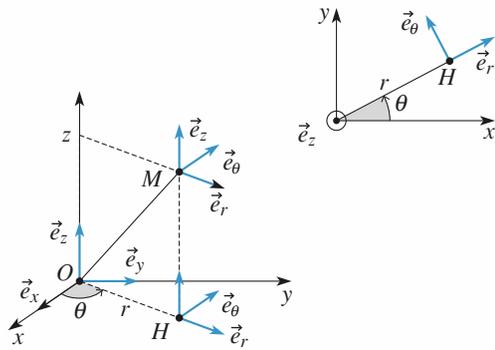
$\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$; base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ (doc. 1).



Doc. 1. Coordonnées cartésiennes (x, y, z) :
 $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$.

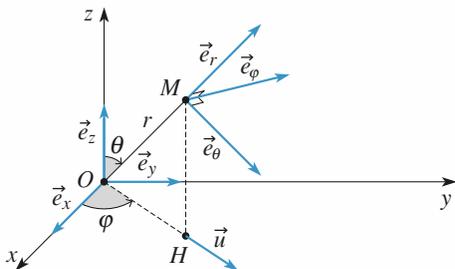
• Coordonnées cylindriques

$\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$; base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ (doc. 2).

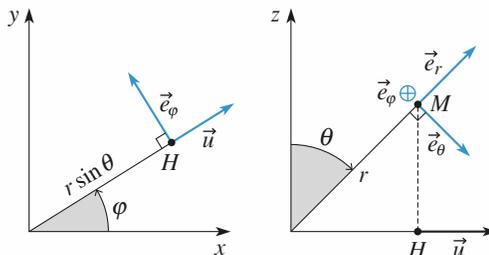


Doc. 2. Coordonnées cylindriques (r, θ, z) :
 $\vec{OH} = r\vec{e}_r$; $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

- **Coordonnées sphériques:** $\overline{OM} = r\vec{e}_r$; base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ (doc. 3).



Doc. 3.a.



Doc. 3.b. Plans : $z = 0$ et $\varphi = cte$.

Représentations du mouvement

- La trajectoire est constituée de l'ensemble des positions successives $\overline{OM}(t) = \vec{r}(t)$ du point mobile M étudié.
- Dans l'espace des vitesses, l'ensemble des positions successives $\overline{ON}(t) = \vec{v}(t)$ constitue l'hodographe du mouvement.
- Dans l'espace des phases, le point P repéré par $\overline{OP} = (\overline{OM}, \overline{ON})$ décrit la trajectoire de phase du mobile. Pour un mouvement à un degré de liberté, le point de phase P se déplace dans le plan de phase : $\overline{OP} = (x(t), v(t))$.

Vitesse d'un point

Soit O un point fixe du référentiel \mathcal{R} . Le vecteur vitesse de M par rapport à ce référentiel est :

$$\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\overline{OM}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

- Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.
- Expression en coordonnées cylindriques : $\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

Accélération d'un point

Le vecteur accélération de M par rapport à ce référentiel est :

$$\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} \right)_{/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{/\mathcal{R}}$$

- Expression en coordonnées cartésiennes : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.
- Expression en coordonnées cylindriques : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$;
ou encore : $\vec{a}(M)_{/\mathcal{R}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Mouvement circulaire

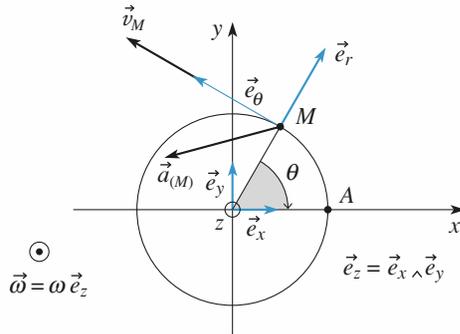
Le point M se déplace sur un cercle de centre O , de rayon R , d'axe (Oz) . Il est repéré par ses coordonnées polaires sur le cercle ($r = R, \theta$).

$$\overline{OM} = R\vec{e}_r;$$

$$\vec{v}(M)_{J\mathcal{R}} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{\omega} \wedge \overline{OM}, \text{ où } \vec{\omega} = \omega\vec{e}_z;$$

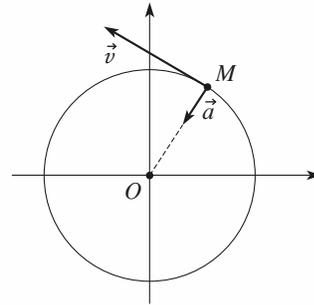
$$\vec{a}(M)_{J\mathcal{R}} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ (doc. 4).}$$

Si le mouvement est circulaire uniforme, $v = R\dot{\theta}$ est constante, donc $\vec{a}(M)_{J\mathcal{R}}$ est dirigée suivant $-\vec{e}_r$; elle est centripète (doc. 5).



Doc. 4. Mouvement circulaire d'un point M dans un cercle de rayon a :

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

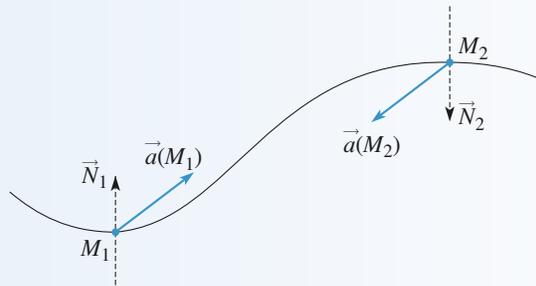


Doc. 5. Si $|\vec{v}| = \text{cte}$, l'accélération du point M est

$$\text{dirigée suivant } -\overline{OM} : \vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r.$$

Conseils et pièges à éviter

- La vitesse (ou l'accélération) d'un point M dans un référentiel R donné peut s'exprimer sur différents vecteurs de projections, mais c'est toujours la même vitesse (ou la même accélération) !
- Lors d'une trajectoire courbe, il existe toujours une composante de l'accélération dirigée vers l'intérieur de la concavité de la trajectoire.



1 Une course automobile

Deux pilotes amateurs prennent le départ d'une course automobile sur un circuit présentant une longue ligne droite au départ. Ils s'élancent de la même ligne. Le premier, A , démarre avec une accélération constante de $4 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, le deuxième, B , a une voiture légèrement plus puissante et démarre avec une accélération constante de $5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$. A a cependant plus de réflexes que B et démarre une seconde avant.

- 1 • Quelle durée faudra-t-il à B pour rattraper A ?
- 2 • Quelle distance auront-ils parcourue quand B doublera A ?
- 3 • Quelles seront les vitesses à cet instant-là ?
- 4 • Représenter $x(t)$ et $v(t)$ et la trajectoire de phase de A et B , en précisant la position de l'événement « B dépasse A » sur ces représentations des mouvements.

Conseils

Déterminer l'équation horaire du mouvement de chaque voiture.

2 Mouvement d'un point matériel sur une parabole

Un point matériel M décrit la courbe d'équation polaire

$$r \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = a \text{ où } a \text{ est une constante positive, } \theta \text{ de } -\pi \text{ à } +\pi.$$

- 1 • Montrer que la trajectoire de M est une parabole. La construire.
- 2 • On suppose de plus que le module du vecteur vitesse est toujours proportionnel à r : $v = kr$, où k est une constante positive.
 - a. Calculer, en fonction de θ , les composantes radiale et orthoradiale du vecteur vitesse de M .
 - b. Déterminer la loi du mouvement $\theta(t)$ en supposant que θ est nul à l'instant $t = 0$ et que θ croît.

On donne $\int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln \left| \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right|$.

Conseils

- 1) Penser à remplacer $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ par $\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ et à utiliser les relations entre (x, y) et (r, θ) pour donner l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- 2) La condition $v = kr$ permet d'exprimer $\dot{\theta}$ en fonction de θ , donc de ne plus faire apparaître explicitement le temps dans les équations, mais seulement θ .

3 Ascension d'un ballon sonde

Un ballon sonde a une vitesse d'ascension verticale v_0 indépendante de son altitude. Le vent lui communique une vitesse

horizontale $v_x = \frac{z}{t_c}$ proportionnelle à l'altitude z atteinte.

- 1 • Déterminer les lois du mouvement $x(t)$ et $z(t)$ ainsi que l'équation de la trajectoire $x(z)$.
- 2 • Calculer le vecteur accélération du ballon.

4 Trajectoire et hodographe d'un mouvement plan

Un point M se déplace dans le plan (xOy) à la vitesse : $\vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_\theta)$, où \vec{e}_θ est le vecteur orthoradial de la base locale des coordonnées polaires (r, θ) .

- 1 • Établir les équations polaire et cartésienne de la trajectoire à caractériser.
- 2 • Faire de même pour l'hodographe.
- 3 • Faire le lien entre l'angle $\theta = (\vec{e}_x, \vec{r})$ et l'angle $\varphi = (\vec{e}_x, \vec{v})$.

Conseils

Il suffit de passer du système de coordonnées cartésiennes (x, y) au système de coordonnées polaires (r, θ) , et inversement, pour obtenir l'une ou l'autre des équations recherchées.

5 Aller et retour sur un fleuve

Un rameur s'entraîne sur un fleuve en effectuant le parcours aller et retour entre deux points A et B , distants de ℓ . Il rame à vitesse constante v par rapport au courant. Le fleuve coule de A vers B à la vitesse u . Son entraîneur l'accompagne à pied le long de la rive en marchant à la vitesse v sur le sol, il fait lui aussi l'aller et retour entre A et B .

Seront-ils de retour en même temps au point de départ ? Si non, lequel des deux (rameur ou entraîneur) arrivera le premier en A ? Commenter.

Conseils

Utiliser la composition des vitesses en faisant attention au sens des vecteurs vitesse.

6 Chasseur et oiseau

Un oiseau se trouve sur une branche d'arbre, à une hauteur H au dessus du niveau du sol. Un chasseur se trouve sur le sol à la distance D du pied de l'arbre. Il vise l'oiseau et tire. Au moment du coup de feu, l'oiseau, voyant la balle sortir du canon, prend peur et se laisse tomber instantanément en chute libre. À chaque instant, l'accélération de la balle et de l'oiseau dans un référentiel fixe est $-g \vec{e}_z$ (l'axe (Oz) est la verticale ascendante). L'oiseau est-il touché ? L'étude sera faite :

- dans le référentiel fixe ;
- dans le référentiel lié à l'oiseau.

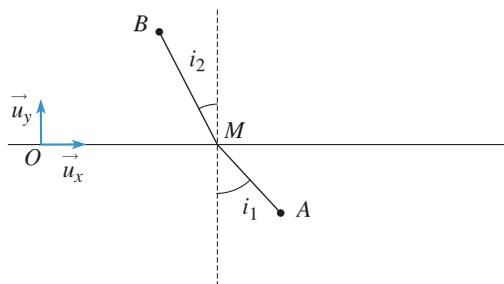
Conseils

Déterminer les trajectoires de l'oiseau et de la balle dans le référentiel choisi et déterminer leur intersection.

7 Quand il faut aller vite

Pour aller au secours d'un nageur en détresse, un maître-nageur part du poste de secours situé au point A pour aller jusqu'au nageur situé en B . Sachant que le sauveteur court à $v_1 = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ sur la plage et nage à $v_2 = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ dans

l'eau, en quel point M doit-il entrer dans l'eau pour atteindre au plus vite le nageur ? On situera ce point à l'aide d'une relation entre v_1 , v_2 , i_1 et i_2 indiqués sur le schéma.



8 Mouvement calculé à partir de la trajectoire et de l'hodographe

(D'après ENAC 02)

Dans le plan (xOy) du référentiel $\mathcal{R}(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ un mobile ponctuel P décrit la parabole d'équation cartésienne : $y^2 = 2px$ avec p constante positive.

Sa vitesse $\vec{v}(P/R)$, de composantes X, Y est telle que l'ensemble des points $N(X, Y)$, hodographe du mouvement de pôle O , a pour équation cartésienne : $X^2 = 2qY$ avec q constante positive.

- Exprimer X et Y en fonction de y .
- Exprimer l'accélération $\vec{a}(P/R)$ du point P en fonction du vecteur position \vec{OP} . Préciser la nature du mouvement de P .
- Établir les expressions de x et y en fonction du temps t , sachant que le mobile passe en O à l'instant initial $t = 0$.

1 Une course automobile

1 • Nous avons :

$$x_A(t) = \frac{1}{2} a_A t^2 \text{ et } x_B(t) = \frac{1}{2} a_B (t - t_0)^2,$$

cette deuxième expression étant applicable à $t \geq t_0 = 1$ s.
Les deux voitures sont au même niveau à l'instant t_1 , soit :

$$a_A t_1^2 = a_B (t_1 - t_0)^2$$

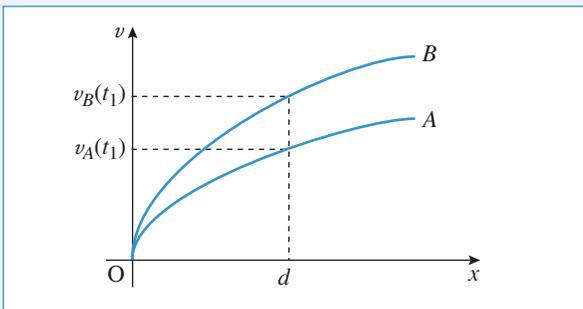
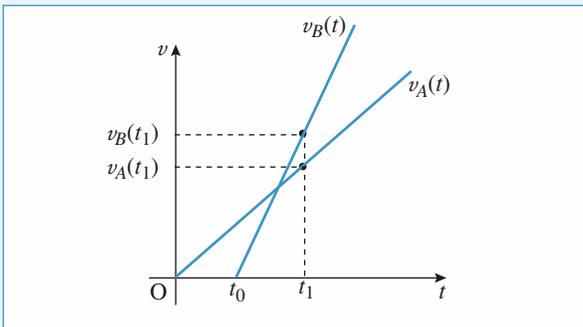
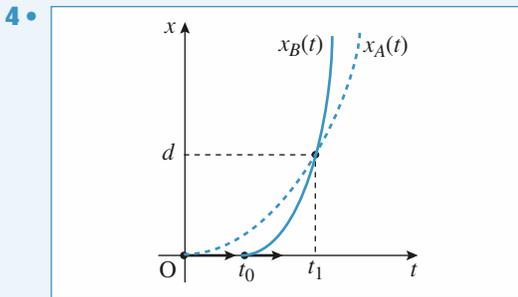
ce qui donne :

$$t_1 = t_0 \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{a_A}{a_B}}} \approx 9,5 \text{ s.}$$

2 • À l'instant t_1 :

$$d = x_A(t_1) = x_B(t_1) = \frac{1}{2} a_A t_1^2 \approx 1,8 \cdot 10^2 \text{ m.}$$

3 • $v_A(t_1) = a_A t_1 \approx 38 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $v_B(t_1) = a_B (t_1 - t_0) \approx 42 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.



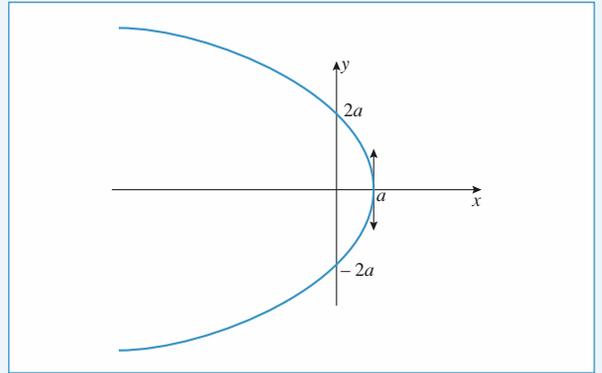
2 Mouvement d'un point matériel sur une parabole

1 • Sachant que $\cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta)$, l'équation polaire

s'écrit : $r = 2a - r \cos \theta$; avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, et en élevant au carré : $r^2 = x^2 + y^2 = (2a - x)^2$, ce qui donne :

$$x = \frac{-y^2 + 4a^2}{4a},$$

parabole représentée ci-dessous.



2 • a. $v_r = \dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = a \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)} \dot{\theta}$

$$\text{et } v_\theta = r \dot{\theta} = \frac{a}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \dot{\theta}.$$

Il reste à éliminer $\dot{\theta}$ en utilisant :

$$v = kr = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} = \frac{a \dot{\theta}}{\cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

$\theta \in]-\pi ; +\pi[$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est positif et $\dot{\theta}$ est positif par hypothèse, donc :

$$\dot{\theta} = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et } v_r = ka \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} ; v_\theta = \frac{ka}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

a. $\dot{\theta} = k \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow \frac{d\theta}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = k dt$

$$\Leftrightarrow 2 \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right| = kt + \text{cte.}$$

$$\theta \in]-\pi; +\pi[\text{ donc } \frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \in]0; \frac{\pi}{2}[$$

d'où sa tangente est positive.

Si $\theta = 0$ à $t = 0$, la constante est nulle.

$$\text{Donc } \ln \left(\tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{kt}{2}.$$

3 Ascension d'un ballon sonde

1 • En coordonnées cartésiennes, $\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{u}_x + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$ avec

$$\frac{dx}{dt} = \frac{z}{t_c} \text{ et } \frac{dz}{dt} = v_0.$$

Soit $z = v_0 t$ car à $t = 0$, $z = 0$ (le ballon décolle).

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \frac{t}{t_c} \text{ donne } x = \frac{1}{2} v_0 \frac{t^2}{t_c} \text{ en supposant qu'à } t = 0, x = 0.$$

En éliminant le temps t , on obtient :

$$x = \frac{1}{2} \frac{z^2}{v_0 t_c}.$$

La trajectoire est une parabole.

$$2 \bullet \vec{a} = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{u}_x + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{u}_z.$$

$$\text{D'où } \vec{a} = \frac{v_0}{t_c} \vec{u}_x.$$

4 Trajectoire et hodographe d'un mouvement plan

1 • $\vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_\theta) = v_0(\cos \theta \vec{e}_r + (1 - \sin \theta) \vec{e}_\theta)$.

Le déplacement élémentaire $d\vec{OM} = d(r\vec{e}_r) = dr\vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$ du point M est colinéaire au vecteur vitesse, donc :

$$\frac{dr}{rd\theta} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta}, \text{ soit : } \frac{dr}{r} = \frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} d\theta = d \ln \left(\frac{1 - \sin \theta_0}{1 - \sin \theta} \right).$$

ce qui donne l'équation en coordonnées polaires :

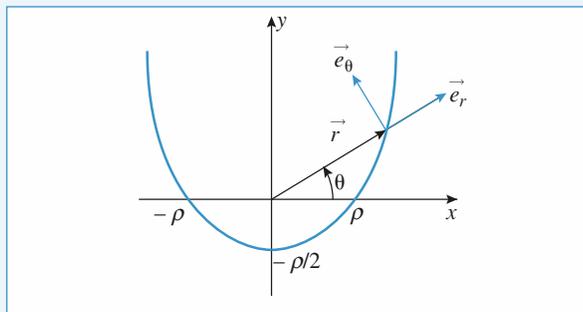
$$r = r_0 \frac{1 - \sin \theta_0}{1 - \sin \theta} = \frac{\rho}{1 - \sin \theta}$$

où ρ est un paramètre (longueur) caractéristique de la trajectoire.

On en déduit : $r = \rho + r \sin \theta$, soit, avec $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, en élevant au carré : $r^2 = x^2 + y^2 = (\rho + y)^2$, ce qui donne finalement :

$$y = \frac{x^2 - \rho^2}{2\rho}$$

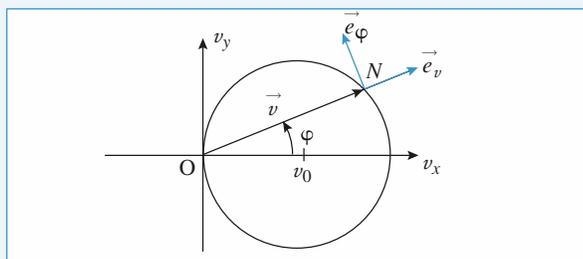
qui est l'équation d'une parabole d'axe (Oy) .



2 • $\vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_\theta) = v_0((1 - \sin \theta) \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$, ce qui donne l'équation cartésienne de l'hodographe :

$$(v_x - v_0)^2 + v_y^2 = v_0^2$$

qui permet d'identifier le cercle de rayon v_0 et de centre de coordonnées $(v_0, 0)$.

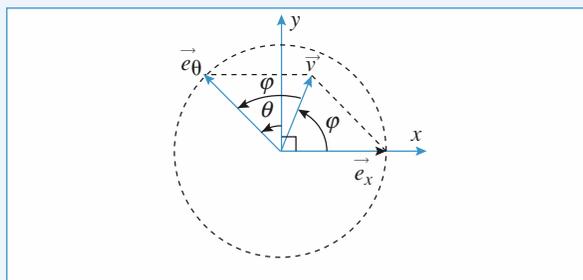


On remplace $v_x = v \cos \varphi$ et $v_y = v \sin \varphi$ dans l'équation cartésienne de l'hodographe, il vient :

$$v = 2 v_0 \cos \varphi$$

qui est l'équation polaire de l'hodographe.

3 • On évite des calculs trigonométriques en faisant un schéma :



Le vecteur $\frac{\vec{v}}{v_0} = \vec{e}_x + \vec{e}_\theta$ est dirigé selon la bissectrice des

axes (O, \vec{e}_x) et (O, \vec{e}_θ) , donc : $2\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$, soit : $\varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$.

5 Aller et retour sur un fleuve

Le rameur effectue l'aller à la vitesse $v + u$ et le retour à la vitesse $v - u$ par rapport au sol.

v doit donc être évidemment supérieur à u pour que le rameur puisse remonter le courant et ainsi revenir à son point de départ.

La durée de son trajet aller et retour est :

$$\tau_r = \frac{\ell}{v + u} + \frac{\ell}{v - u} = \frac{2\ell v}{v^2 - u^2}.$$

Son entraîneur effectue l'aller et retour à la vitesse v par rapport au sol donc la durée de son trajet est $\tau_e = \frac{2\ell}{v}$. Donc :

$$\tau_r = \tau_e \frac{1}{1 - \frac{u^2}{v^2}} > \tau_e.$$

L'entraîneur est arrivé avant le rameur.

Le rameur perd plus de temps au retour qu'il n'en gagne à l'aller. Dans le cas extrême où la vitesse v est à peine supérieure à u , le trajet du retour pour le rameur sera très long.

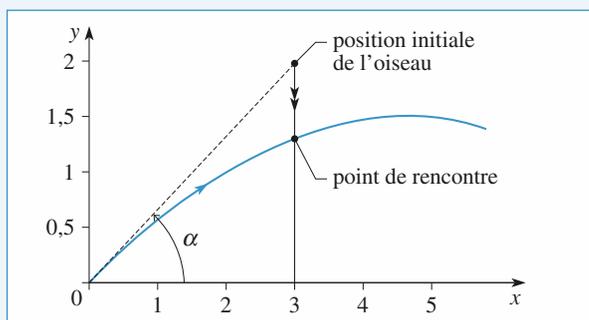
6 Chasseur et oiseau

a. On détermine les trajectoires de l'oiseau et de la balle dans le référentiel lié au sol.

• Oiseau : $\ddot{z}_o = -g$, d'où $z_o = -\frac{1}{2}gt^2 + H$

(la vitesse initiale de l'oiseau est nulle) ;

$$\ddot{x}_o = 0, \text{ d'où } x_o = D.$$



• Balle : $\ddot{z}_b = -g$, d'où $z_b = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t$;

$$\ddot{x}_b = 0, \text{ d'où } x_b = v_0 \cos \alpha t,$$

où v_0 est la vitesse initiale de la balle et α l'angle de tir : le chasseur visant l'oiseau, $\tan \alpha = \frac{H}{D}$.

Les deux trajectoires se rencontrent-elles ? Si oui, au point de rencontre $x_b = D$, donc la rencontre a lieu à l'instant :

$$t_f = \frac{D}{v_0 \cos \alpha}.$$

À cet instant, $z_b - z_o = D \tan \alpha - H = 0$: l'oiseau est touché !

Attention : pour que l'oiseau soit effectivement touché, il faut que la portée de la balle soit supérieure à D (sinon les deux trajectoires ne se coupent pas). Pour cela, il faut une vitesse v_0 suffisante.

Plus précisément, la balle touche le sol à l'instant $t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$

donc en $x_1 = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$. Il faut que $x_1 \geq D$ donc que :

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{gD}{\sin(2\alpha)}}.$$

Cette condition correspond à $z(t_f) \geq 0$.

b. Dans le référentiel lié à l'oiseau, la balle a une accélération

nulle donc une trajectoire rectiligne uniforme à la vitesse \vec{v}_0 , toujours dirigée vers l'oiseau qui est donc touché.

Conclusion : il faut dire aux oiseaux de toujours se percher sur des branches basses.

7 Quand il faut aller vite

Le maître-nageur parcourt AM en $t_1 = \frac{AM}{v_1}$ et

$$MB \text{ en } t_2 = \frac{MB}{v_2}.$$

$$AM = [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2}$$

$$BM = [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}$$

La durée totale du trajet est :

$$T = t_1 + t_2.$$

$$T = \frac{1}{v_1} [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2} + \frac{1}{v_2} [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}.$$

On cherche x tel que T soit minimale.

$$\frac{dT}{dx} \Leftrightarrow \frac{x - x_A}{v_1 [(x - x_A)^2 + y_A^2]^{1/2}} + \frac{x - x_B}{v_2 [(x - x_B)^2 + y_B^2]^{1/2}} = 0$$

$$\text{Soit } \frac{x - x_A}{v_1 AM} + \frac{x - x_B}{v_2 BM} = 0 \quad \textcircled{1}$$

Si on introduit i_1 et i_2 , il vient :

$$\sin i_1 = \frac{x_A - x}{AM} \text{ et } \sin i_2 = \frac{x - x_B}{BM}.$$

$$\textcircled{1} \text{ s'écrit alors } \frac{\sin i_1}{v_1} = \frac{\sin i_2}{v_2}.$$

Remarque : la valeur de x trouvée correspond bien à un minimum pour T . La dernière relation écrite est analogue à la loi de Descartes pour la réfraction en optique : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

8 Mouvement calculé à partir de la trajectoire et de l'hodographe

(d'après ENAC 02)

$$1 \bullet \vec{v}(P/\mathcal{R}) = X\vec{e}_x + Y\vec{e}_y, \text{ avec } X = \frac{dx}{dt} \text{ et } Y = \frac{dy}{dt}$$

$$y^2 = 2px.$$

On peut dériver par rapport au temps l'équation de la trajectoire.

$$\text{Il vient : } 2y \frac{dy}{dt} = 2p \frac{dx}{dt} \text{ soit } yY = pX \quad \textcircled{1}$$

$$\text{D'autre part : } X^2 = 2qY = \left(\frac{y}{p}Y\right)^2.$$

$$\text{Si } Y \neq 0, \text{ on obtient } 2q = \frac{y^2}{p^2}Y, \text{ soit } Y = \frac{2qp^2}{y^2} \text{ et } X = \frac{2qp}{y}$$

avec $y \neq 0$.

$$\text{Si } Y = 0, \textcircled{1} \Rightarrow X = 0.$$

$$\text{Si } y = 0, \textcircled{1} \Rightarrow X = 0 \text{ et puisque } X^2 = 2qY \text{ } Y = 0.$$

2 • $\vec{a}(P/\mathcal{R}) = \frac{dX}{dt} \vec{e}_x + \frac{dY}{dt} \vec{e}_y$. On se place en dehors du point O .

$$X = \frac{2qp}{y} \text{ et } \frac{dX}{dt} = -\frac{2qp}{y^2} \frac{dy}{dt} = -\frac{2qp}{y^2} Y = -\frac{4q^2 p^3}{y^4}$$

$$Y = \frac{2qp^2}{y^2} \text{ et } \frac{dY}{dt} = -\frac{4qp^2}{y^3} \frac{dy}{dt} = -\frac{8q^2 p^4}{y^5} = -\frac{8q^2 p^4}{y^6} Y.$$

Or $x = \frac{y^2}{2p}$ donc $\frac{dX}{dt} = -\frac{8q^2 p^4}{y^6} x$.

On peut alors écrire : $\vec{a}(P/\mathcal{R}) = -\frac{8q^2 p^4}{y^6} \vec{OP}$.

Le mouvement du point P est à accélération centrale par rapport à O .

3 • $Y = \frac{dy}{dt} = \frac{2qp^2}{y^2}$ donc $y^2 dy = 2qp^2 dt$ ②.

On intègre ② en tenant compte des conditions initiales $t = 0$
 $y = x = 0$.

Il vient $\frac{1}{3} y^3 = 2qp^2 t$ d'où $\begin{cases} y = (6qp^2 t)^{1/3} \\ x = \frac{y^2}{2p} = \frac{2}{2p} (6qp^2 t)^{2/3} \end{cases}$

LES OBJECTIFS

- Utiliser les lois de Newton pour :
 - déterminer les caractéristiques d'un mouvement ;
 - calculer certaines forces.

LES PRÉREQUIS

- Expressions des vecteurs vitesse et accélération dans divers systèmes de coordonnées.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Notions sur l'intégration vues en mathématiques.

ESSENTIEL

◀ Quantité de mouvement (ou impulsion)

La quantité de mouvement par rapport au référentiel R d'un point matériel M , de masse m , est :

$$\vec{p}(M)_{/R} = m \vec{v}(M)_{/R}.$$

◀ Lois de Newton

Les trois lois de Newton sont les lois fondamentales de la mécanique du point matériel.

• **Première loi : principe d'inertie**

Il existe une classe de référentiels, appelés référentiels galiléens par rapport auxquels un point matériel *isolé* est en mouvement rectiligne uniforme.

• **Deuxième loi : relation fondamentale de la dynamique**

Dans un référentiel galiléen, la somme vectorielle des forces appliquées à un point M de masse m et son accélération sont liées par :

$$F_{\mathcal{E} \rightarrow M} = \frac{d\vec{p}(M)}{dt} = m\vec{a}(M).$$

• **Troisième loi : principe des actions réciproques**

Les forces d'interaction exercées par deux *points matériels* M_1 et M_2 l'un sur l'autre sont opposées et colinéaires à l'axe (M_1M_2) .

Évolution d'un système mécanique

Les systèmes mécaniques ont une évolution unique pour des conditions initiales données (déterminisme mécanique).

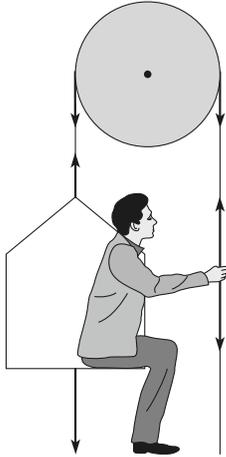
Pour un système autonome (ou libre), deux trajectoires de phase ne peuvent se couper.

Conseils et pièges à éviter

- Il faut toujours bien étudier les forces qui s'exercent sur un système, ici un point matériel.

1 Un peintre ingénieux

Un peintre en bâtiment (de masse $M = 90 \text{ kg}$) est assis sur une chaise le long du mur qu'il doit peindre. Sa chaise est suspendue à une corde reliée à une poulie parfaite. Pour grimper, le peintre tire sur l'autre extrémité de la corde avec une force de 680 N . La masse de la chaise est $m = 15 \text{ kg}$.



- Déterminer l'accélération du peintre et de la chaise. Commenter son signe.
- Quelle force le peintre exerce-t-il sur la chaise ?
- Quelle quantité de peinture peut-il hisser avec lui ?

Conseils

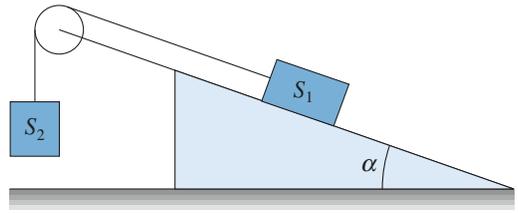
Faire un bilan des forces extérieures pour le système {peintre + chaise}, puis pour le système {chaise seule}.

2 Plan incliné et poulies

Le solide S_1 , de masse m_1 , glisse sans frottements sur le plan incliné. Le solide S_2 , de masse m_2 , se déplace verticalement. Les solides en translation sont considérés comme des points matériels. Les poulies sont idéales, les fils sont inextensibles et sans masse.

Données : $m_1 = 400 \text{ g}$, $m_2 = 200 \text{ g}$ et $\alpha = 30^\circ$.

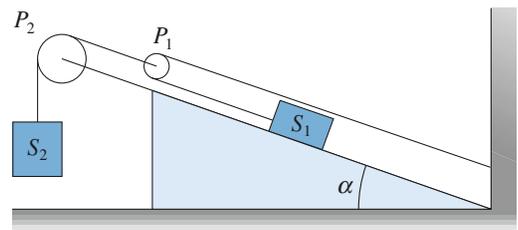
- On considère le dispositif ci-après en haut : Déterminer l'accélération du solide S_2 et la tension du fil.



- On rajoute une poulie.

La poulie P_2 est fixe, la poulie P_1 se déplace parallèlement au plan incliné. Le fil est attaché en A.

Déterminer l'accélération du solide S_2 et les tensions des fils.



Conseils

- Les deux solides ont la même accélération (en norme).
- 1) et 2) En utilisant le caractère parfait des poulies (sans masse) et l'inextensibilité des fils, chercher une relation simple entre les tensions des fils aux points d'attache sur chacun des deux solides.

3 Étude d'un pendule simple, réaction au point d'attache

Un pendule simple (masse m , longueur ℓ) est lâché sans vitesse initiale à partir de la position $\theta = \frac{\pi}{2}$: point matériel $M(m)$ et point de suspension sont alors dans le même plan horizontal. ($\vec{OM} = \ell \vec{j}$ à $t = 0$). On demande de déterminer les réactions $R_x(\theta)$ et $R_y(\theta)$ en O . Le fil est sans masse et inextensible.

4 Un jeu d'enfant

Un enfant esquimau joue sur le toit de son igloo. L'enfant se laisse glisser sans frottement depuis le sommet S de l'igloo, qui a la forme d'une demi-sphère de rayon a et de centre O . La position de l'enfant, assimilé à un point matériel M , de masse m , est repérée par l'angle $\theta = (Oz, OM)$, (Oz) étant la verticale ascendante.

- À partir de quelle position (repérée par l'angle θ_0) l'enfant perd-il le contact avec l'igloo (on néglige bien sûr les frottements).

2 • Quel est le mouvement ultérieur de l'enfant ? Quelle est sa vitesse quand il retombe sur le sol ? Effectuer l'application numérique avec $m = 30 \text{ kg}$, $a = 2 \text{ m}$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Commenter.

Conseils

- 1) L'enfant perd le contact avec l'igloo quand la réaction de l'igloo s'annule. Il faut donc exprimer cette réaction en fonction de θ seulement. Pour cela, on sera amené à multiplier la projection de la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{e}_θ par $\dot{\theta}$ pour pouvoir l'intégrer.
- 2) Attention aux conditions initiales du mouvement.

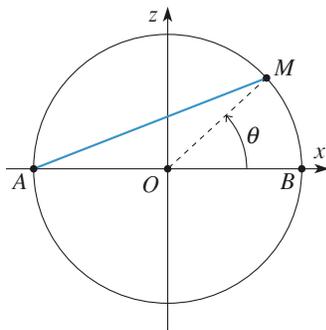
5 Équilibre d'un point

Un point M de masse m est lié à un cercle fixe dans le plan vertical, de centre O et de rayon R . La liaison est supposée sans frottements. Le point M est attiré par l'extrémité A du diamètre horizontal AB par une force toujours dirigée vers A et dont le module est proportionnel à la distance AM . La position du point M est repérée par l'angle $\theta = (\overline{AB}, \overline{OM})$.

1 • Déterminer les positions $\theta = \theta_c$ d'équilibre du point M sur le cercle.

2 • Quand le point n'est pas en équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, puis le théorème du moment cinétique en O .

3 • On suppose que θ reste proche de θ_c et on pose $\theta = \theta_c + u$ avec $u \ll \theta_c$. Déterminer alors l'équation différentielle vérifiée par u . Les conditions initiales sont $u = u_0$ et $\dot{u} = 0$. Déterminer entièrement $u(t)$. Que peut-on dire quant à la stabilité de la (des) position(s) d'équilibre déterminée(s) au 1) ? Une position d'équilibre est stable si, quand on écarte légèrement le point de cette position, il tend à y revenir, elle est instable dans le cas contraire.



Conseils

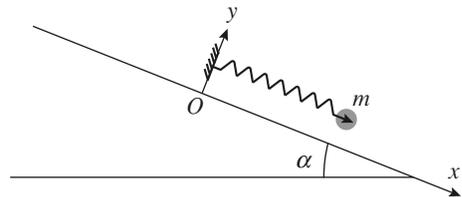
- 1) Exprimer toutes les forces qui s'exercent sur le point M dans la base des coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, sans oublier de déterminer la distance AM en fonction de R et de θ .

2) Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur la direction qui élimine la force inconnue (c'est-à-dire la réaction du support).

3) Effectuer un développement limité au premier ordre en u . Mettre en évidence la différence de comportement du mouvement du point autour de chacune des deux positions d'équilibre déterminées plus haut.

6 Mouvement d'une masse accrochée à un ressort, impact au point d'attache (oral TPE)

Un objet ponctuel de masse m , fixé à un ressort de constante de raideur k et longueur à vide L_0 , attaché en O , se déplace le long d'un plan incliné d'angle α . On suppose la masse du ressort nulle, ainsi que sa longueur quand il est comprimé. La position de la masse est x_c à l'équilibre. On néglige les frottements.



À l'instant initial, on lance la masse, située en x_c , avec une vitesse v_0 vers O . Déterminer le mouvement $x(t)$. À quelle condition sur v_0 la masse frappe-t-elle le point O ? À quel instant le choc a-t-il lieu et quelle est alors la vitesse de la masse ?

Conseils

Commencer par trouver l'expression de x_c . Déterminer $x(t)$ en utilisant les conditions initiales

et en introduisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

7 Enroulement d'un fil sur un cylindre

D'après Mines de Douai.

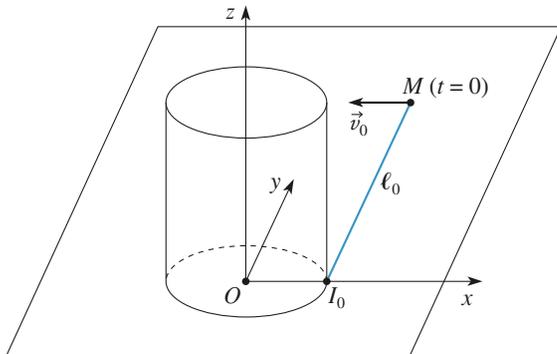
Un cylindre de révolution, d'axe vertical, de rayon R , repose sur un plan horizontal et fixe par rapport à un référentiel (Ox, Oy, Oz) .

On attache une extrémité d'un fil parfaitement souple, infiniment mince et de masse négligeable à la base du cylindre, et on l'enroule plusieurs fois dans le sens trigonométrique autour de cette base. L'autre extrémité du fil

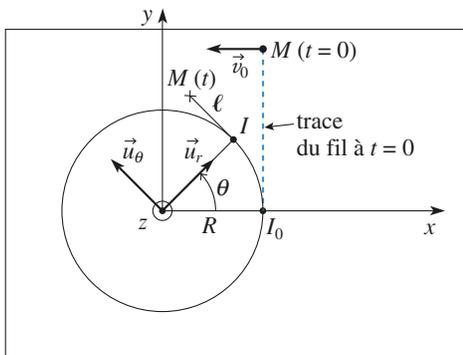
est fixée à une particule M de masse m , astreinte à glisser sans frottement sur le plan horizontal (Oxy) . La partie I_0M non enroulée du fil est tendue.

Données : $R = 0,2 \text{ m}$; $m = 0,04 \text{ kg}$; $\ell_0 = I_0M = 0,5 \text{ m}$; $v_0 = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

1 • À l'instant $t = 0$, on communique à la particule M une vitesse \vec{v}_0 horizontale perpendiculaire à I_0M et orientée comme l'indiquent les deux figures ci-dessous :



Vue en perspective à l'instant $t = 0$



Vue de dessus à l'instant t

On admet que le fil reste tendu au cours du mouvement. À l'instant t , on appelle θ l'angle dont s'est enroulé le fil et ℓ la longueur IM du fil non encore enroulé.

Le fil étant inextensible, donner la relation entre ℓ , ℓ_0 , R et θ .

2 • Exprimer les composantes de \vec{OM} suivant les vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ (cf. figure), en fonction de ℓ_0 , R et θ .

3 • En déduire les composantes de la vitesse \vec{v} de la particule M suivant les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ .

4 • Montrer que la norme v de la vitesse reste constante au cours du mouvement.

5 • Déduire des questions 3) et 4) la relation entre θ , $\dot{\theta}$, ℓ_0 , R et v_0 .

6 • Exprimer θ en fonction de t , ℓ_0 , R et v_0 .

7 • Déterminer l'instant final t_f pour lequel le fil est entièrement enroulé autour du cylindre. Effectuer l'application numérique.

8 • a) Déterminer la tension T du fil en fonction de t , m , ℓ_0 , R et v_0 .

b) En réalité, il y a rupture du fil dès que sa tension dépasse la valeur $T_{\text{rup}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N}$. Déterminer l'instant t_{rup} et l'angle θ_{rup} lorsqu'intervient la rupture du fil. Effectuer l'application numérique.

Conseils

4) Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{u}_r après avoir soigneusement inventorié les forces qui agissent sur le point matériel ainsi que leur direction.

5) Attention au signe des différentes expressions.

6) En intégrant la relation obtenue à la question 5), établir l'équation du second degré vérifiée par θ .

La résoudre en remarquant qu'une seule des deux racines de cette équation correspond à une fonction $\theta(t)$ croissante.

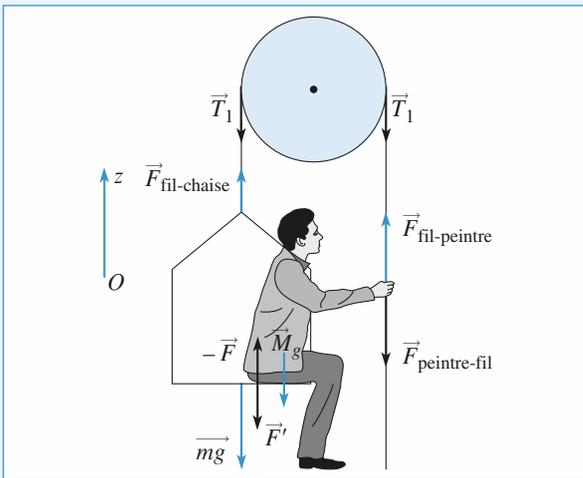
8) Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{u}_r .

1 Un peintre ingénieux

1 • Les forces appliquées au système {chaise + peintre} sont le poids de l'ensemble, l'action du fil sur la chaise et l'action du fil sur le peintre ; ces forces sont indiquées en bleu sur le schéma ci-dessous.

Le fil étant inextensible et la poulie sans masse, les deux forces \vec{T}_1 sont égales et sont, en norme, égales à la force que le peintre exerce sur la corde (on notera T leur norme).

De même, $T = F_{\text{fil-chaise}}$.



La relation fondamentale de la dynamique appliquée à ce système s'écrit, en projection sur la verticale ascendante (Oz) :

$$(m + M)a = -(m + M)g + 2T$$

$$\Leftrightarrow a = -g + \frac{2T}{m + M} = 3,15 \text{ m.s}^{-2}.$$

Cette accélération est positive : partant du niveau du sol, le peintre s'élève.

2 • Les forces appliquées à la chaise seule sont son poids, l'action du fil et l'action du peintre ($\vec{F} = F\vec{e}_z$). La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la chaise seule, projetée sur (Oz), donne :

$$ma = -mg + F + T \Leftrightarrow F = m(a + g) - T = \frac{m - M}{m + M} T = -486 \text{ N}.$$

$F < 0$: cette force est bien dirigée vers le bas, le peintre « appuie » sur la chaise (il exerce une force équivalente au poids d'une masse de 49,6 kg environ).

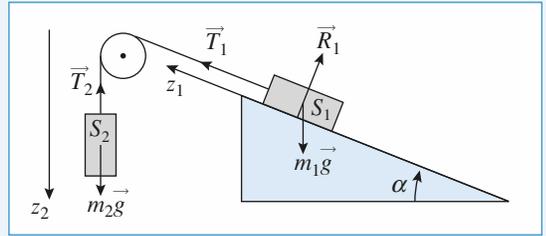
3 • Le peintre et la chaise de masse m' (peintures comprises) montent si $a > 0$, soit $m' < \frac{2T}{g} - M = 49 \text{ kg}$, donc la peinture

n'excède pas 34 kg, ce qui est raisonnable.

(D'autre part, il faut aussi obtenir $F < 0$, sinon le peintre risque de monter sans la chaise et la peinture, soit $m' < M$, ce qui est une condition moins contraignante que la précédente).

2 Plan incliné et poulies

1 •



En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, en projection sur z_1 ou z_2 pour chaque mobile, il vient (en notant T_1 et T_2 les tensions du fil, les normes de T_1 et T_2) :

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g \sin \alpha + T_1$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_2.$$

Le fil étant inextensible, on a : $\dot{z}_1 = \dot{z}_2$.

Le fil étant de masse négligeable, et la poulie idéale : $T_1 = T_2$.

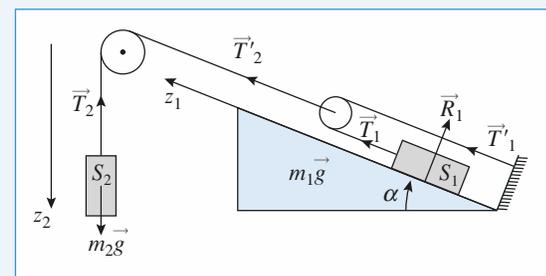
Finalement, il vient :

$$\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = \frac{m_2 - m_1 \sin \alpha}{m_2 + m_1} g$$

$$T_2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha).$$

Avec les valeurs numériques proposées : $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$ (il y a donc équilibre si la vitesse initiale est nulle), et $T_2 = 1,96 \text{ N}$.

2 •



En reprenant les écritures précédentes, on a ici encore :

$$m_1 \ddot{z}_1 = -m_1 g \sin \alpha + T_1$$

$$m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - T_2$$

Le fil 2 est inextensible, donc $\dot{z}_2 = \dot{z}_1(\text{poulie mobile})$, et le fil 1 étant inextensible, il vient encore $\dot{z}_1(\text{poulie mobile}) = \frac{\dot{z}_1}{2}$.

D'autre part, négliger les inerties des fils et poulies conduit à écrire : $T_2 = T_2'$ et $T_2' = T_1' + T_1$ et $T_1 = T_1'$, soit : $T_2 = 2T_1$.

On obtient donc :

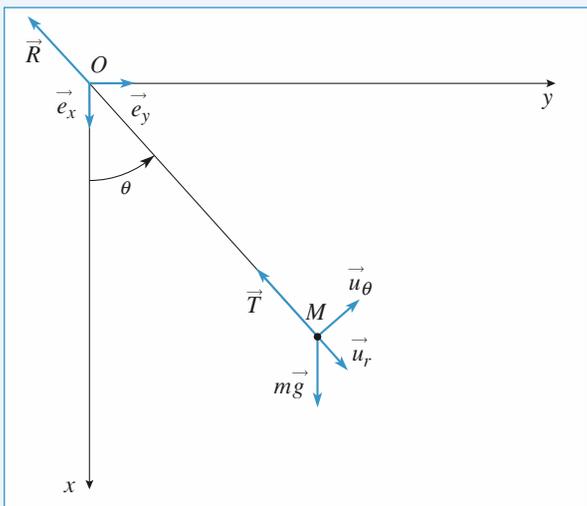
$$2m_1 \ddot{z}_2 = -m_1 g \sin \alpha + T_1 \quad \text{et} \quad m_2 \ddot{z}_2 = m_2 g - 2T_1.$$

$$\text{Soit encore :} \quad \ddot{z}_2 = \frac{m_2 - 2m_1 \sin \alpha}{m_2 + 4m_1} g$$

$$T_2 = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + 4m_1} (2 + \sin \alpha) g$$

et numériquement : $\ddot{z}_2 = -1,1 \text{ m.s}^{-2}$ et $T_2 = 2,2 \text{ N}$.

3 Étude d'un pendule simple, réaction au point d'attache



Au point O , le fil étant sans masse, on a :
 $\vec{R} + (-\vec{T}) = \vec{0}$.

Pour la masse m située au point M , on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique dans la référentiel galiléen où se fait l'expérience.

Soit : $m\vec{a}(M) = m\vec{g} + \vec{T}$ avec $\begin{cases} \vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + \ell\ddot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{T} = -T\vec{u}_r. \end{cases}$

On en déduit $\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg \sin \theta. \end{cases}$ ①

En multipliant l'équation ① par $\dot{\theta}$, il vient :

$$m\ell\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \dot{\theta}$$

$$m\ell \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = d(mg \cos \theta).$$

$$\frac{1}{2} m\ell \dot{\theta}^2 = mg \cos \theta + K.$$

Les conditions initiales $\dot{\theta} = 0$ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ permettent d'obtenir $K = 0$.

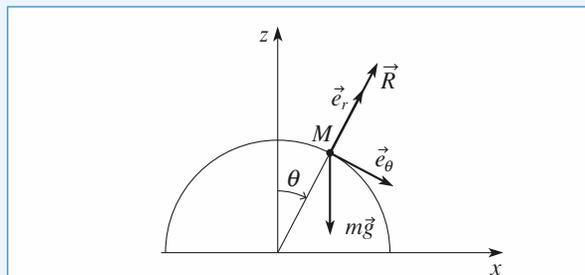
$$D'où $\vec{R} = \vec{T} = -3 mg \cos \theta \vec{u}_r$.$$

$$R_x(\theta) = -3 mg \cos^2 \theta$$

$$R_y(\theta) = -3 mg \sin \theta \cos \theta.$$

4 Un jeu d'enfant

1 • Les forces qui s'exercent sur l'enfant sont son poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ et la réaction de l'igloo $\vec{R} = R\vec{e}_r$ (en l'absence de frottements).



La relation fondamentale de la dynamique

$m\vec{a}(M) = \vec{P} + \vec{R}$ projetée sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ donne :

$$\begin{cases} -m\dot{\theta}^2 = R - mg \cos \theta & (1) \\ m\ddot{\theta} = mg \sin \theta. & (2) \end{cases}$$

L'enfant esquimau quittera le contact avec l'igloo quand R sera nul. Il faut donc exprimer R en fonction de θ et, pour cela, déterminer préalablement la relation entre $\dot{\theta}^2$ et θ : on multiplie la relation (2) par $\dot{\theta}$:

$$\begin{aligned} m\dot{\theta}\ddot{\theta} = mg \dot{\theta} \sin \theta &\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} (-mg \cos \theta) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} m\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + A, \end{aligned}$$

où A est une constante déterminée par les conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$, donc $A = mg$.

La relation recherchée est $m\dot{\theta}^2 = 2mg(1 - \cos \theta)$. On la reporte dans l'équation (1) : $R = mg(3 \cos \theta - 2)$.

R est positif tant que θ reste inférieur à :

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{2}{3} \right) = 48^\circ.$$

2 • Quand l'enfant a quitté l'igloo, il n'est plus soumis qu'à son poids. On choisit cet instant comme nouvelle origine des temps.

Les conditions initiales de ce nouveau mouvement sont :

$$x(0) = a \sin \theta_0 = x_0, \quad z(0) = a \cos \theta_0 = z_0 \text{ (point } M_0)$$

$$\vec{v}(0) = a\dot{\theta}_0 \vec{e}_\theta = a\dot{\theta}_0 (\cos \theta_0 \vec{e}_x - \sin \theta_0 \vec{e}_z)$$

$$= \sqrt{\frac{2ga}{3}} \left(\frac{2}{3} \vec{e}_x - \sqrt{\frac{5}{9}} \vec{e}_z \right) = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z$$

Le mouvement est parabolique, tangent à l'igloo au point M_0 . Les lois horaires du mouvement sont :

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t + x_0 \\ z(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_{0z}t + z_0. \end{cases}$$

L'enfant touche le sol à l'instant t_f tel que $z(t_f) = 0$. On obtient :

$$t_f = \frac{1}{g} \left(v_{0z} + \sqrt{v_{0z}^2 + 2gz_0} \right) \text{ (l'autre racine est négative).}$$

Sa vitesse, quand il arrive sur le sol, est donc :

$$\vec{v}_f = v_{0x} \vec{e}_x + (v_{0z} - gt_f) \vec{e}_z.$$

A.N. : $v_{0x} = 2,41 \text{ m.s}^{-1}$; $v_{0z} = -2,69 \text{ m.s}^{-1}$;
 $z_0 = 1,33 \text{ m}$; $t_f = 0,315 \text{ s}$; $\vec{v}_f = 2,41 \vec{e}_x - 5,78 \vec{e}_z$
 et $v_f = 6,26 \text{ m.s}^{-1} = 22,5 \text{ km.h}^{-1}$.

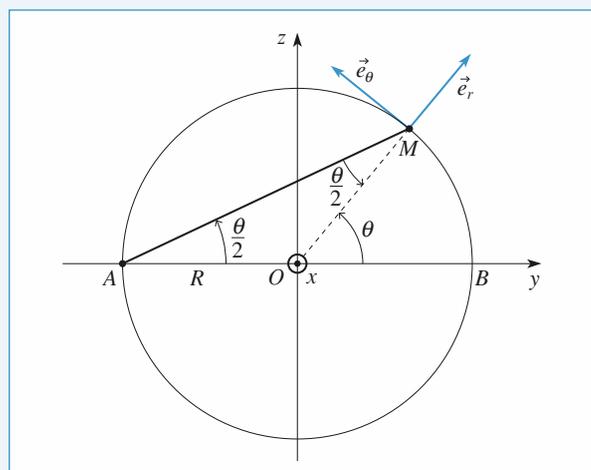
Cette vitesse a la même norme ($v_f = \sqrt{2ga}$) que celle qu'a-
 rait l'enfant s'il tombait en chute libre depuis le sommet de
 l'igloo : le théorème de l'énergie cinétique (cf. chapitre sui-
 vant) donne ce résultat immédiatement.

5 Équilibre d'un point

1 • Les forces appliquées au point M sont :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg(\sin\theta\vec{e}_r + \cos\theta\vec{e}_\theta)$;
- la réaction du cercle $\vec{N} = N\vec{e}_r$ (pas de frottements) ;
- la force de rappel $\vec{F} = k\vec{MA}$:

$$\vec{F} = -k2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_r - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\vec{e}_\theta\right).$$



Quand le point M est à l'équilibre, $\vec{P} + \vec{N} + \vec{F} = 0$.

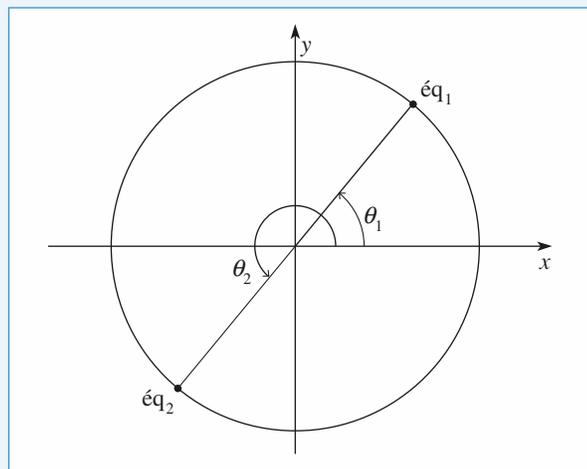
La force \vec{N} étant inconnue, on projette cette équation sur \vec{e}_θ :

$$-mg\cos\theta + 2kR\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{mg}{kR}.$$

Il y a donc deux positions d'équilibre :

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right) \text{ et } \theta_2 = \pi + \theta_1.$$



2 • La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :
 $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F}$. Comme à la question précédente, on la
 projette sur \vec{e}_θ pour éliminer N :

$$\begin{aligned} mR\ddot{\theta} &= -mg\cos\theta + 2kR\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -mg\cos\theta + kR\sin\theta. \end{aligned}$$

3 • $\theta_c = \theta_1$ ou θ_2 .

$\theta = \theta_c + u$ avec $u \ll \theta_c$, d'où :

$$\cos\theta = \cos\theta_c\cos u - \sin\theta_c\sin u = \cos\theta_c - u\sin\theta_c$$

au premier ordre en u .

De même :

$$\sin\theta = \sin\theta_c\cos u + \cos\theta_c\sin u = \sin\theta_c + u\cos\theta_c.$$

L'équation du mouvement devient, au premier ordre en u :

$$mR\ddot{u} = -mg\cos\theta_c + kR\sin\theta_c + u(kR\cos\theta_c + mgsin\theta_c).$$

Le terme constant est nul (définition de θ_c). Il reste :

$$\ddot{u} - \left(\frac{k}{m}\cos\theta_c + \frac{g}{R}\sin\theta_c\right)u = 0.$$

(On remarque que $\frac{k}{m}$ et $\frac{g}{R}$ sont homogènes à des pulsa-
 tions au carré.)

La nature des solutions de cette équation dépend du signe du
 terme facteur de u .

Pour $\theta_c = \theta_1$, $\cos\theta_1$ et $\sin\theta_1$ sont positifs. On pose alors

$$\omega_2 = \frac{k}{m}\cos\theta_1 + \frac{g}{R}\sin\theta_1.$$

Or, $\sin\theta_1 = \tan\theta_1\cos\theta_1 = \left(\frac{kR}{mg}\right)^{-1}\cos\theta_1$, d'où :

$$\omega^2 = \frac{k}{m\cos\theta_1} = \left(\frac{k^2}{m^2} + \frac{g^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

La solution de l'équation du mouvement est :

$$u = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}.$$

Compte tenu des conditions initiales,

$$u(0) = u_0 = A + B \text{ et } \dot{u}(0) = 0 = \omega(A - B),$$

on obtient $u(t) = u_0 \operatorname{ch}(\omega t)$: si on écarte légèrement le point de sa position d'équilibre, il s'en éloigne encore plus, l'équilibre est donc instable.

Pour $\theta_e = \theta_2$, $\cos \theta_2$ et $\sin \theta_2$ sont négatifs. On pose alors :

$$-\omega_2 = \frac{k}{m} \cos \theta_2 + \frac{g}{R} \sin \theta_2. \text{ Comme pour } \theta_1, \text{ on obtient :}$$

$$\omega^2 = \frac{-k}{m \cos \theta_2} = \left(\frac{k^2}{m^2} + \frac{g^2}{R^2} \right) \frac{1}{2}.$$

La solution de l'équation du mouvement est :

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t \text{ avec } A = u_0 \text{ et } B = 0$$

en tenant compte des conditions initiales, d'où $u(t) = u_0 \cos \omega t$: si on écarte légèrement le point de sa position d'équilibre, il y revient : l'équilibre est donc stable.

6 Mouvement d'une masse accrochée à un ressort, impact au point d'attache (oral TPE)

À l'équilibre, les forces qui agissent sur m sont l'action du ressort, le poids et la réaction du support, parallèle à Oy en l'absence de frottements.

$$\text{En projection sur } Ox : 0 = -k(x_e - L_0) + mg \sin \alpha.$$

$$\text{Au cours du mouvement : } m\ddot{x} = -k(x - L_0) + mg \sin \alpha$$

$$m\ddot{x} = -k(x - x_e).$$

En introduisant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient :

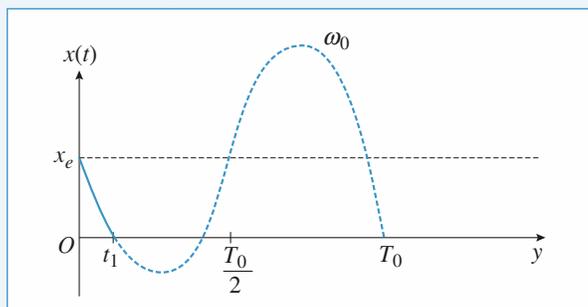
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_e.$$

$$\text{d'où } x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + x_e.$$

$$\text{A } t = 0 \quad x(0) = A + x_e = x_e \quad A = 0$$

$$\dot{x}(0) = B \omega_0 = -v_0 \quad B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

$$\text{Donc } x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_e.$$



$$x(t) \text{ peut s'annuler si } x_e - \frac{v_0}{\omega_0} < 0$$

$$v_0 > x_e \omega_0.$$

$$\text{On a impact en } O \text{ à } t_1 \text{ avec } t_1 < \frac{T_0}{4}. \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\sin \omega_0 t_1 = \frac{\omega_0 x_e}{v_0} \quad \text{soit } t_1 = \frac{1}{\omega_0} \operatorname{Arc} \sin \frac{\omega_0 x_e}{v_0}.$$

La vitesse au moment du choc vérifie :

$$\dot{x}(t_1) = -v_0 \cos \omega_0 t_1.$$

$$\dot{x}(t_1) = -v_0 \left(1 - \frac{\omega_0^2 x_e^2}{v_0^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

7 Enroulement d'un fil sur un cylindre

1 • $\ell = \ell_0 - R\theta$ puisque la longueur enroulée vaut $R\theta$.

$$2 \bullet \vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM} = R\vec{u}_r + (\ell_0 - R\theta)\vec{u}_\theta.$$

$$3 \bullet \frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r, \text{ d'où, après simplification :}$$

$$\vec{v} = -\dot{\theta}(\ell_0 - R\theta)\vec{u}_r.$$

4 • Les forces qui s'exercent sur le point M sont :

- son poids \vec{P} ;
- la réaction du plan horizontal \vec{R} ;
- la tension du fil \vec{T} .

Il n'y a pas de frottements.

Les deux premières forces sont verticales, la dernière est dirigée par \vec{u}_θ , donc $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ et $m \frac{dv}{dt} = \vec{T} = -T\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire à \vec{v} , soit : $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, ce qui assure $v = \text{cte} = v_0$.

5 • $\dot{\theta} > 0$, $\ell_0 - R\theta > 0$, la norme de la vitesse est donc $v = \dot{\theta}(\ell_0 - R\theta) = v_0$.

6 • L'équation précédente s'intègre en $\ell_0 \theta - \frac{R\theta^2}{2} = v_0 t$

(compte tenu des conditions initiales).

$\theta(t)$ est donc la solution de l'équation du second degré :

$$\theta^2 - \frac{2\ell_0 \theta}{R} + \frac{2v_0 t}{R} = 0.$$

$$\text{Donc : } \theta(t) = \frac{\ell_0}{R} \pm \sqrt{\left(\frac{\ell_0}{R} \right)^2 - \frac{2v_0 t}{R}}.$$

$\theta(t)$ étant croissant, on ne conserve que la solution avec le signe $-$:

$$\theta(t) = \frac{\ell_0}{R} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2Rv_0 t}{\ell_0^2}} \right).$$

7 • Le fil est entièrement enroulé quand :

$$K(t) = \frac{\ell_0}{R} = 143^\circ, \quad \text{donc : } t_f = \frac{\ell_0^2}{2Rv_0} = 6,25 \text{ s}$$

8 • a. Pour déterminer la tension du fil, on projette la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{u}_θ , en utilisant le fait que $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_r$, donc que $\vec{a} = -\dot{\theta} v_0 \vec{u}_\theta$. Il vient

$T = mv_0 \dot{\theta}$ (T est le module de la tension \vec{T}). En utilisant l'expression de $\theta(t)$ déterminée plus haut, on obtient :

$$T = \frac{mv_0^2}{\ell_0} \left(1 - \frac{2Rv_0 t}{\ell_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}}.$$

b.
$$t_{\text{rup}} = \frac{\ell_0^2}{2Rv_0} \left(1 - \left(\frac{mv_0^2}{\ell_0 T_{\text{rup}}} \right)^2 \right) = 6,09 \text{ s ;}$$

$$\theta_{\text{rup}} = \frac{\ell_0}{R} \left(1 - \frac{mv_0^2}{\ell_0 T_{\text{rup}}} \right) = 2,1 \text{ rad} = 120^\circ < 143^\circ.$$

3

Puissance et énergie en référentiel galiléen

LES OBJECTIFS

- Introduire la notion d'énergie.
- Utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour résoudre les problèmes à un degré de liberté.

LES PRÉREQUIS

- Lois de Newton.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Intégration en mathématiques.
- Lecture de courbes, interprétation graphique de solutions.

ESSENTIEL

« Puissance, travail d'une force dans un référentiel

- La puissance \mathcal{P} d'une force \vec{F} est égale au produit scalaire de cette force par la vitesse de déplacement de son point d'application :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

- Le travail \mathcal{T} d'une force entre les instants t_1 et t_2 est égal à $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mathcal{P} dt$. Pour un point matériel, ce travail \mathcal{T} est égal à la circulation de \vec{F} :

$$\mathcal{T} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

« Théorèmes de la puissance et de l'énergie cinétique

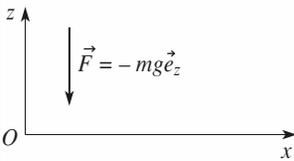
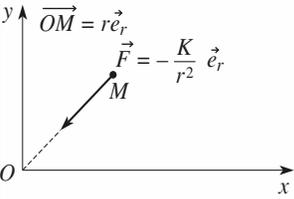
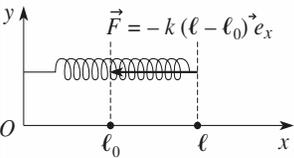
- La puissance cinétique $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt}$ (dérivée de l'énergie cinétique par rapport au temps) est égale à la puissance de toutes les forces s'exerçant sur le point matériel.
- La variation d'énergie cinétique $\Delta\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K(t_2) - \mathcal{E}_K(t_1)$ est égale au travail \mathcal{T} de toutes les forces pendant l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$.

« Champ de forces conservatif

Un champ de forces est conservatif s'il dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\vec{r})$, telle que le travail élémentaire de la force vérifie :

$$\delta\mathcal{T} = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -d\mathcal{E}_p.$$

Quelques exemples d'énergies potentielles

interaction	force	schéma	énergie potentielle
pesanteur	$\vec{F} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$		$\mathcal{E}_P = mgz + \text{cte}$
interaction newtonienne	$\vec{F} = -\frac{K}{r^2} \vec{e}_r$		$\mathcal{E}_P = -\frac{K}{r} + \text{cte}$
ressort linéaire	$\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$		$\mathcal{E}_P = \frac{1}{2} k(\ell - \ell_0)^2 + \text{cte}$

Énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un point matériel est $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_P + \mathcal{E}_K$.

La variation de \mathcal{E}_M est égale au travail des forces qui ne dérivent pas de l'énergie potentielle, donc au travail des forces non conservatives.

Mouvement conservatif à un degré de liberté

L'équation du mouvement peut se déduire de $\mathcal{E}_M = \text{cte}$:

- l'évolution du point matériel est limitée aux zones où l'énergie potentielle reste inférieure à l'énergie mécanique : $\mathcal{E}_P(x) \leq \mathcal{E}_M$;
- les trajectoires de phase d'un système conservatif sont des courbes à énergie mécanique constante ;
- les *minima* de \mathcal{E}_P correspondent aux positions d'équilibre stables et les *maxima* aux positions d'équilibre instables. La technique de linéarisation, lorsqu'elle est justifiée, permet de préciser la nature du mouvement au voisinage de l'équilibre.

Conseils et pièges à éviter

- Le travail d'une force \vec{F} s'obtient ainsi :

$$\mathcal{T} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

qui pour un point matériel se déduit de la formule générale toujours utilisable :

$$\mathcal{T} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t) dt$$

avec $\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t)$

avec $\vec{v}(t)$ la vitesse du point d'application de la force, ici le point matériel.

- Pour un système conservatif, penser dès que possible à l'invariance de l'énergie mécanique pour obtenir l'équation d'évolution du point matériel.

1 Distance minimale de freinage

Une voiture roulant à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ s'immobilise sur une route rectiligne et horizontale au bout d'une distance de 40 m. En supposant que la force de frottement entre le sol et la voiture est constante, déterminer la distance de freinage si le véhicule roule à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On négligera la résistance de l'air.

Conseils

Appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre le début du freinage et l'arrêt total.

2 Carabine-jouet à ressort

Une carabine-jouet à ressort est modélisée de la manière suivante : un ressort de raideur k est placé dans un tube cylindrique (en plastique) de longueur ℓ_0 égale à la longueur à vide du ressort. On dépose au bout du ressort une balle en plastique de masse m et on comprime le ressort d'une longueur $\Delta\ell$ à l'intérieur du tube. Le tube étant incliné de 60° par rapport à l'horizontale, on libère le ressort qui propulse instantanément la balle. On néglige le frottement de la balle dans le tube et la résistance de l'air.

1 • À quelle vitesse v_0 la balle sort-elle du canon de la carabine ?

2 • Quelle hauteur h (par rapport à la sortie de la carabine) la balle atteint-elle dans ces conditions ?

Avec quelle vitesse horizontale v_H ?

A.N. : Calculer v_0 , h et v_H .

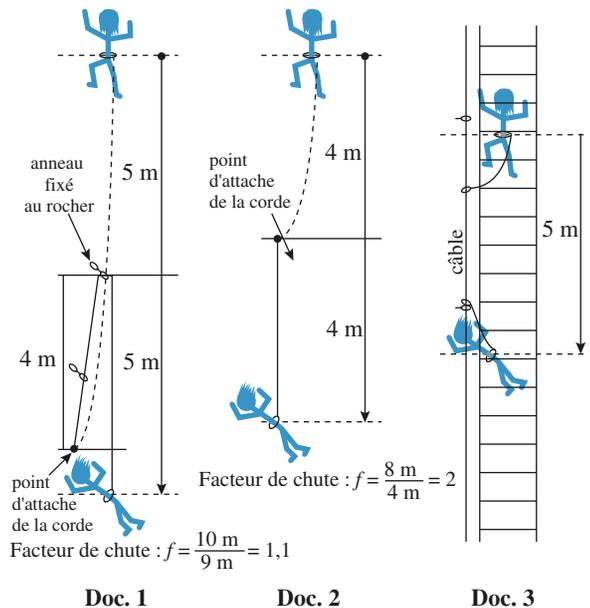
Données : $m = 20 \text{ g}$, $k = 400 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\Delta\ell = 10 \text{ cm}$.

Conseils

1) Utiliser la conservation de l'énergie de la balle après avoir soigneusement déterminé son énergie potentielle que l'on pourra, par exemple, choisir nulle à la sortie du canon.

2) Que peut-on dire de la composante horizontale de la vitesse de la balle après la sortie du canon ? En déduire le module de la vitesse au sommet de la trajectoire, puis, en appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre la sortie du canon et le sommet, la hauteur du tir.

3 Étude de la chute d'un alpiniste



Lors d'une escalade, un grimpeur s'assure en passant sa corde dans des anneaux métalliques fixés au rocher. La corde peut coulisser librement dans ces anneaux. Le facteur de chute f est défini comme le rapport de la hauteur de chute tant que la corde n'est pas tendue sur la longueur L de corde utilisée. Si au moment de la chute, la corde est tendue, ce facteur de chute vaut $f = \frac{2\ell}{L}$ (docs. 1 et 2) où

ℓ est la distance du grimpeur au dernier anneau. Dans des conditions normales d'utilisation f est compris entre 0 et 2. Pour les applications numériques, le poids P du grimpeur sera pris égal à 800 N.

Le maillon fragile dans la chaîne d'assurance d'un grimpeur n'est pas la corde (qui peut résister à des forces de plus de 18 kN), ni les points où la corde est attachée au rocher (résistance de l'ordre de 20 kN) mais le grimpeur (une force de 12 kN exercée sur le bassin provoque sa rupture) ! Les cordes utilisées en escalade sont élastiques de façon à diminuer la force qui s'exerce sur le grimpeur lors de sa chute. On assimilera une corde de montagne dont la longueur utilisée est L à un ressort de longueur à vide L et de raideur $k = \frac{1}{\alpha L}$. L'élasticité α de la corde

est une grandeur caractéristique du matériau la constituant.

1 • Soit un ressort **vertical** de raideur k et de longueur à vide L auquel est suspendue une masse m , de poids $P = mg$ (g désignant le module du champ de pesanteur). À

l'instant $t = 0$, le ressort est non tendu et m a une vitesse verticale, dirigée vers le bas, de module v_0 . Déterminer l'élongation maximale du ressort x_{\max} (**mesurée à partir de la longueur à vide**) et la force maximale F_{\max} qu'il exerce sur la masse m .

2 • En utilisant le résultat de la question 1), exprimer la force maximale F_{\max} exercée par la corde lors d'une chute de facteur f en fonction des données de l'énoncé. Que remarquez-vous ?

3 • Le corps humain peut résister à une force de l'ordre de 12 kN pendant un temps bref.

a) Une corde d'escalade est prévue pour que la force maximale exercée sur l'alpiniste soit de 9 kN dans les conditions les plus défavorables ($f = 2$).

i) Calculer l'élasticité de cette corde (préciser les unités de α).

ii) Calculer l'élongation maximale de cette corde et la force maximale pour $L = 10$ m et $f = 1$.

iii) Qu'en est-il pour la *doc. 3* où la hauteur de chute est de 5 m et la longueur de la longe (corde à laquelle est accroché le grimpeur) est de 1 m.

b) L'étude précédente ne tient pas compte des phénomènes dissipatifs se produisant dans la corde. L'élongation de la corde est en fait inférieure à celle calculée avec le modèle choisi. La corde ne se comporte pas comme un ressort. Supposons que pendant toute la durée du freinage par la corde, elle s'allonge de façon à maintenir à 9 kN la force qu'elle exerce sur le grimpeur. Calculer son élongation maximale pour $L = 10$ m, $g = 1$ puis $L = 1$ m, $f = 5$.

c) Une corde utilisée en spéléologie est dite statique car son élasticité est faible (environ 5×10^{-6} SI). En revenant au modèle d'une corde parfaitement élastique, à partir de quel facteur de chute y a-t-il danger de mort avec une telle corde ?

Conseils

Pour déterminer l'élongation extrême de la corde, qui est le but des questions posées, il est inutile de résoudre l'équation du mouvement pour obtenir la loi d'évolution de la longueur de la corde au cours du temps. Utiliser la conservation de l'énergie, en examinant soigneusement les conditions initiales pour calculer la constante énergie mécanique, est bien suffisant et nettement plus rapide.

4 Anneau en mouvement sur une hélice

Les équations en coordonnées polaires d'une hélice rigide d'axe vertical Oz sont $r = a$ et $z = h\theta$. Un petit anneau enfilé sur l'hélice est abandonné sans vitesse initiale au point d'altitude $H = 2\pi h$. En assimilant l'anneau à un point matériel

mobile sans frottement, calculer le temps qu'il met pour atteindre le plan horizontal $z = 0$.

5 Mouvement de trois électrons

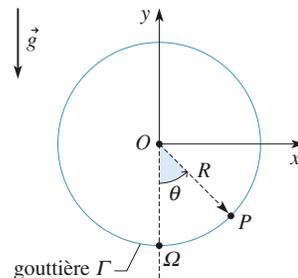
Trois électrons sont retenus aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a puis sont abandonnés simultanément. Déterminer la vitesse limite de chacun. Application numérique : $m = 9,10^{-31}$ kg, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, $a = 2 \cdot 10^{-10}$ m, $e_0 = 1/36\pi \cdot 10^9$.

Conseils

Comment évolue la figure formée par les trois électrons ? Utiliser le point O , centre de gravité du triangle initial pour repérer la position d'un électron.

6 *Mouvement d'un point sur un cercle, liaison bilatérale, puis unilatérale

On considère une gouttière Γ circulaire, verticale, de centre O et de rayon R . On appelle (Oy) l'axe vertical ascendant. La position d'un point P sur Γ est repérée par l'angle θ entre $O\Omega$ et OP , où Ω est le point le plus bas du cercle.



1 • Une petite perle P de masse m est enfilée sur la gouttière (liaison bilatérale) qui joue donc le rôle de glissière. À l'instant $t = 0$, on lance P depuis le point Ω avec une vitesse v_0 . La perle glisse sans frottements le long de Γ .

a) Exprimer la vitesse de P en un point d'altitude y en fonction de v_0, g, R et y .

b) Étudier alors les différents mouvements possibles de P suivant les valeurs de v_0 .

c) Déterminer la réaction \vec{N} de la gouttière sur la perle. Étudier ses variations en fonction de y . Commenter.

d) On choisit ici $v_0 = 2\sqrt{gR}$. Déterminer la loi horaire $\theta(t)$. Quelle est la valeur maximale de θ ?

Pour quelle valeur de t est-elle atteinte ?

$$\text{Donnée : } \int_0^\theta \frac{d\theta}{\cos \theta} = \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

2 • La gouttière Γ représente maintenant un des trous d'un parcours de golf miniature : la balle doit faire un looping complet à l'intérieur de Γ avant de poursuivre son chemin (liaison unilatérale). La gouttière est évidemment ouverte en Ω et « décalée » pour que la balle puisse poursuivre son chemin. La balle est assimilée à un point matériel P de masse m . Elle arrive au point Ω avec la vitesse v_0 .

a) Étudier les différents mouvements possibles de P suivant les valeurs de v_0 .

Quelle valeur minimale de v_0 faut-il donner à la balle pour qu'elle effectue le tour complet ?

b) On choisit encore $v_0 = 2\sqrt{gR}$. Pour quelle valeur de θ la balle quitte-t-elle le contact avec la gouttière ? À quel instant cela se produit-il ?

Conseils

1) La perle effectue un tour complet si sa vitesse ne s'annule pas au cours de son mouvement. Le signe de la réaction de la gouttière (ou de la glissière, dans cette question) n'a aucune importance ici, car la perle est enfilée sur la gouttière, donc le contact est toujours assuré.

Pour déterminer l'équation du mouvement, isoler $\frac{d\theta}{dt}$ à partir du théorème de l'énergie cinétique en

faisant très attention aux signes (on rappelle que $\sqrt{x^2} = |x|$). Mettre ensuite cette équation sous la forme $dt = f(\theta)d\theta$ avant de l'intégrer.

2) Dans ce cas, quand la réaction de la gouttière s'annule, la balle quitte le support : la gouttière ne joue plus le rôle de glissière. Il reste à étudier, suivant les valeurs de v_0 , si la réaction s'annule avant la vitesse ou non.

On se placera dans ce cas par la suite.

2 • Stabilité de l'équilibre

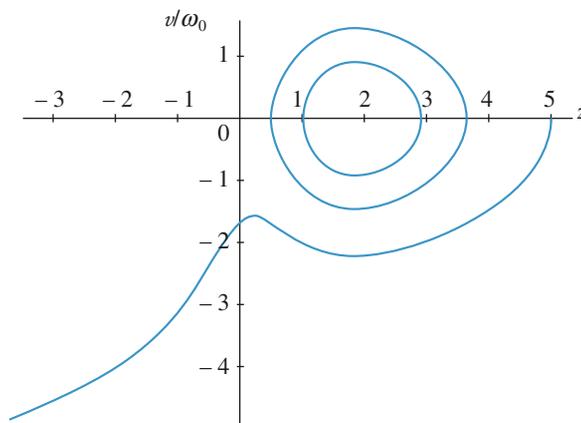
a) Exprimer l'énergie potentielle $E_p(z)$ associée à ce mouvement (on choisit $E_p(0) = 0$). Tracer l'allure des variations de $E_p(z)$, et discuter la stabilité des positions d'équilibre obtenues.

b) Quelle est la pulsation ω_0 des petites oscillations de la sphère au voisinage de l'équilibre stable ? (On l'exprimera en notant z_e la position d'équilibre stable.)

3 • On a tracé ci-dessous quelques trajectoires de phase dans le plan $\left(z, \frac{v}{\omega_0}\right)$ pour diverses conditions initiales.

a) Peut-on préciser le type de conditions initiales qui a été choisi, et le sens d'évolution de la particule sur ces trajectoires ?

b) Proposer quelques commentaires pour les évolutions observées.



Conseils

- 1) À l'équilibre, la somme des forces doit s'annuler.
- 2) L'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie potentielle. Pour de petits mouvements, on peut essayer de linéariser l'équation du mouvement au voisinage de l'équilibre.

7 Mouvement d'une particule chargée sur un axe

L'axe vertical (Oz) est matérialisé par un fil fin sur lequel peut coulisser sans frottement une très petite sphère, de masse m , portant la charge électrique q positive.

Un cerceau de rayon R et d'axe (Oz), portant une charge électrique positive répartie uniformément sur sa circonférence, crée un champ électrique dont on admettra l'expression sur l'axe (Oz) :

$$\vec{E}_{\text{axe}}(z) = \alpha \frac{z}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z, \text{ où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

1 • Force subie

a) Exprimer la valeur algébrique $F(z)$ de la force d'origine électrique $\vec{F}(z) = F(z)\vec{e}_z$ subie par la petite sphère. Tracer l'allure des variations de $F(z)$.

b) Pour quelles valeurs de la masse m est-il possible d'obtenir des positions d'équilibre pour la petite sphère ?

8 Navire à moteur (Banque G2E08)

Un navire, de masse $m = 10\,000$ tonnes, file en ligne droite, à la vitesse $v_0 = 15$ nœuds.

La force de résistance exercée par l'eau sur la coque du bateau est du type $F = kv^2$ où k est une constante et v la vitesse du bateau.

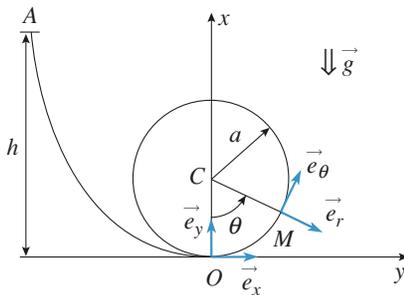
Un nœud correspond à 1 mille nautique par heure et le nautique est égal à 1 852 m.

On se place dans un référentiel lié au port qui sera supposé galiléen.

- 1 • Calculer la constante k sachant que le moteur fournit une puissance de 5 MW à la vitesse v_0 .
- 2 • Le navire stoppe ses machines à la distance X au large de la passe d'entrée d'un port. Déterminer l'expression de la vitesse du navire en fonction du temps t . On posera $L = m/k$.
- 3 • En déduire la distance X parcourue par le navire en fonction de L , v_0 et v_p , la vitesse au niveau de la passe. Calculer cette distance si on désire atteindre la passe à la vitesse de 2 nœuds.
- 4 • Déterminer le temps θ mis pour atteindre la passe.
- 5 • Déterminer la vitesse, v_0 , à l'arrivée du quai, un demi-mille au-delà de la passe d'entrée. On la calculera en nœuds puis en m/s.
- 6 • Quelle est la solution d'urgence pour arrêter le bateau ?

9 Étude d'un looping (d'après ICNA 06)

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m , est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a , disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière vers l'intérieur du cercle. On désigne par $\vec{g} = -g\vec{e}_y$ l'accélération de la pesanteur (cf. figure ci-dessous).



- 1 • Calculer la norme v_0 de la vitesse de la bille en O .
- 2 • Exprimer la norme v_M de la vitesse de la bille en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ .
- 3 • On désigne par $\vec{e}_r = \frac{\overline{CM}}{\|\overline{CM}\|}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur position \overline{CM} du point M . Écrire l'expression de la réaction $\vec{R} = R\vec{e}_r$ du guide circulaire sur la bille.
- 4 • Déterminer la hauteur minimale h_{\min} à partir de laquelle il faut lâcher la bille sans vitesse initiale pour qu'elle ait un mouvement révolutif dans le guide.
- 5 • On lâche la bille sans vitesse initiale depuis une hauteur $h_0 = 2a$. Calculer, en degrés, la valeur θ_0 de l'angle θ pour laquelle la bille quitte le guide.
- 6 • Calculer la valeur v_{Ox} de la composante suivant l'axe Ox de la vitesse de la bille au moment où elle quitte le guide.
- 7 • Calculer la valeur maximale h_M de la hauteur atteinte dans ces conditions par la bille après qu'elle ait quitté le guide.

1 Distance minimale de freinage

Soit F le module de frottement entre la voiture et le sol. Le théorème de l'énergie cinétique entre le début du freinage (la voiture à la vitesse v) et l'arrêt s'écrit :

- 1^{er} cas : $0 - \frac{mv_1^2}{2} = -Fd_1$;

- 2^e cas : $0 - \frac{mv_2^2}{2} = -Fd_2$.

On en déduit $\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 = 2,56$,

ce qui donne $d_2 = 102,4$ m, soit environ 100 m. La distance de freinage a donc augmenté de 60 m !

2 Carabine-jouet à ressort

1 • L'énergie mécanique initiale de la balle est :

$$\mathcal{E}_{M_0} = \frac{k(\Delta\ell)^2}{2} - mg \Delta\ell \sin \alpha$$

si on choisit l'origine des énergies

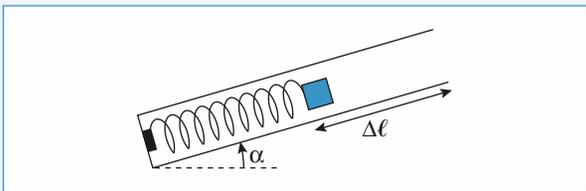
potentielles à l'extrémité du canon de la carabine. Quand la balle sort du canon, son énergie est donc uniquement sous

forme d'énergie cinétique, elle vaut $\frac{mv_0^2}{2}$. La conservation de

l'énergie mécanique (on néglige tout frottement) donne :

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\Delta\ell)^2 - 2g \sin \alpha \Delta\ell}$$

$$v_0 = 14,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 51 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$



2 • Quand la balle est au sommet de sa trajectoire, sa vitesse est horizontale. La seule force agissant sur la balle une fois qu'elle a été tirée est son poids, donc la composante horizontale de la vitesse se conserve :

$$v_H = v_0 \cos \alpha = 7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique entre l'instant où la balle sort du canon et celui où elle passe au sommet de sa trajectoire parabolique s'écrit :

$$\frac{mv_H^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgh, \text{ donc } h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \approx 7,6 \text{ m}.$$

3 Étude de la chute d'un alpiniste

1 • Notant x l'allongement du ressort, l'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

dont l'intégrale première est, compte tenu des conditions initiales :

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} m v_0^2.$$

L'élongation maximale du ressort est la solution supérieure à :

$$x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k}$$

de l'équation du second degré :

$$kx^2 - 2mgx - m v_0^2 = 0.$$

Soit :
$$x_{\text{max}} = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \right).$$

La force maximale vaut alors :

$$F_{\text{max}} = mg \left(1 + \sqrt{1 + \frac{k}{m} \left(\frac{v_0}{g} \right)^2} \right).$$

2 • La hauteur de chute libre h qui donne une vitesse v_0 à la limite de tension de la corde est $h = \frac{v_0^2}{2g}$.

Le facteur de chute du cas étudié est donc $f = \frac{v_0^2}{2gL}$, ce qui permet d'écrire la force maximale sous la forme :

$$F_{\text{max}} = P \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{\alpha P}} \right).$$

Ce résultat ne dépend que du facteur de chute, pas de h : pour une corde deux fois plus longue et une hauteur de chute deux fois plus grande, la force maximale est inchangée (le contact avec la paroi risque tout de même d'être un peu plus sévère !).

Le cas le plus défavorable correspond à L minimum, pour une hauteur de chute h donnée, soit $f = 2$, cas du *doc.* 2 de l'énoncé.

3 • a) i. L'élasticité de la corde est :

$$\alpha = \frac{2fP}{F_{\text{max}}(F_{\text{max}} - 2P)}, \text{ mesurée en } \text{N}^{-1}.$$

Pour $F_{\text{max}} = 9$ kN, $P = 800$ N, $f = 2$, il faut que l'élasticité de la corde soit $\alpha = 4,8 \cdot 10^{-5} \text{ N}^{-1}$.

ii. Pour $L = 10$ m et $f = 1$, l'élongation maximale est :

$$x_{\text{max}} = \alpha LP \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2f}{\alpha P}} \right) = 3,2 \text{ m}$$

et la force maximale vaut $F_{\text{max}} = 6,6$ kN.

iii. Ce cas apparaît catastrophique : la hauteur de chute est importante alors que la partie extensible de la corde est très

réduite. C'est pourtant ce qui est utilisé dans le cas d'une excursion en *via ferrata*, mais le dispositif d'assurance utilisé est alors tout particulièrement conçu pour ce genre d'expédition : la fixation au harnais est un amortisseur.

A.N. : $f = 5$, $L = 1$ m et $F_{\max} = 13,7$ kN.

b) Pour ce nouveau modèle, l'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x} = -F + P$$

où le second membre est constant, soit :

$$\frac{1}{2} m\dot{x}^2 + (F - P)x = \frac{1}{2} mv_0^2.$$

Il vient alors :

$$x_{\max} = \frac{mv_0^2}{2(F - P)} = L \frac{f}{\frac{F}{P} - 1}.$$

A.N. : $L = 10$ m et $f = 1$: $x_{\max} = 1$ m ;

$L = 1$ m et $f = 5$: $x_{\max} = 0,5$ m.

c) Le facteur de chute est :

$$f = \frac{\alpha F_{\max}(F_{\max} - 2P)}{2P}.$$

Pour $F = 12$ kN et $\alpha = 5 \cdot 10^{-6} \text{ N}^{-1}$, on a $f_{\max} = 0,39$.

4 Anneau en mouvement sur une hélice

Lors du mouvement de l'anneau, seul son poids travaille.

On peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique entre l'altitude H et l'altitude z .

$$\frac{1}{2} mv^2 = mg(H - z)$$

Sur l'hélice $\vec{OM} = a\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

$$\vec{v} = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = a\dot{\theta}\vec{u}_\theta + h\dot{\theta}\vec{u}_z$$

$$\vec{v}^2 = (a^2 + h^2)\dot{\theta}^2$$

Soit $\frac{1}{2} m(a^2 + h^2)\dot{\theta}^2 = mgh(2\pi - \theta)$

L'anneau part de $\theta = 2\pi$ et arrive en $\theta = 0$, donc $\frac{d\theta}{dt} < 0$.

$$\text{Soit } \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} \sqrt{2\pi - \theta}$$

$$\frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}} = -\sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} dt.$$

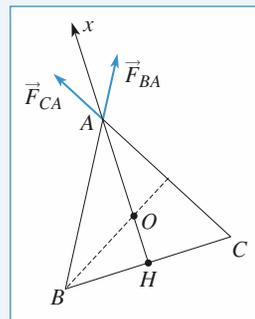
L'anneau atteint le sol pour $t = T$ avec

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2\pi - \theta}} = -\sqrt{\frac{2gh}{a^2 + h^2}} T.$$

$$T = 2\sqrt{\frac{\pi(a^2 + h^2)}{gh}}$$

5 Mouvement de trois électrons

Au cours du temps, les électrons restent positionnés sur un triangle équilatéral dont le centre de gravité O est immobile.



Posons $OA = x$. $OA = \frac{2}{3} AH = \frac{2}{3} AB \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$.

L'électron en A est soumis à deux forces : \vec{F}_{BA} de la part de l'électron en B et \vec{F}_{CA} de la part de l'électron en C de même norme.

$$\vec{F}_{BA} + \vec{F}_{CA} = 2 \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 AB^2} \cos \frac{\pi}{6} \vec{u}_x = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x^2 \sqrt{3}} \vec{u}_x.$$

Cette force globale dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ avec :

$$E_p(x) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{3}}.$$

Au cours de son mouvement, l'électron a une énergie mécanique constante.

$$E_M = \frac{1}{2} mv^2 + E_p(x) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x_0 \sqrt{3}} \text{ avec } x_0 = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} mv^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 x \sqrt{3}}.$$

La vitesse limite atteinte correspond à x infini.

$$v_{\text{lim}} = \frac{e}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 ma}}.$$

6 Mouvement d'un point sur un cercle, liaison bilatérale, puis unilatérale

1 • a) Le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre le point de départ (point le plus bas du cercle) et un point quelconque s'écrit $m \frac{v^2}{2} - m \frac{v_0^2}{2} = -mgy + R$.

b) La perle fait le tour complet de la gouttière si $v^2 > 0$ pour tout $y \in [-R; R]$ donc si $v_0 > 2\sqrt{gR}$.

Dans le cas contraire, la vitesse s'annule en $y_0 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g} - R$, et la perle oscille entre les deux points symétriques d'altitude y_0 .

c) La relation fondamentale de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$ avec $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$,

les forces étant :

$$\vec{P} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta \text{ et } \vec{N} = N \vec{e}_r$$

(la gouttière jouant le rôle de glissière, N est de signe quelconque). En projection sur \vec{e}_r , en utilisant $v = R\dot{\theta}$ et $y = -R \cos \theta$, on obtient :

$$N = - \left(mg \cos \theta + m \frac{v^2}{R} \right) = mg \frac{3y - 2y_0}{R}$$

Avec la convention choisie pour N , il est négatif au début du mouvement, puis change de signe en $y = \frac{2}{3}y_0$, et reste

positif tant que $y > \frac{2}{3}y_0$, ce qui n'a pas d'influence ici sur le mouvement de la perle car la gouttière assure toujours la liaison (liaison bilatérale).

d) Avec $v_0 = 2\sqrt{gR}$ le théorème de l'énergie cinétique devient $v^2 = 2g(R - y)$. En fonction de θ , on obtient :

$$(R\dot{\theta})^2 = 2gR(1 + \cos \theta) = 4gR \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right),$$

soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm 2 \sqrt{\frac{g}{R}} \left| \cos \left(\frac{\theta}{2} \right) \right|$$

Quand θ augmente de 0 à π :

$\cos \left(\frac{\theta}{2} \right) > 0$ et $\frac{d\theta}{dt} > 0$ donc, dans cette phase du mouvement :

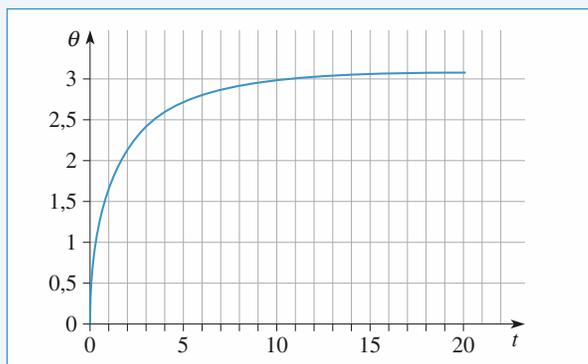
$$dt = \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{d \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)},$$

soit

$$t = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\theta \frac{d \left(\frac{\theta}{2} \right)}{\cos \left(\frac{\theta}{2} \right)} = \sqrt{\frac{R}{g}} \ln \left| \tan \left(\frac{\theta}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right|$$

Pour avoir $\theta(t)$, il suffit d'inverser cette expression :

$\theta = 4 \arctan \left(\exp \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t \right) \right) - \pi$. La valeur maximale de θ est π , le temps mis pour l'atteindre est infini.



2 • a) N s'annule pour $y_1 = \frac{2}{3}y_0 = \frac{1}{3} \frac{v_0^2}{g} - \frac{2}{3}R$. Ce point

appartient à la gouttière si, et seulement si, $y_1 \in [-R; R]$, soit $v_0^2 \leq 5gR$. Si $y_0 < 0$, la vitesse s'annule avant la réaction, si $y_0 > 0$, c'est la réaction qui s'annule en premier. Pour que la balle effectue le tour complet, il faut que $v_0^2 > 5gR$.

Conclusion

- Si $v_0 < \sqrt{2gR}$, le point P monte jusqu'en $y_0 < 0$, redescend tout en restant en contact avec la gouttière et revient vers son point de départ.

- Si $\sqrt{2gR} < v_0 < \sqrt{5gR}$, le point P quitte le contact en un point d'altitude $0 < y_1 < R$ et tombe.

- Si $v_0 > \sqrt{5gR}$, le point P fait le tour complet.

b) N s'annule en $y_1 = \frac{2}{3}R$. En reprenant le calcul de la ques-

tion 1) d), on obtient l'instant t_1 où cela se produit :

$$t_1 = \sqrt{\frac{R}{g}} \ln \left| \tan \left(\frac{\theta_1}{4} + \frac{\pi}{4} \right) \right|, \text{ où } \cos \theta_1 = -\frac{y_1}{R} = -\frac{2}{3}$$

on trouve $t_1 = 1,54 \sqrt{\frac{R}{g}}$.

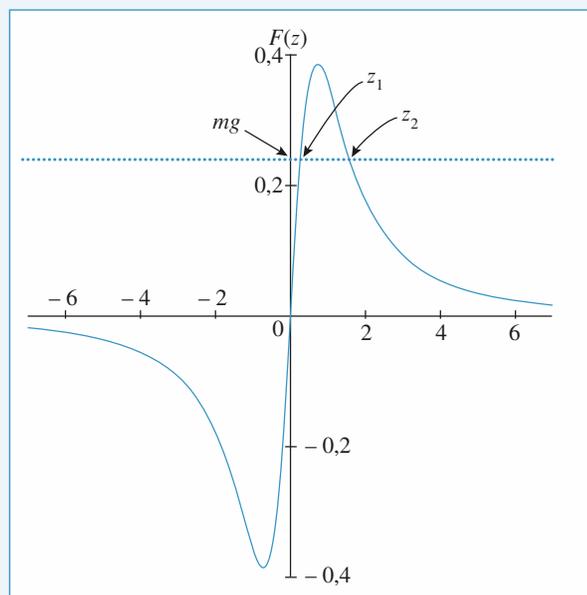
7 Mouvement d'une particule chargée sur un axe

1 • Force subie

a) Sachant que $\vec{F}(z) = \alpha q E_{\text{axe}}(z) \vec{e}_z$, on a :

$$F(z) = \alpha q \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

dont les variations sont représentées ci-après (doc. 1).



Doc. 1

b) L'équilibre peut être réalisé si la force $F(z)$ peut être compensée par l'effet du poids. On voit que la condition $mg = \alpha q \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$ peut être réalisée pour deux positions

d'équilibre z_1 et z_2 , à condition que la masse m soit inférieure

$$\text{à } m_{\max} = \frac{[F(z)]_{\max}}{g}.$$

La valeur maximale de $F(z)$ est obtenue pour $z = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

La condition d'existence des deux équilibres est donc :

$$m < m_{\max} = \frac{2\alpha q}{\frac{3}{3^{\frac{3}{2}}} g R^2}.$$

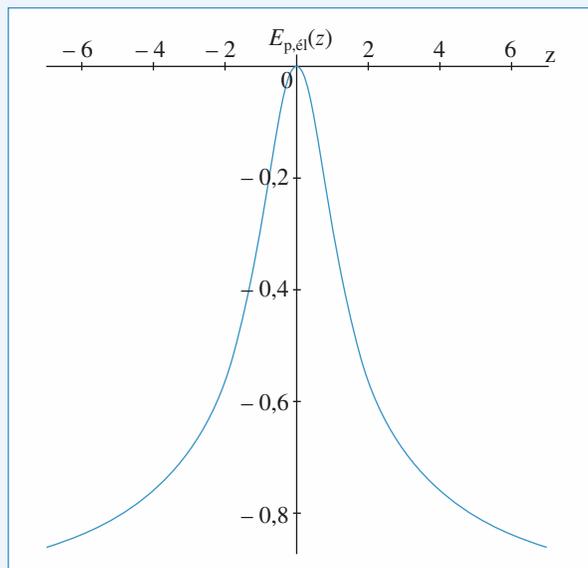
2 • Équilibre

a) L'énergie potentielle $E_{p,\text{él}}(z)$ associée aux efforts électrostatiques est donnée par :

$$\frac{dE_{p,\text{él}}}{dz} = -F(z) = -\alpha q \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\text{soit : } E_{p,\text{él}}(z) = +\alpha q \frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} + \text{cte},$$

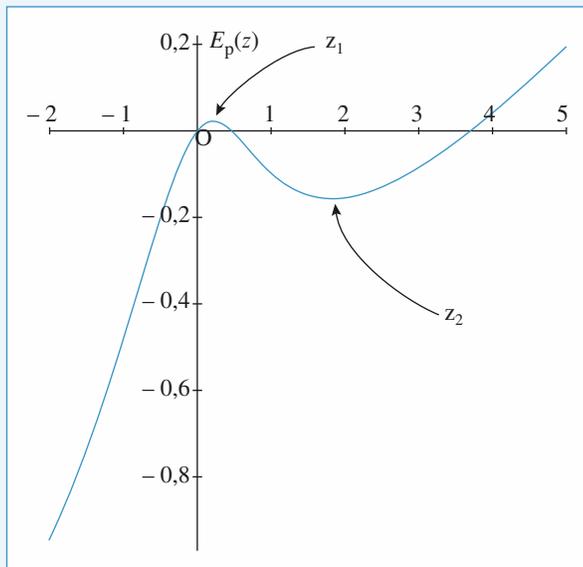
en prenant la constante de façon à avoir $E_{p,\text{él}}(0) = 0$, on obtient les variations suivantes (doc. 2), où on observe naturellement l'effet répulsif du cerceau sur la petite sphère (les deux portent des charges de même signe) : la force électrique est orientée dans le sens décroissant de l'énergie potentielle, et tend à éloigner la sphère du point O .



Doc. 2

En ajoutant l'énergie potentielle de pesanteur, l'origine de l'énergie potentielle étant prise en $z = 0$, il vient :

$$E_p(z) = \alpha q \left(\frac{1}{(R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) + mgz - \frac{\alpha q}{R}.$$



Doc. 3

On retrouve les positions d'équilibre z_1 et z_2 rendant l'énergie potentielle stationnaire :

– en z_1 l'énergie potentielle passe par un maximum (local) : l'équilibre est instable,

– en z_2 l'énergie potentielle passe par un minimum (local) : l'équilibre est stable.

b) Au voisinage de $z_e = z_2$, notons $z = z_2 + \varepsilon$ et tentons une linéarisation de l'équation du mouvement :

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = F(z_e + \varepsilon) - mg = [F(z_e) - mg] + \varepsilon \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_2} + \dots$$

où le terme d'ordre 0 est nul par définition de l'équilibre. On obtient une équation d'oscillateur harmonique :

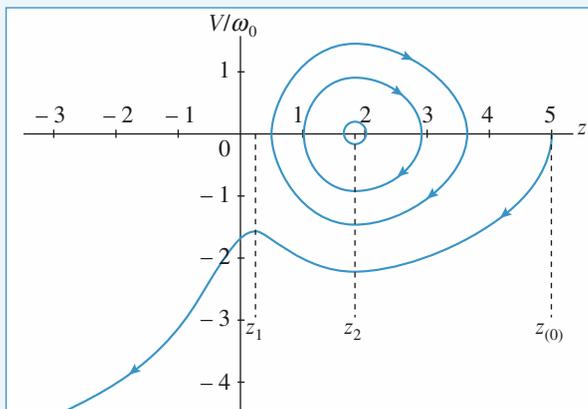
$$\frac{d^2 \varepsilon(\tau)}{d\tau^2} = -\omega_0^2 \varepsilon,$$

où la pulsation est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-1}{m} \left(\frac{dF}{dz} \right)_{z_e=z_2}} = \sqrt{\frac{\alpha q (2z_e^2 - R^2)}{m(z_e^2 + R^2)^{\frac{5}{2}}}}.$$

3 • a) Pour les trajectoires de phases fermées, qui correspondent à des mouvements périodiques, les conditions initiales sont sans importance. Pour la trajectoire non fermée, qui part sur l'axe (Oz) du plan de phase, la petite sphère a été lâchée sans vitesse initiale.

Le sens d'évolution s'obtient sachant que z augmente lorsque le point de phase est au-dessous de (Oz) car la vitesse est négative, et que z diminue si le point est au-dessus de (Oz) (doc. 4).



Doc. 4

b) Les trajectoires fermées correspondent à des oscillations autour de la position d'équilibre stable $z = z_2$. Notons que la plus petite trajectoire correspond pratiquement à un cercle : l'approximation linéaire, donnant des oscillations harmoniques, est ici satisfaisante.

Pour la trajectoire non bouclée, l'énergie mécanique est suffisante pour passer la bosse d'énergie potentielle en $z = z_1$. Dans un premier temps, z varie de $z(0)$ à z_2 ; l'énergie potentielle diminue et l'énergie cinétique augmente : la trajectoire s'éloigne de (Oz) . Pour z diminuant de z_2 à z_1 , l'énergie potentielle augmente, l'énergie cinétique diminue : la trajectoire revient vers l'axe (Oz) , mais ne le touche pas : la petite sphère n'atteint pas l'abscisse z_1 avec une vitesse non nulle. Au-delà, elle poursuit sa chute en accélérant.

8 Navire à moteur (Banque G2E08)

1 • La puissance fournie par le moteur compense exactement la puissance de la force de frottement lorsque le bateau avance à vitesse constante.

$$P_M - kv_0^3 = 0.$$

Numériquement :

$$v_0 = 15 \text{ nœuds} = 7,7 \text{ ms}^{-1}.$$

$$k = 1,09 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-2} \text{ s}^2.$$

2 • Quand le navire stoppe ses machines, il continue sa route selon la direction de \vec{v}_0 .

$$\text{Soit } \vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x.$$

En projection sur \vec{e}_x , dans le référentiel lié au port, le principe fondamental de la dynamique appliqué au bateau s'écrit :

$$m \frac{dv}{dt} = -kv^2.$$

$$\text{En posant } L = \frac{m}{k}, \text{ il vient } \frac{dv}{v^2} = -\frac{dt}{L}.$$

$$\text{Soit } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{v} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{t}{L} \right) \text{ et } \frac{1}{v} - \frac{1}{v_0} = \frac{t}{L} \text{ en tenant compte}$$

des conditions initiales.

$$v = \frac{v_0 L}{L + v_0 t}$$

$$3 \bullet \text{ On a donc : } \frac{dx}{dt} = \frac{v_0 L}{L + v_0 t} \quad dx = \frac{v_0 L}{L + v_0 t} dt.$$

$$\text{Soit } x = +L \ln(L + v_0 t) + k.$$

$$\text{À } t = 0, x = -X \text{ donne } k = -L \ln L - X.$$

$$\text{Donc } x(t) = L \ln \left(1 + \frac{v_0 t}{L} \right) - X = L \ln \frac{v_0}{v(t)} - X.$$

$$\text{On atteint la passe pour } x = 0 \text{ avec } v_p = v_0 \exp \left(\frac{-X}{L} \right).$$

$$\text{Si } v_p = 2 \text{ nœuds } X = L \ln \frac{v_0}{v_p} \approx 1850 \text{ m} \approx 1 \text{ mille nautique.}$$

$$4 \bullet \theta = L \left(\frac{1}{v_p} - \frac{1}{v_0} \right) = 773 \text{ s.}$$

$$5 \bullet x_Q = +926 \text{ m} = L \ln \frac{v_0}{v_Q} - X.$$

$$v_Q = 0,73 \text{ nœud} = 0,37 \text{ ms}^{-1}.$$

6 • Pour arrêter le bateau en urgence, il faut remettre les moteurs en marche et faire machine arrière.

9 Étude d'un looping (d'après ICNA06)

1 • La bille est en mouvement dans un référentiel galiléen.

En lui appliquant le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et O, il vient :

$$E_C(O) - E_C(A) = W_{\text{poids}} + W_{\text{réaction}}.$$

Puisqu'il n'y a pas de frottements, le travail de la réaction, orthogonale au déplacement, est nul.

$$W_{\text{poids}} = mg(y_A - y_O) = mgh.$$

$$\text{Donc } \frac{1}{2} m v_O^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = mgh \text{ avec } v_A = 0.$$

$$v_O = \sqrt{2gh}.$$

2 • En un point M tel que $y_M = a(1 - \cos \theta)$, on obtient :

$$\frac{1}{2} m v_M^2 = mg(y_A - y_M) = mg(-a + h + a \cos \theta).$$

$$v_M = [2g(a \cos \theta - a + h)]^{1/2}$$

3 • Sur le guide circulaire, les forces appliquées à m sont le poids et la réaction $R \vec{e}_r$.

$$m \vec{a}(M) = m \vec{g} + R \vec{e}_r$$

$$\text{Soit } m(-a\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + a\ddot{\theta} \vec{e}_\theta) = m \vec{g} + R \vec{e}_r. \quad (1)$$

En projection sur \vec{e}_θ , l'équation (1) donne :

$$ma\ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

On multiplie par $\dot{\theta}$.

$$a\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g \sin \theta \dot{\theta}$$

$$a \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = \frac{d}{dt} (g \cos \theta).$$

$$\text{Soit } \frac{1}{2} a \dot{\theta}^2 = g \cos \theta + k.$$

$$\text{En } \theta = 0, v_0 = a \dot{\theta} = \sqrt{2gh}.$$

$$\text{D'où } \frac{1}{2} \frac{2gh}{a} = g + k. \quad k = g \left(\frac{h}{a} - 1 \right).$$

$$a \dot{\theta}^2 = 2g \cos \theta + 2g \left(\frac{h}{a} - 1 \right).$$

En projection sur \vec{e}_r , l'équation ① donne :

$$R = -m a \dot{\theta}^2 - mg \cos \theta.$$

$$R = -3mg \cos \theta + 2mg \left(1 - \frac{h}{a} \right).$$

b) La bille peut parcourir le guide en entier si R reste négative sur tout le parcours.

$$\text{Soit } 2 - \frac{2h}{a} \leq 3 \cos \theta.$$

$$\text{En } \theta = \pi, \text{ on obtient } 2 - \frac{2h_{\min}}{a} = -3$$

$$h_{\min} = \frac{5}{2} a.$$

5 • Avec $h = h_0 = 2a$, R s'annule pour :
 $-3mg \cos \theta_0 + 2mg(1 - 2) = 0$

$$\cos \theta_0 = -\frac{2}{3}. \quad \theta_0 = 131,8^\circ.$$

6 • À ce moment-là, $\vec{v} = a \dot{\theta} \vec{u}_{\theta_0}$

$$\text{avec } \dot{\theta} = \left(\frac{2g}{a} \cos \theta_0 + \frac{2g}{a} \right)^{1/2}$$

$$\dot{\theta} = \left(\frac{2g}{3a} \right)^{1/2}.$$

$$\text{Soit } v_{0_x} = a \left(\frac{2g}{3a} \right)^{1/2} \cos \theta_0 = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{2ga}{3}}.$$

7 • Le mouvement se fait alors sous l'action du poids seul, v_{0_x} reste inchangée.

h_M est atteint lorsque la vitesse verticale v_z s'annule.

$$\frac{1}{2} m v_M^2 - \frac{1}{2} m v_{\theta_0}^2 = mg(h_{\theta_0} - h_M), \text{ avec } v_M = v_{0_x}.$$

$$\text{Soit } h_M = h_{\theta_0} + \frac{v_{\theta_0}^2}{2g} - \frac{v_{0_x}^2}{2g}$$

$$h_M = a(1 - \cos \theta_0) + \frac{a^2}{2g} \left(\frac{2g}{3a} \right) - \frac{4}{27} a.$$

$$h_M = \frac{50}{27} a.$$

LES OBJECTIFS

- Connaître la réponse d'un oscillateur à différents types d'excitation.

LES PRÉREQUIS

- Lois de Newton.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Résolution des équations différentielles du deuxième ordre à coefficients constants.
- Notation complexe.
- Calculs sur les nombres complexes.

ESSENTIEL

◀ Oscillateur harmonique

Un oscillateur harmonique est un système à un degré de liberté dont l'équation du mouvement est de la forme $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$, quelle que soit la nature physique de la variable x . Il est soumis à une force de rappel $f = -kx$ qui dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(x) = \frac{kx^2}{2}$. Il effectue des oscillations iso-

chrones de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et de période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. L'énergie mécanique de l'oscillateur harmonique se conserve.

◀ Oscillateur amorti par frottements visqueux

Sous l'effet d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\vec{e}_x$, l'équation du mouvement de l'oscillateur est $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $2\alpha = \frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, Q est le *facteur de qualité de l'oscillateur*.

- Si $\alpha > \omega_0$ ou $Q < 1/2$: le mouvement est apériodique.
- Si $\alpha = \omega_0$ ou $Q = 1/2$: le mouvement est critique.
- Si $\alpha < \omega_0$ ou $Q > 1/2$: le mouvement est pseudo-périodique (la solution est le produit d'une exponentielle et d'une sinusoïde) de pseudo-période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ avec } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Pour les faibles amortissements ($\alpha \ll \omega_0$ ou $Q \gg 1$), la variation relative de l'énergie mécanique

au cours d'une pseudo-période est $\frac{\Delta \mathcal{E}_M}{\mathcal{E}_M} = -\frac{2\pi}{Q}$, ou encore $Q = 2\pi \left| \frac{\mathcal{E}_M}{\Delta \mathcal{E}_M} \right|$ (voir exercice 2).

• Oscillations forcées

L'oscillateur précédent est soumis à une force excitatrice $\vec{F}_A = F_A(t)\vec{e}_x$. L'équation du mouvement est alors :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_A(t)}{m}.$$

La solution de cette équation est de la forme $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$, où $x_0(t)$ est la solution générale de l'équation homogène associée (régime libre) et $x_1(t)$ une solution particulière (régime forcé). L'oscillateur étant amorti, le régime libre tend vers 0 quand t augmente. Au bout d'un certain temps, seul subsiste le régime forcé. On appelle régime transitoire le régime représenté par $x(t)$ tant que $x_0(t)$ n'est pas négligeable devant $x_1(t)$.

Quand plusieurs excitations agissent sur un oscillateur linéaire, la réponse de celui-ci est la somme de ses réponses à chacune des excitations prises isolément.

• Résonances

L'oscillateur est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω :

$$F_A(t) = m\omega_0^2 x_{A_m} \cos \omega t.$$

La réponse en régime forcé (ou régime permanent) est de la forme $x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi)$, où x_m et φ dépendent de ω .

On utilise alors les grandeurs complexes associées aux grandeurs sinusoïdales : à la grandeur $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la grandeur complexe $\underline{u}(t) = U_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{U}_m e^{j\omega t}$, où $\underline{U}_m = U_m e^{j\varphi}$ est l'amplitude complexe de $u(t)$. On obtient $u(t)$ en prenant la partie réelle de $\underline{u}(t)$ et l'amplitude réelle U_m en prenant le module de \underline{U}_m .

L'amplitude $x_m(\omega)$ passe par un extremum pour $\omega = 0$. Il y a une résonance d'élongation (autre extremum de $x_m(\omega)$) si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette résonance a lieu pour $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$. Si l'amortissement est faible, $\omega_r \approx \omega_0$ et l'amplitude maximale X_m est égale à Qx_{A_m} . Le système effectue un filtrage passe-bas ou passe-bande pour sa réponse en élongation, selon que $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ ou $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Il y a une résonance de vitesse pour $\omega = \omega_0$ quelle que soit la valeur du facteur de qualité. L'amplitude de la vitesse à la résonance est $V_{\max} = Q\omega_0 x_{A_m}$. Le système effectue un filtrage passe-bande pour sa réponse en vitesse. La bande passante $\Delta\omega$ à 3 dB est la bande de pulsation à l'intérieur de laquelle l'amplitude de la vitesse satisfait à l'inégalité $V_m(\omega) > \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$.

La bande passante (pour la vitesse) et le facteur de qualité sont reliés par l'équation $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q}$.

Le calcul de la bande passante pour l'élongation (quand il y a une résonance) est beaucoup plus lourd. Cependant, dans le cas d'un amortissement faible ($Q \gg 1$), on retrouve la même relation.

Conseils et pièges à éviter

- Les oscillations harmoniques (amorties ou non) n'existent pas qu'en mécanique; il faut bien connaître les propriétés des solutions.

- Bien connaître les solutions quelle que soit l'écriture de l'équation :

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

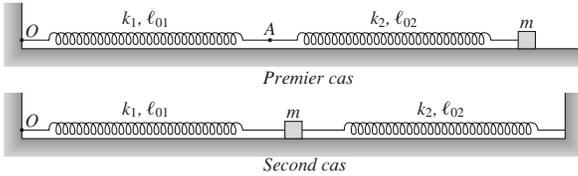
$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$$

avec Q facteur de qualité de l'oscillateur.

- Pour les oscillations forcées, elles sont ici toujours sinusoidales ; si le terme forcé n'est pas sinusoidal, mais périodique, penser à la décomposition de l'excitation en série de Fourier et faire la somme des solutions car l'équation différentielle est linéaire.

1 *Associations de ressorts

Une masse m est reliée de deux façons différentes à deux ressorts de raideur k_1 et k_2 , de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02} :



Montrer que la masse décrit un mouvement harmonique

de période $T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}$ dans le premier cas, et

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}$ dans le second cas.

En déduire la raideur du ressort équivalent à l'ensemble dans chacun des deux cas. Commenter.

Conseils

Dans les deux cas, appliquer la relation fondamentale de la dynamique, projetée sur l'axe (Ox) , à la masse m , et la mettre sous la forme $m\ddot{x} = -K(x - \ell_0)$. Faire attention au signe dans l'expression des forces de rappel des ressorts.

Dans le premier cas, pour exprimer la longueur du deuxième ressort en fonction de x , appliquer la relation fondamentale de la dynamique au point *sans masse* A (point d'attache des ressorts).

2 Oscillateur amorti de facteur de qualité élevé

Un oscillateur harmonique perd 5 % de son énergie mécanique par pseudo-période.

1 • De quel pourcentage sa pseudo-fréquence diffère-t-elle de sa fréquence propre f_0 ? Estimer le facteur de qualité Q de l'oscillateur.

2 • Après combien de pseudo-périodes son amplitude sera-t-elle égale à $\frac{1}{e}$ de sa valeur initiale ?

3 • Après Q pseudo-périodes, quelle est l'amplitude d'oscillation ?

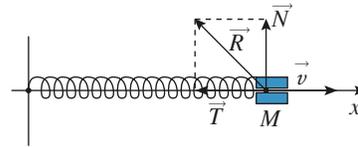
Conseils

Voir l'Essentiel sur l'oscillateur amorti.

Déterminer la valeur du facteur de qualité.

L'amortissement pourra être considéré comme faible, ce que l'on vérifiera avec les résultats obtenus.

3 *Oscillateur harmonique amorti par frottement solide



On considère un oscillateur harmonique constitué par un point matériel de masse m assujéti à se déplacer en glissant sur l'axe (Ox) , rappelé vers la position d'équilibre $x = 0$ par un ressort de raideur k .

Le glissement sur la tige matérialisant l'axe (Ox) s'accompagne d'un frottement. Ainsi, la réaction \vec{R} du support se décompose en une composante normale \vec{N} (qui compense ici le poids) et une composante tangentielle \vec{T} .

On supposera ce frottement entre solide décrit par les lois suivantes :

– le point M peut être maintenu en place par l'existence de la réaction tangentielle \vec{T} , à condition que celle-ci reste limitée par l'inégalité : $\|\vec{T}\| < f\|\vec{N}\|$;

– si cette condition n'est pas réalisable, alors le point M glisse, et le frottement est régi par la loi de Coulomb : \vec{T} est opposée au glissement, et $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

1 • Quelle est la dimension du coefficient de frottement solide f ?

2 • Le point M étant maintenu immobile à l'abscisse x_0 , à quelle condition peut-il y rester si on le libère ?

3 • On suppose cette condition non réalisée, le point M se mettant à glisser dans le sens des x décroissants. Étudier le mouvement du point M jusqu'à ce qu'il s'arrête pour la première fois. Préciser l'abscisse x_1 correspondante.

4 • Si le point M ne peut se maintenir immobile en x_1 , que se passe-t-il ensuite ?

5 • Généraliser les résultats précédents pour décrire complètement le mouvement du point M . Représenter son évolution $x = f(t)$ au cours du temps, et donner l'allure de sa trajectoire de phase.

Conseils

Les lois du frottement solide sont non linéaires. On étudiera alors les cas suivants :

- soit la vitesse est nulle et il faut vérifier si le mobile est en équilibre ;
- soit la vitesse est non nulle, le signe de la vitesse permet alors de définir complètement la force de contact.

4 Pendule simple amorti

D'après Mines d'Albi, Douai, Nantes.

On considère un objet M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\vec{g} = g\vec{e}_x$ avec $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, \vec{e}_x étant un vecteur unitaire de l'axe (Ox) vertical descendant. On note θ l'angle orienté $(\overline{Ox}, \overline{OM}) = (\vec{e}_x, \vec{u})$ ou \vec{u} est le vecteur unitaire colinéaire au vecteur \overline{OM} .

Lorsqu'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$, où \vec{v} désigne la vitesse du point M et α une constante positive.

1 • Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ . En se limitant aux petits angles, écrire l'équation

$$\text{tion sous la forme } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau} \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0.$$

Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

2 • À quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ? Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T .

On appelle décrément logarithmique δ la quantité :

$$\ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) \text{ où } T \text{ est la pseudo-période et } t \text{ le temps.}$$

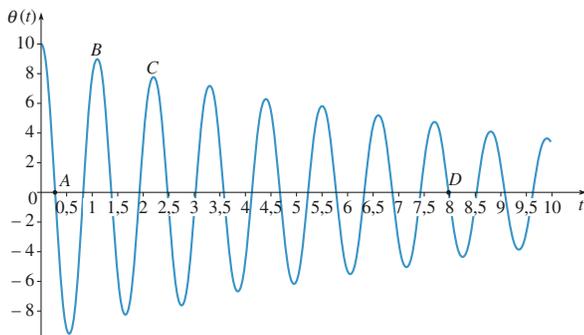
Exprimer δ en fonction de T et τ .

3 • La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps. On précise les coordonnées de quatre points particuliers :

points	A	B	C	D
t (s)	0,248	1,10	2,20	8,00
θ (°)	0,00	8,95	8,02	0,00

La masse m est égale à 470 g. Calculer numériquement, à partir de ces valeurs, sans oublier les unités :

- a) le décrément logarithmique δ ; b) la pseudo-période T ;
- c) le temps τ ; d) la constante α .



Conseils

Appliquer le théorème du moment cinétique en O ou la relation fondamentale de la dynamique projetée sur la tangente au mouvement (pour éliminer \vec{T}).

5 Modélisation d'un oscillateur

D'après Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes, 2008.

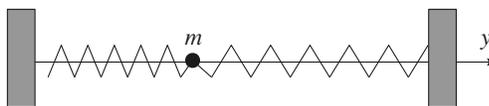
Soit un point matériel de masse m , en mouvement dans le champ de pesanteur g uniforme.

1 • Étude énergétique d'un oscillateur

a) Définir l'énergie potentielle associée à une force \vec{F} . Pour une force de rappel élastique de constante k , déterminer l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'écart x à la position d'équilibre, à une constante additive près.

b) On considère un mouvement conservatif de m sur l'axe horizontal Oy , autour d'une position d'équilibre Y_0 , avec l'énergie potentielle $E_p(y) = E_0 + \alpha \cdot (y - Y_0)^2$, où α est une constante positive. Établir l'équation différentielle du mouvement et en déduire qu'il s'agit d'oscillations harmoniques dont on précisera l'expression de la période.

c) Application : considérons le dispositif horizontal de la figure suivante.



Les ressorts sont identiques, de raideur k et de longueur à vide L_0 , tandis que les points d'attache sont distants de $2L_0$.

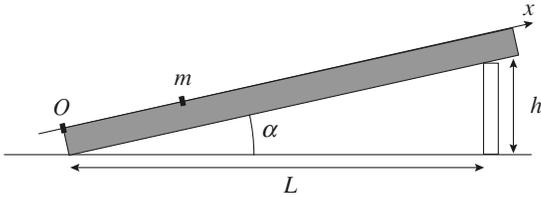
Exprimer $E_p(y)$ si y désigne l'écart à la position d'équilibre, et calculer la période T_0 des oscillations de m si $m = 200 \text{ g}$ et $k = 40 \text{ N/m}$.

d) On envisage l'existence d'un frottement fluide d'intensité proportionnelle à la vitesse de m par rapport à l'axe du mouvement : $\vec{F} = -\beta \cdot m \cdot \vec{v}$ où β est une constante positive. Donner la dimension ou l'unité SI de β .

e) Établir l'équation différentielle du mouvement. Quelle est la valeur numérique maximale de β permettant les oscillations de m ?

2 • Modélisation d'un dispositif expérimental

a) On dispose d'un banc à coussin d'air rectiligne (Ox), incliné par une cale de hauteur h d'un angle α par rapport à l'horizontale, selon la figure ci-dessous. Sur ce banc, un aimant est fixé à l'origine O , et un autre aimant, de masse m , est fixé sur un palet mobile sans frottement :



Les aimants sont orientés de telle sorte qu'ils se repoussent mutuellement. La possibilité pour m d'osciller autour d'une position d'équilibre résulte de la compétition entre la répulsion électromagnétique, réduite à une force notée \vec{F} , prépondérante lorsque les aimants sont proches, et le poids, qui devient prépondérant lorsque la distance augmente.

Faire un bilan des forces à l'équilibre sur un schéma.

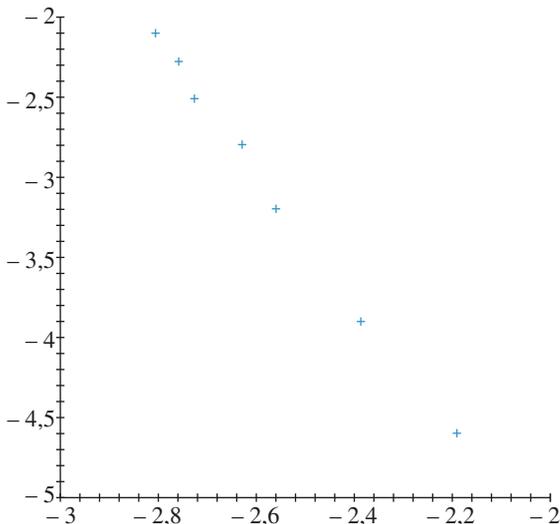
b) Sans connaissances préalables en électromagnétisme, on cherche dans la suite à vérifier si la force électromagnétique agissant dans cette expérience peut être modélisée par une loi de la forme : $\vec{F}(x) = k(x_0/x)^n \vec{e}_x$, avec $k > 0$ et n entier naturel. Exprimer dans cette hypothèse la position d'équilibre x_e en fonction de x_0, k, m, g, L, h et n dans le cas des petits angles ($h \ll L$).

NB : cette approximation sera toujours utilisée dans la suite.

c) On mesure x_e pour différentes cales, puis on représente $\ln(h)$ en fonction de $\ln(x_e/x_0)$. En prenant $x_0 = 1$ m, déduire des mesures ainsi représentées ci-dessous les valeurs de n et de k .

On donne : $L = 120$ cm ; $m = 189$ g ; $g = 9,81$ m.s⁻².

$\ln(h)$ en fonction de $\ln\left(\frac{x_e}{x_0}\right)$



Valeurs correspondantes :

$\ln\left(\frac{x_e}{x_0}\right)$	$\ln(h)$
-2,19	-4,61
-2,39	-3,91
-2,56	-3,22
-2,63	-2,81
-2,73	-2,53
-2,76	-2,30
-2,81	-2,12

d) Exprimer littéralement l'énergie potentielle totale $E_p(x)$ de m , à une constante additive près, en fonction de x, x_0, k, m, h, g, L et n , puis en fonction de x, x_0, x_e, k et n seulement.

e) Lorsqu'on se limite à des oscillations de faible amplitude autour de la position d'équilibre, on rappelle qu'on peut utiliser pour l'énergie potentielle un développement de Taylor d'ordre 2 :

$$E_p(x) \approx E_p(x = x_e) + \frac{(x - x_e)^2}{2} \left(\frac{d^2 E_p}{dx^2} \right)_{x=x_e}$$

En déduire une expression de $E_p(x \approx x_e)$ sous la forme :

$$\frac{1}{2} K (x - x_e)^2 + cste ; \text{ le détail de la constante additive}$$

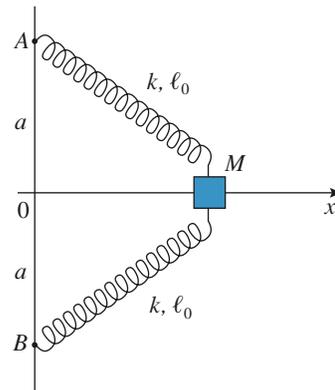
n'est pas demandé, mais on exprimera la constante K en fonction de x_e, x_0, k et n .

f) Justifier qu'au voisinage de l'équilibre, la résultante des forces subies par m équivaut à une force de rappel élastique dont on précisera la constante de raideur équivalente.

g) Toutes choses égales par ailleurs, montrer que la période T des petites oscillations autour de l'équilibre est proportionnelle à une puissance de h que l'on déterminera ; en déduire une méthode de mesure de n que l'on décrira succinctement.

6 *Portrait de phase d'un oscillateur pas toujours harmonique

Les deux ressorts sont identiques, ils possèdent une raideur k et une longueur à vide ℓ_0 . Le point M , de masse m , est mobile sans frottements sur l'axe horizontal (Ox) (doc. 1).



Doc. 1

1 • Montrer que l'énergie potentielle du point est :

$$\mathcal{E}_p = kx^2 - 2k\ell_0 \sqrt{a^2 + x^2} + 2k\ell_0 a$$

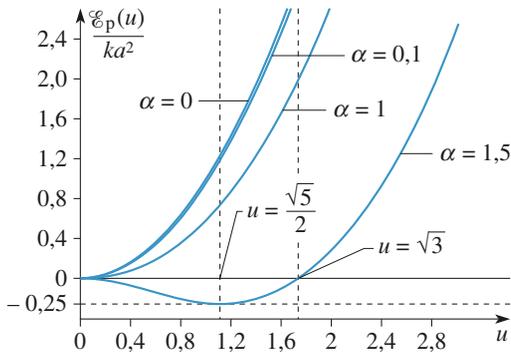
si on impose $\mathcal{E}_p(0) = 0$.

On donne (doc. 2) la courbe représentative de $\frac{\mathcal{E}_p(u)}{ka^2}$, où :

$$u = \frac{x}{a}, \text{ pour différentes valeurs de } \alpha = \frac{\ell_0}{a} :$$

$$\alpha = 0, \alpha = \frac{1}{10}, \alpha = \frac{1}{2}, \alpha = 1 \text{ et } \alpha = 1,5.$$

Commenter.



Doc. 2

2 • On pose $\Omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ et $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$. En prenant comme

nouvelle unité de temps T_0 , montrer que l'équation différentielle d'évolution de u s'écrit :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 4\pi^2 u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}} \right) = 0$$

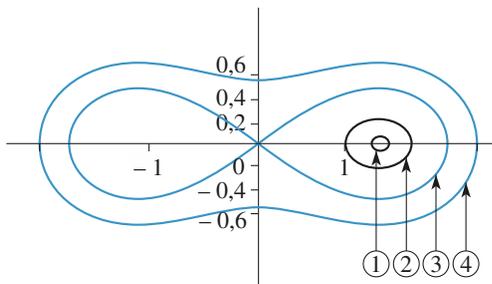
3 • On propose les portraits de phase dans le plan $(u, \frac{\dot{u}}{2\pi})$.

correspondant à différentes valeurs du rapport $\alpha = \frac{\ell_0}{a}$.

a) Étude de la courbe pour $\alpha = 1,5$

Les conditions initiales choisies sont $\dot{u}(0) = 0$ et $u(0) \neq 0$. Commenter les mouvements décrits par ces trajectoires dans le plan de phase (doc. 3) (on se limitera aux courbes (1), (2), (3) et (4)) et les évolutions de $u(t)$ (doc. 4) ; faire le lien avec la courbe $\mathcal{E}_p(u)$.

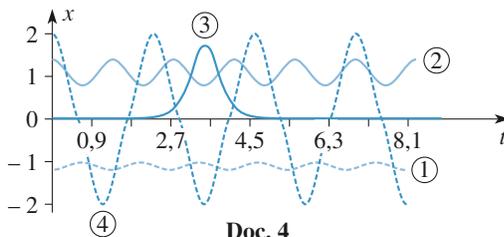
Placer les positions d'équilibre sur le plan de phase. Que peut-on dire du point $(0, 0)$?



Doc. 3

Portrait de phase de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 4\pi^2 u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}} \right) = 0.$$



Doc. 4

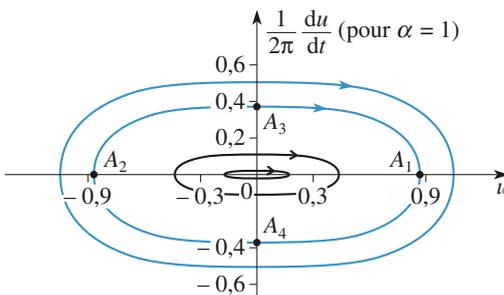
Diverses solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -4\pi^2 u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}} \right) \text{ avec } \alpha = 1,5 \text{ pour } \dot{x} = 0$$

et $x(0) = 2$; $x(0) = 1,4$; $x(0) = \varepsilon$; $x(0) = -1,2$.

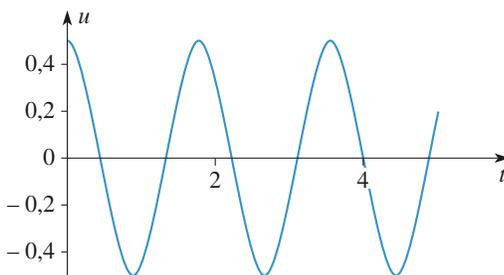
(4) (2) (3) (1)

b) Étude de la courbe pour $\alpha = 1$



Doc. 5

Portrait de phase avec $\alpha = 1$.



Doc. 6

Solution de l'équation différentielle pour $\alpha = 1$.

Expliquer pourquoi la *document 5* prouve que les oscillations ne sont pas harmoniques.

On donne la courbe $u(t)$ (*doc. 6*) pour les conditions initiales $u(0) = 0,5$ et $\dot{u}(0) = 0$.

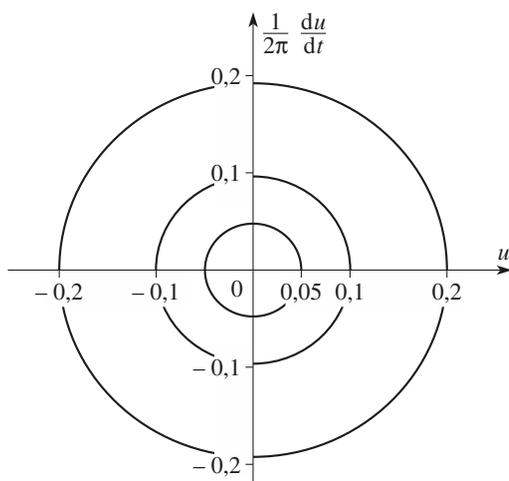
Placer les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sur cette dernière figure.

c) Étude de la courbe pour $\alpha = 0,1$

Commenter et expliquer le caractère harmonique ou non des petits mouvements (les courbes tracées sur la *document 7* correspondent aux conditions initiales $u(0) = 0,05, 0,1$ et $0,2$, la vitesse initiale étant toujours nulle. Existe-t-il ici une trajectoire frontière comme pour la courbe correspondant à $\alpha = 1,5$? Pourquoi ?

Données : On rappelle que :

$$(1+x)^2 = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2, \text{ pour } x \ll 1.$$



Doc. 7

Portrait de phase de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\pi^2u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}}\right) = 0 \quad \text{avec } \alpha = 0,1.$$

Conseils

- 1) Utiliser l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort.
- 2) Les trajectoires de phase entourent-elles un ou plusieurs positions d'équilibre ? Sont-elles elliptiques (ou circulaires suivant les variables choisies en abscisses et en ordonnées) ? Une trajectoire de phase peut-elle former un 8 ?

Pour un système conservatif, les trajectoires de phase sont des trajectoires isoénergétiques, ce qui permet de faire le lien avec la courbe $\mathcal{E}_p(x)$ (on rappelle que $\mathcal{E}_p(x) \leq \mathcal{E}_M$, car \mathcal{E}_K est ≥ 0).

7 Étude de la suspension d'un véhicule

D'après Mines d'Alès, Albi, Douai, Nantes, 2006.

Le véhicule étudié est modélisé par un parallélépipède, de centre de gravité G et de masse M , reposant sur une roue par l'intermédiaire de la suspension dont l'axe OG reste toujours vertical.

L'ensemble est animé d'une vitesse horizontale $\vec{v} = v\vec{u}_x$.

La suspension, quant à elle, est modélisée par un ressort de raideur constante $k = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ (de longueur à vide l_0) et un amortisseur fluide de constante d'amortissement constante $\lambda = 4,0 \cdot 10^3 \text{ U.S.I.}$ La masse de l'ensemble est $M = 1\,000 \text{ kg}$.

La position verticale du véhicule est repérée par z_G dans le référentiel galiléen proposé ayant son origine sur la ligne moyenne des déformations du sol. On note z_0 la cote du centre de la roue par rapport au niveau moyen de la route.

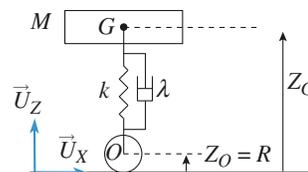


Fig. 1

La route est parfaitement horizontale.

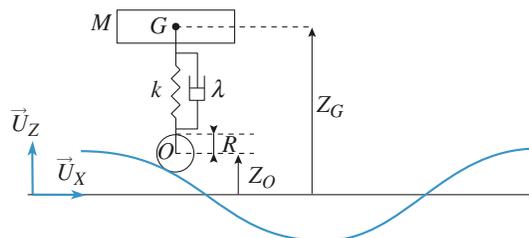


Fig. 2

La route est ondulée.

L'amortissement entre M et la roue introduit une force de frottement fluide, exercée par l'amortisseur sur M , qui s'écrit :

$$\vec{F} = -\lambda \cdot \left(\frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_0}{dt} \right) \cdot \vec{u}_z$$

1 • La route est parfaitement horizontale (fig. 1)

1.1. La route ne présente aucune ondulation et le véhicule n'a aucun mouvement vertical. Déterminer la position $z_{G_{eq}}$ de G lorsque le véhicule est au repos.

1.2. Suite à une impulsion soudaine, le véhicule acquiert un mouvement d'oscillations verticales. On cherche dans cette question à établir l'équation différentielle caractéristique du mouvement par une méthode énergétique.

On étudie le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment. On posera $z = z_G - z_{G_{eq}}$.

1.2.a) Établir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.

1.2.b) Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique.

Les énergies potentielles seront exprimées en fonction de z et à une constante additive près.

1.2.c) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la masse et en déduire l'équation différentielle en z caractéristique du mouvement.

1.2.d) Dessiner, qualitativement, les allures envisageables de la fonction $z(t)$. (la résolution de l'équation différentielle n'est pas demandée).

2 • La route est ondulée (fig. 2)

Le véhicule se déplace à la vitesse horizontale v sur un sol ondulé. L'ondulation est assimilée à une sinusoïde de période spatiale L et d'amplitude A . z_0 peut alors s'écrire $z_0 = R + A \cos \omega t$.

On étudie maintenant le mouvement par rapport à la position d'équilibre établie précédemment.

On posera $z = z_G - z_{G_{eq}}$.

Pour les applications numériques on prendra $L = 1 \text{ m}$; $A = 10 \text{ cm}$.

2.1. Quelle est l'unité de λ ?

2.2. Exprimer ω en fonction de v et L . Vérifier l'homogénéité du résultat.

2.3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse M dans le référentiel terrestre supposé galiléen, établir l'équation différentielle en z régissant le mouvement.

2.4. Justifier qualitativement le fait que l'on recherche la solution $z(t)$ de cette équation différentielle sous une forme sinusoïdale $z(t) = z_{\max} \cdot \cos(\omega t + \phi)$.

2.5. Résolution par la méthode des complexes

On pose $\underline{z} = \underline{Z} \cdot e^{j\omega t}$, réponse complexe du véhicule à l'excitation sinusoïdale et $\underline{z}_0 - R = \underline{A} e^{j\omega t}$.

2.5.a) Montrer que $\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{\left(\frac{k}{M} + j\frac{\omega\lambda}{M}\right)}{\left(-\omega^2 + j\omega\frac{\lambda}{M} + \frac{k}{M}\right)}$ avec j le

complexe tel que $j^2 = -1$ puis que l'on peut mettre sous la

forme $\frac{\underline{Z}}{\underline{A}} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} = \frac{H_1}{H_2}$; Exprimer alors ω_0 ,

ω_1 et Q en fonction de k , λ et M .

2.5.b) Calculer numériquement ω_0 , ω_1 et Q . N'oubliez pas les unités.

2.5.c) Donner l'expression du module $\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}\right|$ en fonction de ω_0 , ω_1 et Q .

2.6. Étude fréquentielle

On souhaite maintenant étudier l'amplitude des oscillations en fonction de la vitesse de la voiture. Pour cela, on étudie donc $\left|\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}\right|$ en fonction de ω .

2.6.a) Tracer l'allure du diagramme de Bode relatif à $\frac{\underline{Z}}{\underline{A}}$.

2.6.b) ω_r , valeur de ω pour laquelle l'amplitude est maximale, est de l'ordre de grandeur de ω_0 . Quelle est la valeur de v correspondante ? calculer l'amplitude des oscillations du véhicule pour $\omega = \omega_0$.

2.7. Application

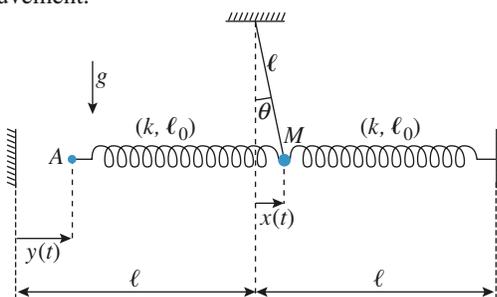
Dans le film « Le salaire de la peur », Yves Montand conduit un camion ($\omega_0 \approx 25 \text{ s}^{-1}$) chargé de nitroglycérine. Il passe sur une tôle ondulée de période spatiale 1 m et pour laquelle $A = 10 \text{ cm}$. Afin d'éviter l'explosion du chargement il doit traverser la tôle à une vitesse inférieure à 5 km/h ou supérieure à 50 km/h . Justifier qualitativement ceci à l'aide des résultats précédents.

8 * Réponse harmonique stabilisée

Le pendule simple de masse m représenté sur la figure (doc. 1) est lié par deux ressorts identiques de raideur k et longueur ℓ_0 à vide.

Au repos, l'abscisse x est nulle lorsque $y = 0$.

On fera l'approximation des petits angles pour étudier le mouvement.



1 • Quelle est la pulsation propre ω_0 du système ?

2 • Le point A est mobile, animé d'un mouvement sinusoïdal, se déplaçant de $y(t) = Y_m \cos \omega t$ par rapport à sa position fixe précédente. On note $\Omega^2 = \frac{k}{m}$.

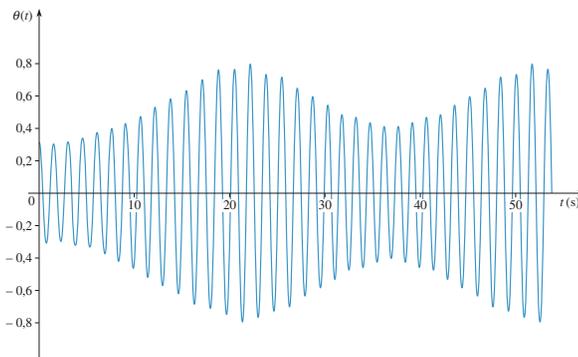
En supposant qu'un régime permanent est établi, déterminer l'amplitude X_m du mouvement de M , et le déphasage ϕ de son déplacement $x(t)$ par rapport au déplacement $y(t)$ du point A. Tracer les variations de X_m et ϕ en fonction de ω .

3 • Discuter la modification des résultats lorsqu'on tient compte d'un amortissement du pendule, couplé avec une palette plongeant dans un liquide, à l'origine d'une force de frottement $\vec{F} = -h \dot{x} \vec{e}_x$.

4 • On souhaite que le déplacement X_m varie (à Y_m donné) au plus de 10 % sur une plage de fréquence aussi large que possible. Quelle valeur faut-il donner au facteur de qualité de l'oscillateur pour réaliser cette condition ?

Conseils

- 1) Écrire l'équation du mouvement, en utilisant $\cos \theta \approx 1$ et $\sin \theta \approx \theta$ à l'ordre d'approximation linéaire.
- 2) et 3) Le régime sinusoïdal forcé est établi, utiliser la notation complexe accélère la recherche de la solution $x(t)$ correspondante.
- 4) Utiliser l'allure des courbes de réponse $X_m(\omega)$ possibles pour choisir le bon cas de figure à utiliser.



Doc. 2

Commenter. On essaiera en particulier d'interpréter les battements de l'amplitude d'oscillation qui sont observés.

Conseils

- 1) Projeter convenablement l'équation donnée par la relation fondamentale de la dynamique.
- 2) a) Faire de même en tenant compte du mouvement de O' .
- b) Mettre l'équation sous la forme d'une équation d'oscillateur avec second membre exciteur.
- c) Les oscillations du pendule sont-elles isochrones pour toutes les valeurs de son amplitude d'oscillation ?

10 *Système auto-excité : oscillateur de Van der Pol

1 • Préliminaire

Soit un oscillateur régi par l'équation d'évolution :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \text{ en régime libre.}$$

a) Lorsque $Q > 0$, quel comportement limite ($t \rightarrow \infty$) peut-on attendre pour l'oscillateur évoluant à partir de conditions initiales *a priori* quelconques ?

b) Qu'en est-il pour $Q < 0$?

c) Quel est le cas limite séparant ces deux comportements ?

2 • On s'intéresse à l'oscillateur de Van der Pol, dont l'équation différentielle d'évolution est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \left(\frac{x^2}{x_0^2} - 1 \right) \dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

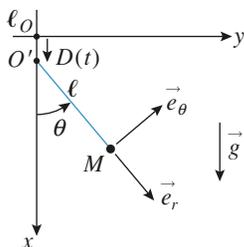
(Les simulations sont données pour $x_0 = 1$ et $\omega_0 = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.)

a) Lâché sans vitesse initiale pour $x(0) = 0,1$ ou 4 , pour $Q = 5$, l'évolution du système est représentée sur le *document 1*.

Commenter qualitativement ces résultats.

9 Oscillateur paramétrique

Un pendule simple (*doc. 1*) constitué d'un fil inextensible de masse négligeable et d'un point matériel M de masse m est accroché au point O' , mobile le long de l'axe vertical (Ox).



Doc. 1

1 • Le point O' est immobile : $D(t) = 0$.

Quelle est l'équation du mouvement du pendule ? Quelle est la pulsation propre ω_0 des petites oscillations ?

2 • Le point O' est animé d'un mouvement oscillant : $D(t) = D_m \cos \omega t$.

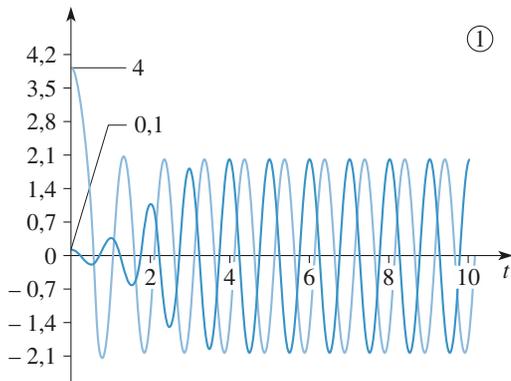
a) Établir l'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1 + h(t)) \sin \theta = 0,$$

en précisant l'expression de $h(t)$.

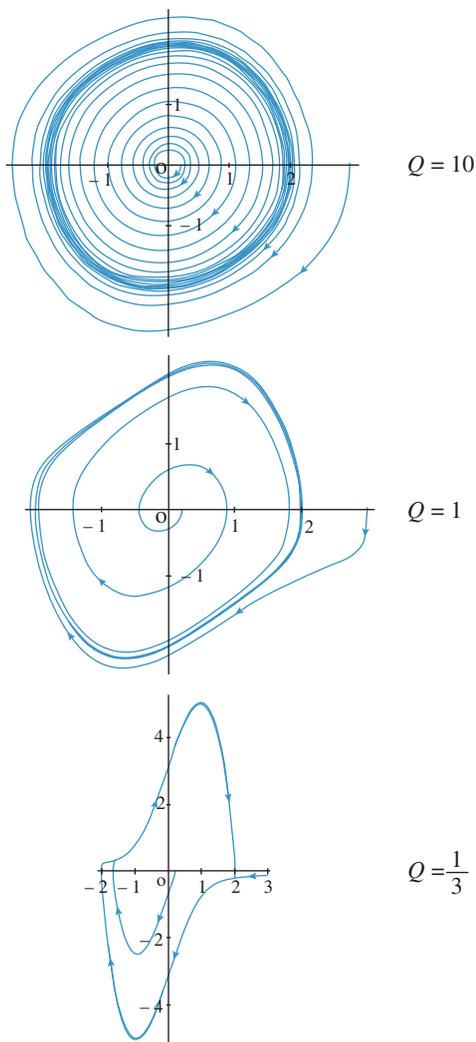
b) En supposant l'angle θ petit, et l'excitation très faible, montrer que l'oscillateur harmonique risque d'entrer en résonance si on donne à la pulsation ω une valeur particulière.

c) La résolution numérique de l'équation donne, pour $\omega = 2\omega_0$, le résultat ci-après (*doc. 2*).



Doc. 1

b) Pour $Q = 10, 1$ ou $1/3$, à partir d'autres conditions initiales, on a représenté les trajectoires de phase de l'oscillateur (doc. 2) dans le plan $(\frac{x}{x_0}, \frac{\dot{x}}{\omega_0 x_0})$.



Doc. 2

Que peut-on dire du comportement asymptotique du système ?

Les oscillations peuvent-elles être harmoniques ?

3 • On se place désormais dans le cas où le régime limite est pratiquement sinusoïdal : $1/Q$, noté ε , sera traité comme un infiniment petit d'ordre 1 dans les calculs qui suivront, et on cherche une solution presque sinusoïdale de la forme :

$$x(t) = x_0 [A \cos(\omega_0 t) + B(t)] .$$

La « correction » $B(t)$ sera traitée comme un infiniment petit d'ordre 1 en ε .

- a) D'après les simulations, quelle est la valeur de A ?
- b) Déduire de l'équation du mouvement, développée à l'ordre 1 en ε , l'équation d'évolution de $B(t)$.
- c) La solution $B(t)$ étant stable au vu des simulations, exprimer la solution obtenue en régime permanent établi, et la solution complète (mais approchée) $x(t)$.

Quels sont les harmoniques du signal mis en évidence dans cette étude ?

Conseils

- 1) Rechercher les racines de l'équation caractéristique et en déduire la convergence ou la divergence des évolutions correspondantes suivant le signe de Q .
- 2) On remarquera un comportement qui semble périodique au bout d'un temps « suffisamment » long.
- 3)a) et b) Une lecture rapide des simulations donne une valeur approchée de A ; cette valeur sera confirmée lors de la recherche de l'équation différentielle vérifiée par $B(t)$: les termes d'ordre 0 doivent disparaître, et seuls les termes d'ordre 1 en ε ou B doivent rester.
- c) La solution de l'équation différentielle précédente en $B(t)$ fait apparaître deux harmoniques ω_0 et $3\omega_0$.

1 Associations de ressorts

Premier cas : La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m s'écrit, en projection sur l'axe :

$$(Ox) : m\ddot{x} = -k_2(\ell_2 - \ell_{02}).$$

Il reste à exprimer ℓ_2 en fonction de la position x de la masse m (l'origine de l'axe est prise en O , point d'attache du premier ressort). Pour cela, on applique la relation fondamentale de la dynamique au point matériel *sans masse* A :

$$0 = -k_1(\ell_1 - \ell_{10}) + k_2(\ell_2 - \ell_{20}).$$

On en déduit $\ell_1 = \ell_{10} + \frac{k_2}{k_1}(\ell_2 - \ell_{20})$,

$$\text{d'où : } x = \ell_1 + \ell_2 = \left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right)\ell_2 + \ell_{10} - \frac{k_2}{k_1}\ell_{20},$$

$$\text{soit : } \ell_2 - \ell_{20} = \left(\frac{k_1}{k_1 + k_2}\right)(x - L_0),$$

avec $L_0 = \ell_{01} + \ell_{02}$.

L'équation du mouvement est donc :

$$m\ddot{x} = \frac{-k_1 k_2}{k_1 + k_2}(x - L_0).$$

La masse décrit bien un mouvement périodique de période :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

L'association des deux ressorts en série est équivalente à un

ressort unique de raideur $K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ (et de longueur à vide

$\ell_{01} + \ell_{02}$).

Second cas : La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse m s'écrit, en projection sur l'axe (Ox) :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -k_1(\ell_1 - \ell_{01}) + k_2(\ell_2 - \ell_{02}) \\ &= -k_1(x - \ell_{01}) + k_2(L - x - \ell_{02}), \end{aligned}$$

avec L longueur totale du système

$$\text{soit : } m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)(x - L_0) \text{ avec } L_0 = \frac{(k_1 \ell_{01} - k_2 \ell_{02} + k_2 L)}{(k_1 + k_2)}.$$

La masse décrit bien un mouvement périodique de période :

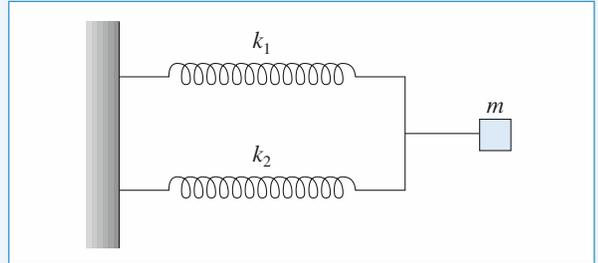
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1 + k_2}}.$$

L'association de ces deux ressorts en parallèle est équivalente à un ressort unique de raideur $K = k_1 + k_2$.

Les ressorts s'associent en série ou en parallèle comme les conductances ou comme les capacités (cf. *H-Prépa, Tout en un, 1^{re} année*).

Remarque : On peut aussi associer les ressorts en parallèle de la façon suivante ; les résultats sont équivalents :

$$K = k_1 + k_2 \quad \text{et} \quad L_0 = \frac{k_1 \ell_{01} + k_2 \ell_{02}}{k_1 + k_2}.$$



2 Oscillateur amorti de facteur de qualité élevé

1 • Pour un oscillateur harmonique dont l'équation d'évolution est :

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad \text{ou} \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{l'énergie est : } \mathcal{E} = \frac{1}{2} kx_m^2 = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_m^2,$$

où x_m est l'amplitude d'oscillation.

Pour l'oscillateur faiblement amorti, l'équation du mouvement est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 = 0$$

dont la solution est de la forme :

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec } \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

L'énergie diminue donc, sur une période, d'un facteur :

$$\exp\left(-\frac{\omega_0}{Q} \cdot \frac{2\pi}{\omega}\right) \text{ qui vaut ici } 1 - 5\%. \text{ On a donc :}$$

$$5\% \approx \frac{2\pi}{Q} \frac{\omega_0}{\omega} \approx \frac{2\pi}{Q} \quad \text{car } \omega \approx \omega_0.$$

Le facteur de qualité, élevé, vaut $Q \approx \frac{2\pi}{5\%} \approx 126$.

Les pseudo-fréquence et fréquence propre diffèrent alors, en valeur relative, de :

$$\left|\frac{f - f_0}{f_0}\right| = \left|\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}\right| = \left|\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} - 1\right| \approx \frac{1}{8Q^2} \approx 8 \cdot 10^{-6}.$$

Cet écart relatif est ici négligeable.

- 2 • L'amplitude, proportionnelle à $\exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right)$, est divisée par e au bout du temps $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$, soit au bout de n périodes.

$$n = \frac{\tau}{T} \simeq \frac{\tau}{T_0} = \frac{2Q}{2\pi} = 40.$$

Cette valeur élevée est bien la marque d'un oscillateur faiblement amorti.

- 3 • Après Q oscillations, l'amplitude est égale à :

$$x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \simeq x_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} Q \frac{2\pi}{\omega_0}\right).$$

Soit : $x(t) \simeq x_0 \exp(-\pi) \simeq 0,043 x_0$.

Remarque : Le nombre d'oscillations « accessibles » ou « visibles » donne, avec une bonne précision, la valeur du facteur de qualité d'un oscillateur amorti.

3 Oscillateur harmonique amorti par frottement solide

- 1 • Le coefficient de frottement f n'a pas de dimension.

- 2 • À l'abscisse x_0 , le point M est soumis :

– à son poids et à la réaction normale du support, qui se compensent : $\|\vec{N}\| = mg$;

– à la réaction tangentielle $\vec{T} = T \vec{e}_x$;

– à la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k x_0 \vec{e}_x$.

L'accélération peut être nulle si $T = k x_0$. Ceci n'est possible que pour $|T| < fmg$, donc pour $|x_0| < \frac{fmg}{k} = a$.

- 3 • Le rappel du ressort l'emporte initialement sur la réaction tangentielle, et le point M glisse dans le sens des x décroissants, donc $T = +fmg$, et l'équation du mouvement est :

$$m\ddot{x} = -kx + fmg.$$

Le point M quitte l'abscisse $x_0 > a$ avec une vitesse nulle, donc :

$$x(t) = (x_0 - a) \cos(\omega_0 t) + a, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Le point M s'arrête à nouveau à $t = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{\omega_0}$, (une demi-période), à l'abscisse $x_1 = -x_0 + 2a$.

- 4 • L'équilibre en x_1 est impossible si $x_1 < -a$, soit $x_0 > 3a$. Dans ces conditions, le rappel du ressort l'emporte sur le frottement et le point M repart dans le sens des x croissants, avec $T = -fmg$, soit :

$$m\ddot{x} = -kx - fmg$$

dont la solution pour $\frac{T_0}{2} < t < T_0$ est :

$$x(t) = (x_1 + a) \cos\left[\omega_0\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right] - a = (x_0 - 3a) \cos(\omega_0 t) - a.$$

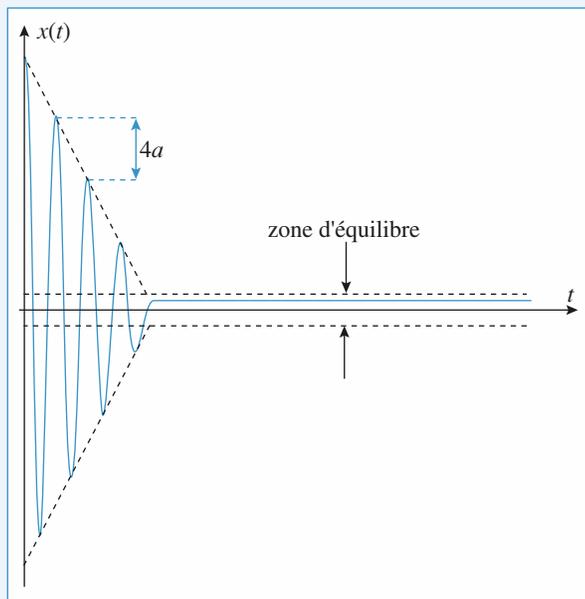
Cette phase se prolonge jusqu'à $t = T_0$, à l'abscisse : $x_2 = x_0 - 4a$.

- 5 • Les points d'arrêt successifs sont donnés par :

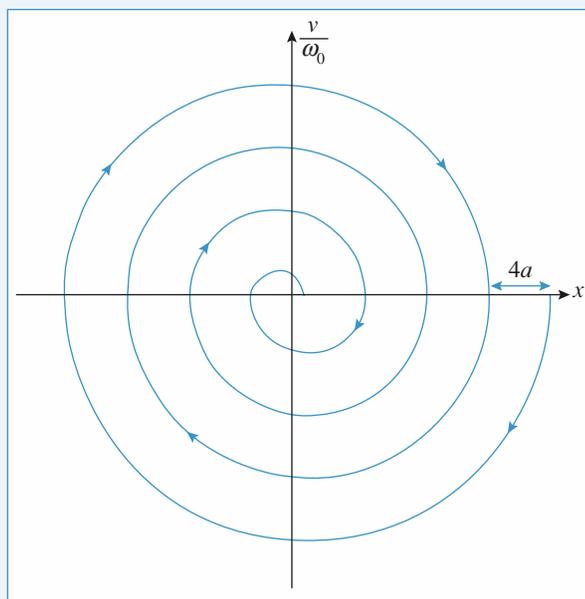
$x_0, x_1 = -x_0 + 2a, x_2 = x_0 - 4a, x_3 = -x_0 + 6a, x_4 = x_0 - 8a$, etc. L'arrêt définitif sera obtenu après n demi-oscillations, lorsque $|x_n| < a$ est vérifié pour la première fois.

L'évolution de la position $x(t)$ est constituée d'un ensemble de demi-oscillations harmoniques, de même « demi-périodes », centrées en $x = -a$ à la descente, en $x = +a$ à la montée. L'évolution des élongations successives est en progression arithmétique de pas égal à $4a$.

La trajectoire de phase est constituée, dans le plan $\left(x, \frac{\dot{x}}{\omega_0}\right)$, d'un ensemble de demi-cercles successivement centrés en $(-a, 0)$ et en $(+a, 0)$.



Doc. 1. Évolution $x(t)$.



Doc. 2. Trajectoire de phase.

4 Pendule simple amorti

1 • Le point matériel est soumis à :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{e}_r - \sin\theta\vec{e}_\theta)$;
- la traction du fil $\vec{T} = T\vec{e}_r$ (radiale pour un fil idéal) ;
- la force du frottement $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$.

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f},$$

en projection sur \vec{e}_θ on obtient $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha\dot{\theta}\ell$.

Si on se limite aux petits angles, cette équation devient :

$$m\ell\ddot{\theta} + \alpha\ell\dot{\theta} + mg\theta = 0.$$

On peut la mettre sous la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0, \text{ où } \frac{2}{\tau} = \frac{\alpha}{m},$$

$$\text{soit : } \tau = \frac{2m}{\alpha} \text{ et } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

τ est la durée caractéristique de l'amortissement.

2 • On obtient un régime pseudo-périodique si le discriminant de l'équation caractéristique est négatif, c'est-à-dire si :

$$\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2 < 0, \text{ donc si } \omega_0\tau > 1.$$

La pseudo-pulsation est :

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(\omega_0\tau)^2}}.$$

$$\text{et la pseudo-période } T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$\theta(t)$ est de la forme :

$$\theta(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)),$$

donc :

$$\theta(t+T) = \exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)\theta(t) \text{ et } \delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \frac{T}{\tau},$$

3 • a) Pour déterminer δ , on utilise les points B et C :

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta_B}{\theta_C}\right) = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,11.$$

b) Entre les points A et D, on compte sept pseudo-périodes,

$$\text{d'où : } T = \frac{t_D - t_A}{7} = 1,1 \text{ s.}$$

$$\text{c) } \tau = \frac{T}{\delta} = 10,1 \text{ s.}$$

$$\text{d) } \alpha = \frac{2m}{\tau} = 9,3 \cdot 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}.$$

5 Modélisation d'un oscillateur

1 • Étude énergétique d'un oscillateur :

$$\text{a) } \vec{F} = -\text{grad } E_p.$$

Si $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$, $E_p = \frac{1}{2}kx^2$, à une constante additive près.

$$\text{b) } E_p(y) = E_0 + \alpha(y - Y_0)^2 \text{ donne } \vec{F} = -2\alpha(y - y_0)\vec{u}_y.$$

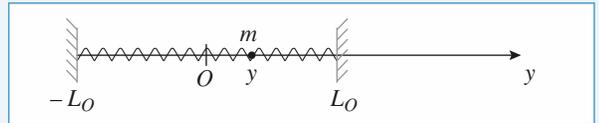
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m dans \mathcal{R} galiléen s'écrit :

$$m\frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y = -2\alpha(y - y_0)\vec{u}_y.$$

$$\text{Soit } \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{2\alpha}{m}y = \frac{2\alpha}{m}y_0.$$

On obtient l'équation d'un oscillateur harmonique de période

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2\alpha}}.$$



La force totale agissant sur m est :

$$\vec{F} = -ky\vec{u}_y - k(L_0 - y - L_0)(-\vec{u}_y).$$

$$\vec{F} = -2ky\vec{u}_y.$$

$$E_p(y) = ky^2. \text{ On a alors } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = 0,32 \text{ s.}$$

$$\text{d) } \vec{F} = -\beta m\vec{v}. \beta \text{ est en } \text{s}^{-1}.$$

$$\text{e) On a alors } m\ddot{y} = -2ky - \beta m\dot{y}.$$

$$\ddot{y} + \beta\dot{y} + \frac{2k}{m}y = 0.$$

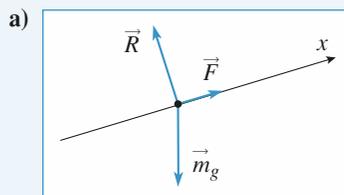
L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + \beta r + \frac{2k}{m} = 0.$$

$$\Delta = \beta^2 - \frac{8k}{m}$$

m pourra osciller si $\Delta < 0$, soit $\beta < \beta_{\min} = 2\sqrt{\frac{2k}{m}} = 40 \text{ s}^{-1}$.

2 • Modélisation d'un dispositif expérimental



À l'équilibre :
 $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$.

b) En projection sur l'axe des x , on a : $-mg \sin \alpha + F = 0$.

On se place dans l'approximation des petits angles :

$$\sin \alpha \approx \alpha \approx \frac{h}{L}.$$

$$\text{On a alors : } k\left(\frac{x_0}{x_c}\right)^n = mg \frac{h}{L}.$$

$$c) h = \frac{kL}{mg} \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n.$$

$$\ln h = \ln \left(\frac{kL}{mg} \right) + n \ln \left(\frac{x_0}{x_e} \right).$$

La pente de la droite obtenue en traçant $\ln(h)$ en fonction de $\ln \left(\frac{x_e}{x_0} \right)$ est $-n$.

$$\text{On obtient : } n = 4 \quad \ln \left(\frac{kL}{mg} \right) = -13,5 \quad k = 2 \cdot 10^{-6} \text{ SI.}$$

d) À l'abscisse x , la masse m possède une énergie potentielle de pesanteur $mgx \sin \alpha$.

De plus, la force \vec{F} dérive d'une énergie potentielle E_{pF} .

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{pF} \text{ soit } \frac{dE_{pF}}{dx} = -k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n.$$

$$E_{pF} = -kx_0^n \frac{x^{1-n}}{1-n} \text{ à une constante additive près.}$$

$$E_p(x) = E_{pF} + mg \frac{h}{L} x = k \frac{x_0^n}{n-1} x^{1-n} + mg \frac{h}{L} x.$$

On peut éliminer h de cette expression en faisant intervenir x_e .

$$E_p(x) = k \frac{x_0^n}{n-1} x^{1-n} + k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n x.$$

$$e) \frac{dE_p}{dx} = -k \frac{x_0^n}{x^n} + k \left(\frac{x_0}{x_e} \right)^n.$$

$$\frac{d^2E_p}{dx^2} = kn \frac{x_0^n}{x^{n+1}}.$$

$$\text{D'où } E_p(x \approx x_e) = E_p(x = x_e) + kn \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}} \frac{1}{2} (x - x_e)^2.$$

$$K = kn \frac{x_0^n}{x_e^{n+1}}.$$

f) Au voisinage de $x = x_e$, on a donc une force de rappel qui s'écrit $-K(x - x_e)$, correspondant à une constante de raideur équivalente K .

g) La période d'oscillations T s'écrit alors : $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{knx_0^n} x_e^{\frac{n+1}{2}}}.$$

$$\text{Or } x_e = x_0 \left(\frac{mgh}{kL} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

$$\text{Donc } T \text{ est proportionnelle à } h^{-\frac{n+1}{2n}}.$$

Si on fait la mesure de T pour différentes valeurs de h , on pourra en déduire la valeur du coefficient n .

6 Portrait de phase d'un oscillateur pas toujours harmonique

1 • Les ressorts, identiques, ont le même allongement :

$$\Delta \ell = \sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0.$$

L'énergie potentielle emmagasinée est donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p &= 2 \frac{1}{2} k \Delta \ell^2 + K \\ &= kx^2 - 2k\ell_0 \sqrt{a^2 + x^2} + k\ell_0^2 + ka^2 + K. \end{aligned}$$

L'énergie potentielle est définie à une constante près, et le choix $\mathcal{E}_p(0) = 0$ impose $K = 2k\ell_0 a - ka^2$.

$$\text{Soit } \mathcal{E}_p = kx^2 - 2k\ell_0 \sqrt{a^2 + x^2} + 2k\ell_0 a.$$

Sur les courbes fournies on voit que :

- si $\alpha > 1$, il y a deux positions d'équilibre stables symétriques par rapport à O et une position d'équilibre instable : le point O ;
- si $\alpha < 1$, il y a une seule position d'équilibre : le point O ; elle est stable ;
- si $\alpha = 1$, le point O est encore la seule position d'équilibre, elle est stable mais la courbe est « plus plate » que pour $\alpha < 1$ (les trois positions d'équilibre que l'on obtient pour $\alpha > 1$ sont confondues : $x = 0$ est racine triple de la dérivée).

2 • Le théorème de l'énergie cinétique donne :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \mathcal{E}_p = \text{cte},$$

$$\text{soit encore : } \frac{1}{2} ma^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \mathcal{E}_p(u) = \text{cte}$$

$$\text{avec : } \mathcal{E}_p(u) = ka^2(u^2 - 2\alpha\sqrt{1+u^2} + 2\alpha).$$

En dérivant, on obtient :

$$ma^2 \frac{d^2u}{dt^2} \frac{du}{dt} + 2ka^2 u \frac{du}{dt} - 2ka^2 \alpha \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dt} = 0,$$

ce qui donne :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{2k}{m} u + \frac{2k}{m} \alpha \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}.$$

La nouvelle unité de temps T_0 impose $t = t' T_0$,

$$\text{soit : } \frac{d^2u}{dt'^2} = \frac{1}{T_0^2} \frac{d^2u}{dt'^2},$$

$$\text{donc : } \frac{d^2u}{dt'^2} = -\frac{2kT_0^2}{m} u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}} \right)$$

Sachant que $\Omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ et $T_0 = \frac{2k}{\Omega_0}$, cela conduit à :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d^2u}{dt'^2} &= -4\pi^2 u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}} \right) \end{aligned} \right.$$

avec la nouvelle unité de temps.

3 • a) Les courbes (1) et (2) correspondent à des mouvements oscillatoires autour d'une des deux positions d'équilibre stable. La trajectoire de phase représentée par la courbe (1) est elliptique : les petits mouvements du point sont (quasi) harmoniques, la courbe (2) n'est pas du tout elliptique (en forme d'œuf) : les mouvements un peu plus grands

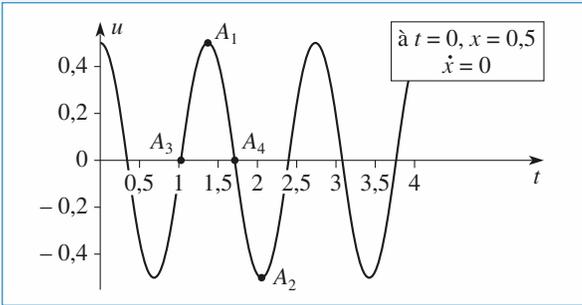
sont périodiques, mais non harmoniques. Ces deux courbes correspondent à une énergie totale du système inférieure à 0. La courbe (3) est en fait composée de deux trajectoires (deux séparatrices), elles s'arrêtent à la position d'équilibre instable (0, 0). Elles correspondent à une énergie totale nulle.

La courbe (4) représente un mouvement périodique de grande amplitude, non harmonique ; elle correspond à une énergie totale positive et entoure les trois points singuliers.

b) Les trajectoires de phase représentées ne sont manifestement pas elliptiques (elles ont une forme d'anneau de patinage de vitesse !) : les petites oscillations ne sont pas harmoniques. On peut vérifier que le développement de l'énergie potentielle au voisinage de $x = 0$, à l'ordre le plus bas non nul, est :

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{4} k \frac{x^4}{a^2}.$$

Ce n'est pas une approximation parabolique, et le rappel exercé par les ressorts vers l'équilibre $x = 0$ n'est pas linéaire. Les points A_1 et A_2 sont des extremum de x , les points A_3 et A_4 sont des points où \dot{x} s'annule.



Solution de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -4\pi^2u \left(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{1+u^2}}\right) \text{ avec } \alpha = 1.$$

c) La courbe correspondant à $x(0) = 0,05$ est elliptique (elle semble circulaire) : les petites oscillations sont harmoniques. En effet, quand α est différent de 1, le terme prépondérant dans le développement de l'énergie potentielle au voisinage de 0 est en x^2 . Il n'existe pas ici de courbe frontière, car il n'y a pas de position d'équilibre instable.

7 Étude de la suspension d'un véhicule

D'après Mines d'Alès, Albi, Douai, Nantes, 2006.

1 • La route est parfaitement horizontale :

1. Lorsque le véhicule est au repos, la force \vec{F} est nulle.

$z_{G_{eq}}$ est alors donné par : $M\vec{g} - k(z_{G_{eq}} - R - \ell_0) \vec{u}_z = \vec{0}$

$$z_{G_{eq}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k} + R.$$

2. a) $\vec{P} = -Mg \vec{u}_z = -\text{grad } E_{p_1}$ $E_{p_1} = Mgz$ en prenant l'origine de l'énergie potentielle en $z_{G_{eq}}$.

$$\text{b) } \vec{f} = -k(z_G - R - \ell_0) \vec{u}_z = -\text{grad } E_{p_2}$$

$$E_{p_2} = \frac{1}{2} k(z_G - R - \ell_0)^2 + \text{cte.}$$

$$z_G - R - \ell_0 = z + z_{G_{eq}} - R - \ell_0 = z - \frac{Mg}{k}.$$

$$\text{On peut garder par exemple } E_{p_2} = \frac{1}{2} k \left(z - \frac{Mg}{k} \right)^2.$$

$$\text{c) } \frac{dE_C}{dt} + \frac{dE_{p_1}}{dt} + \frac{dE_{p_2}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}_G \quad \vec{v}_G = v \vec{u}_x + \dot{z} \vec{u}_z.$$

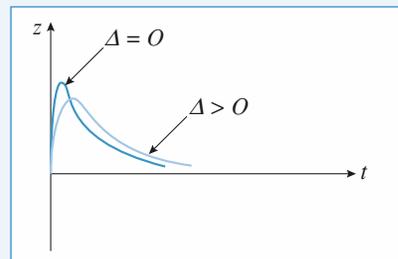
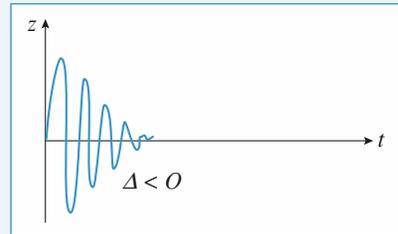
$$\text{Soit } \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{2} M\dot{z}^2 \right) + \frac{d}{dt} \left(Mgz + \frac{1}{2} k \left(z - \frac{Mg}{k} \right)^2 \right) = \lambda(\dot{z} - \dot{z}_0)\dot{z}.$$

La route étant horizontale, $\dot{z}_0 = 0$.

Après simplification par \dot{z} , on obtient :

$$M\dot{z} + Mg + k \left(z - \frac{Mg}{k} \right) = -\lambda\dot{z}.$$

$$M\ddot{z} + \lambda\dot{z} + kz = 0.$$



$$\text{avec } \Delta = \lambda^2 - 4kM.$$

2 • La route est ondulée :

1. λ s'exprime en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

2. La sinusoïde a une période spatiale L , donc elle s'exprime

$$\text{en } \cos 2\pi \frac{x}{L}.$$

Pour le véhicule, on a $x = vt$ donc $\omega = \frac{2\pi v}{L}$, qui est bien en s^{-1} .

$$3. M\ddot{z} + Mg + k(z_G - z_0 - \ell_0) = -\lambda(\dot{z} - \dot{z}_0)$$

$$\text{avec } z_G - z_0 - \ell_0 = z - z_0 - \frac{Mg}{k}.$$

4. Le régime transitoire tend rapidement vers une réponse nulle du système. $z(t)$ ne comportera alors qu'une réponse à l'excitation forcée de pulsation ω contenue dans $z_0(t)$.

5. a) En utilisant la notation complexe, l'équation différentielle du mouvement donne :

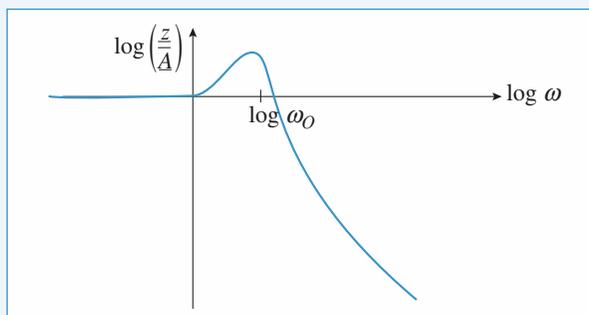
$$(-M\omega^2 + k + j\lambda\omega)\underline{Z} = (k + j\lambda\omega)\underline{A}.$$

$$\text{Soit } \frac{Z}{A} = \frac{\left(\frac{k}{M} + \frac{j\omega\lambda}{M}\right)}{\left(-\omega^2 + j\omega\frac{\lambda}{M} + \frac{k}{M}\right)} = \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \quad \omega_1 = \frac{k}{\lambda} \quad \text{et } Q = \frac{\sqrt{Mk}}{\lambda}.$$

$$\text{b) } \omega_0 = 10 \text{ rads}^{-1} \quad \omega_1 = 25 \text{ rads}^{-1} \quad Q = 2,5.$$

$$\text{c) } \left| \frac{Z}{A} \right| = \frac{\left(1 + \frac{\omega^2}{\omega_1^2}\right)^{1/2}}{\left(\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}\right)^{1/2}}$$



$$\text{b) Si } \omega \approx \omega_0 \quad v = \frac{L\omega_0}{2\pi} = 1,59 \text{ ms}^{-1} = 5,7 \text{ km/h}.$$

$$\text{Alors } |Z| = 27 \text{ cm}.$$

7. Pour $\omega_0 \approx 25 \text{ s}^{-1}$ $v \approx 14,3 \text{ km/h}$ donne l'amplitude maximale des oscillations. Pour éviter d'avoir une trop grande amplitude de vibration, il faudra donc choisir une vitesse faible ($< 5 \text{ km/h}$) ou une vitesse élevée ($> 50 \text{ km/h}$), en fait en dehors de la bosse formée par $\log \left| \frac{Z}{A} \right|$.

8 Réponse harmonique stabilisée

1 • Pour de petits angles, le vecteur \vec{e}_x est pratiquement confondu avec le vecteur \vec{e}_θ , et les tensions des ressorts donnent des efforts pratiquement horizontaux. En projection sur \vec{e}_θ , l'équation du mouvement nous donne, la force de traction du fil étant radiale :

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\theta - k(x + \ell - \ell_0) + k(\ell - x - \ell_0)$$

soit, avec $x = \ell\theta$ pour de petits angles :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}.$$

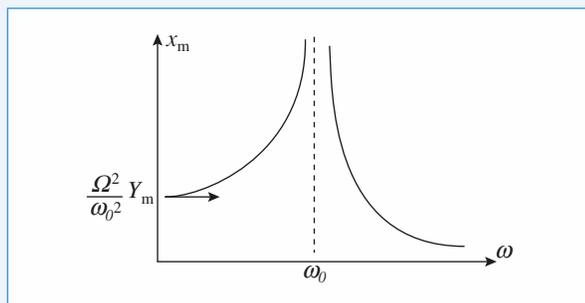
2 • Dans l'équation du mouvement, le terme $k(x + \ell - \ell_0)$ devient ici $k(x + \ell - y - \ell_0)$, donc :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \Omega^2 y.$$

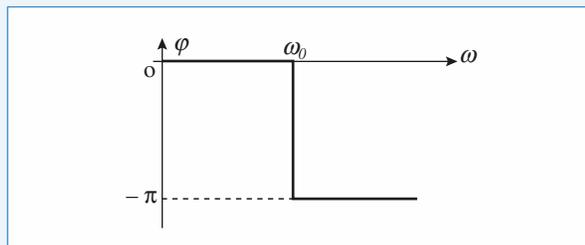
On en déduit, en supposant un régime permanent sinusoïdal de pulsation ω établi (il faudrait donc en toute rigueur un petit peu de frottement) :

$$x(t) = \frac{\Omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} Y_m \cos \omega t = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec } X_m = \frac{\Omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|} Y_m \quad \text{et } \begin{cases} \varphi = 0 & \text{si } 0 < \omega < \omega_0 \\ \varphi = -\pi & \text{si } \omega > \omega_0 \end{cases}$$



Doc. 1



Doc. 2

3 • En notant $\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$, il vient :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \Omega^2 y.$$

En utilisant la notation complexe, on obtient :

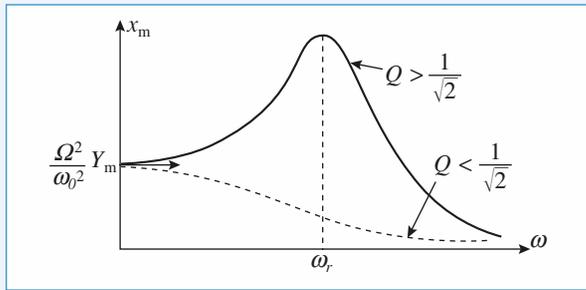
$$\underline{x} = X_m e^{j\varphi} = \frac{\Omega^2}{-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2} \underline{y}$$

et donc en notation réelle :

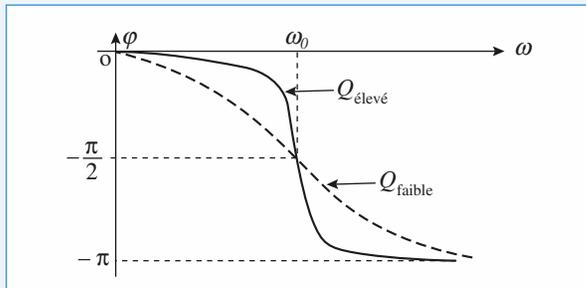
$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{avec : } \begin{cases} X_m = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} Y_m \\ e^{j\varphi} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - j\frac{\omega\omega_0}{Q}}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} \end{cases}$$

On obtient alors les courbes suivantes (doc. 4 et 5) :



Doc. 3



Doc. 4

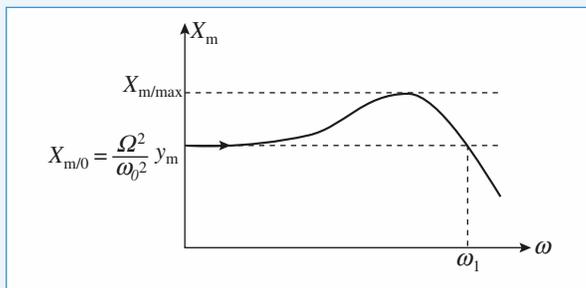
Lorsque $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, la pulsation de résonance :

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

est d'autant plus proche de la pulsation propre ω_0 que le facteur de qualité est élevé.

À la résonance, l'amplitude reste limitée lorsqu'on tient compte du frottement.

4 •



Doc. 5

Pour étendre au maximum la zone dans laquelle X_m ne varie pas trop, il faut ajuster l'amortissement pour obtenir : $X_{m, \max} = X_{m, 0} (1 + 10\%) = 1,1 X_{m, 0}$, la bande de pulsation acceptée allant alors de 0 à ω_1 .

À la résonance, $X_{m, \max} = X_{m, 0} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$, on en déduit

que le facteur de qualité doit être ajusté au voisinage de $Q = 0,9$ ($Q = 0,6$ ne convient pas car $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$).

9 Oscillateur paramétrique

1 • L'accélération du point M est :

$$\vec{a}(M) = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \vec{a}_{(\omega')} + \ell \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - \ell \dot{\theta}^2 \vec{e}_r, \text{ avec ici } \vec{a}_{(\omega')} = \vec{0}.$$

La tension du fil est radiale (fil idéal), donc en projetant l'équation du mouvement sur \vec{e}_θ , il vient :

$$m \ell \ddot{\theta} = -mg \sin \theta.$$

Pour les petits mouvements, l'équation linéarisée :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \theta = 0$$

est celle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

2 • a) Il faut maintenant prendre en compte l'accélération :

$$\vec{a}_{(\omega')} = -D_m \omega^2 \cos \omega t \vec{e}_x$$

ce qui donne la nouvelle équation du mouvement :

$$m(\ell \ddot{\theta} + D_m \omega^2 \cos \omega t \sin \theta) = -mg \sin \theta.$$

Celle-ci est bien de la forme demandée, avec :

$$h(t) = \frac{D_m}{\ell} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \omega t.$$

b) Pour de petits angles, l'équation du mouvement peut s'écrire :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = -\frac{D_m}{\ell} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \cos \omega t \theta$$

qui s'apparente à une équation d'oscillateur harmonique excité. Le terme excitation fait cependant intervenir l'état de l'oscillateur lui-même.

Pour un second membre très faible, le mouvement doit être une oscillation de pulsation ω_0 que vient perturber le terme exciteur. Si on pose : $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, on voit que le terme exciteur se comporte comme :

$$\cos(\omega t) \cos(\omega_0 t + \varphi) =$$

$$\frac{1}{2} \cos((\omega - \omega_0)t - \varphi) + \frac{1}{2} \cos((\omega + \omega_0)t + \varphi)$$

et peut mettre l'oscillateur en résonance s'il contient un terme de pulsation ω_0 , ce qui correspond au cas $\omega = 2\omega_0$ (si $\omega = 0$, on est ramené à la question 1), il n'y a pas d'excitation). Ce raisonnement qualitatif permet de prévoir une résonance paramétrique puis une excitation de pulsation double de la pulsation propre de l'oscillateur.

c) Au début, l'oscillateur est excité à la résonance paramétrique : son amplitude augmente donc...

Lorsque son amplitude augmente, l'approximation des petits angles cesse d'être satisfaisante, et sa période propre augmente. Il n'y a alors plus de résonance paramétrique et l'amplitude de l'oscillateur excité est moins importante...

Si l'amplitude d'oscillation diminue, la pulsation propre augmente un peu, et la condition de résonance se retrouve réalisée... et ainsi de suite.

10 *Système auto-excité ; oscillateur de Van der Pol

1 • Préliminaire

a) L'équation caractéristique est :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \quad \Delta = \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right).$$

Lorsque $Q > 0$, on peut obtenir :

- deux racines réelles et négatives pour $Q < \frac{1}{2}$;
- une racine double $-\omega_0$, négative, pour $Q = \frac{1}{2}$;
- deux racines complexes conjuguées, de partie réelle :
 $-\frac{\omega_0}{2Q}$ négative, pour $Q > \frac{1}{2}$.

Dans tous les cas, le terme en \dot{x} , qui correspond à un frottement (fluide), conduit à une solution qui tend vers zéro. La nature du régime transitoire dépend de Q , mais le régime final est le même pour tous les Q positifs.

b) Pour $Q < 0$, on obtient maintenant :

- deux racines réelles positives pour $Q > -\frac{1}{2}$;
- une racine double $+\omega_0$, positive, pour $Q = -\frac{1}{2}$;
- deux racines complexes conjuguées, de partie réelle :
 $-\frac{\omega_0}{2}$ positive, pour $Q < -\frac{1}{2}$.

Cette fois, les solutions obtenues sont divergentes : le système est instable.

c) Le cas limite séparant les deux comportements correspond à l'inversion de signe du terme en \dot{x} , il correspond donc au cas limite $\frac{1}{Q} = 0$, c'est-à-dire à l'oscillateur harmonique : il n'est pas amorti, son facteur de qualité est infini.

2 • a) Lorsque $|x|$ est inférieur à x_0 , le terme en \dot{x} est négatif, et on peut attendre une amplification du signal. Lorsque $|x|$ est supérieur à x_0 , c'est l'inverse. Ceci permet, très qualitativement, de comprendre que l'amplitude d'oscillation arrive à se stabiliser à une valeur qui n'est ni nulle, ni infinie, comme l'indique la simulation.

b) L'existence d'une limite d'évolution est confirmée par les trajectoires de phase : dans tous les cas, le système tend vers un **cycle limite**, indépendamment des conditions initiales.

L'équation n'est pas linéaire, et les oscillations observées ne sont pas harmoniques. On note toutefois que pour Q élevé, le terme en \dot{x} reste assez faible : le régime limite est long à atteindre, mais les oscillations obtenues sont alors quasi-sinusoidales.

3 • a) Sur la simulation obtenue pour $Q = 10$, il apparaît un cycle limite presque circulaire, de rayon égal à 2 : c'est la signature d'un mouvement quasi sinusoidal, d'amplitude $X_m \approx 2 x_0$.

b) On reprend l'équation du mouvement de l'oscillateur et on introduit la solution proposée :

$$x_0 \left[-2\omega_0^2 \cos \omega_0 t + \ddot{B}(t) \right] + \varepsilon \omega_0 x_0 \left[4 \cos^2(\omega_0 t) - 1 + 8 \cos(\omega_0 t) B(t) + B^2(t) \right] \left[-2 \sin \omega_0 t + \dot{B}(t) \right] + \omega_0^2 x_0 \left[2 \cos \omega_0 t + B(t) \right] = 0.$$

Le terme d'ordre 0 en ε se simplifie : cela confirme la valeur choisie pour A : $A = 2$.

À l'ordre 1 en ε (donc en ne gardant que ε , $B(t)$ et ses dérivées) :

$$\ddot{B}(t) + \omega_0^2 B(t) = +2\varepsilon \omega_0^2 \sin(3\omega_0 t).$$

c) La solution $B(t)$ contient donc :

- un terme éventuel de pulsation ω_0 qui s'ajoute au terme $Ax_0 \cos(\omega_0 t)$, ce qui modifie légèrement A , par une correction d'ordre 1 ; ce terme dépend des conditions initiales ;
- en régime, établi, il y a un terme de pulsation $3\omega_0$:

$$B(t) = \frac{+2\varepsilon \omega_0^2}{(-9+1)\omega_0^2} \sin(3\omega_0 t) = -\frac{\varepsilon}{4} \sin 3\omega_0 t.$$

Le terme correctif $B(t)$ fait donc apparaître une pulsation triple de la pulsation de base (en plus d'éventuels nouveaux termes de pulsation ω_0).

Cet oscillateur non harmonique n'a pas une évolution purement sinusoidale, ni même périodique, le régime transitoire durant un temps infini. Ce qui a été construit n'est qu'une approximation mettant en évidence l'existence des harmoniques ω_0 et $3\omega_0$ au bout d'un temps « suffisamment » long.

5

Théorème du moment cinétique

LES OBJECTIFS

- Introduire le théorème du moment cinétique.
- Étudier les mouvements à force centrale.

LES PRÉREQUIS

- Utilisation de différents systèmes de coordonnées.
- Lois de Newton.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Produit vectoriel.

ESSENTIEL

◀ Moment d'une force

• Moment en un point

Le moment au point O de la force \vec{F} appliquée en M est : $\vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$ (doc. 1).

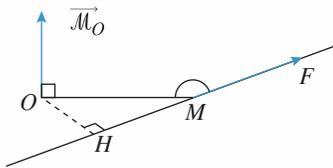
Si la force \vec{F} « passe par le point O », son moment en O est nul.

• Moment par rapport à un axe

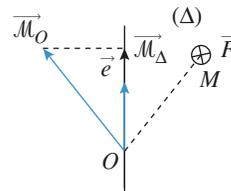
Le produit scalaire $M_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{e}$ est le moment de la force \vec{F} par rapport à l'axe Δ qui passe par le point O , et qui est orienté par son vecteur unitaire \vec{e} .

M_Δ est indépendant du choix du point O sur l'axe Δ .

Le moment par rapport à l'axe Δ d'une force \vec{F} « parallèle à » ou « passant par » l'axe Δ est nul (doc. 2).



Doc. 1 : $\vec{M}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OH} \wedge \vec{F}$



Doc. 2 : $\vec{M}_\Delta = M_\Delta \cdot \vec{e}$ avec $M_\Delta = \vec{M}_O \cdot \vec{e}$

◀ Moment cinétique

Le moment cinétique au point O du point matériel M dans le référentiel \mathcal{R} est :

$$\vec{L}_O(M)_{/\mathcal{R}} = m \overline{OM} \wedge \vec{v}(M)_{/\mathcal{R}}.$$

◀ Théorème du moment cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R}_g , le théorème du moment cinétique peut être appliqué :

- en un point fixe O : $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O$;
- en projection sur un axe fixe Δ : $\frac{dL_\Delta}{dt} = \mathcal{M}_\Delta$;
- le théorème du moment cinétique est une conséquence de la deuxième loi de Newton. Dans certains cas, il donne accès rapidement à l'équation du mouvement (exemple : rotation autour d'un axe fixe).

◀ Mouvement à force centrale

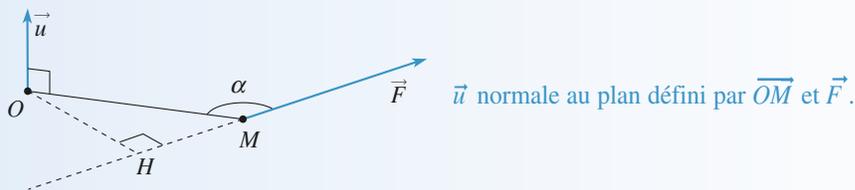
- Conservation du moment cinétique : pour un mouvement à force centrale de centre O fixe, le moment cinétique \vec{L}_O est une constante du mouvement.
- La trajectoire du point matériel est contenue dans le plan contenant O et perpendiculaire à \vec{L}_O (si le moment cinétique est nul, la trajectoire est sur une droite passant par O).
- La loi des aires est assurée : la vitesse aréolaire $\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$ est une constante du mouvement :

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

Et C la constante des aires.

Conseils et pièges à éviter

- Bien connaître le calcul d'un produit vectoriel :



$$\vec{\mathcal{M}}_O = \overline{OM} \wedge \vec{F} = OM F \sin \alpha \vec{u} = \overline{OH} \wedge \vec{F} = OH F \vec{u}$$

- Faire une analyse précise des forces qui s'exercent sur un point matériel avant d'appliquer le théorème du moment cinétique.
- Le théorème du moment cinétique est souvent intéressant pour étudier l'équation d'évolution d'un mouvement même si on ne connaît pas certaines forces (par exemple la tension du fil dans le cas du pendule pesant).

1 Oscillateur harmonique spatial

Un point matériel de masse m est soumis à la force $\vec{F} = -k\vec{r}$.

1 • Montrer qu'un choix approprié d'axes (O, x, y, z) et d'origine des temps permet de décrire le mouvement par :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \cos \omega t \\ y(t) = y_0 \sin \omega t \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

2 • Quelle est la constante des aires associée à ce mouvement ? Quelle est l'aire balayée par le rayon $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ sur une période ?

Conseil

L'équation du mouvement peut être aisément résolue. On pourra aussi utiliser la conservation associée au caractère central de la force subie.

2 *Mouvement à force centrale

On observe le mouvement d'une particule P soumise à une force centrale \vec{f} et on remarque que l'angle α entre le rayon vecteur \overrightarrow{OP} et le vecteur vitesse \vec{v} est constant.

1 • Montrer que la force est donnée par :

$$\vec{f} = -m \left(\frac{C}{\sin \alpha} \right)^2 \frac{1}{r^3} \vec{e}_r,$$

où C est la constante des aires $\left(C = \frac{L}{m} \right)$.

2 • Trouver une intégrale première du mouvement (sans utiliser la conservation de l'énergie). Déterminer l'équation polaire de la trajectoire. On prendra comme conditions initiales $r = r_0, \dot{r} = \dot{r}_0$ et $\theta = 0, \dot{\theta}_0 \neq 0$.

3 • Déterminer l'énergie de la particule. Est-elle conservée ?

Conseils

1) On rappelle que l'angle α entre deux vecteurs \vec{a} et \vec{b} vérifie $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$ ou $\sin \alpha = \frac{\|\vec{a} \wedge \vec{b}\|}{ab}$.

Utiliser l'hypothèse de l'énoncé et la conservation du moment cinétique en O pour établir une relation entre \dot{r} , r et les constantes du mouvement. En déduire la loi de force (grâce à la relation fondamentale de la dynamique).

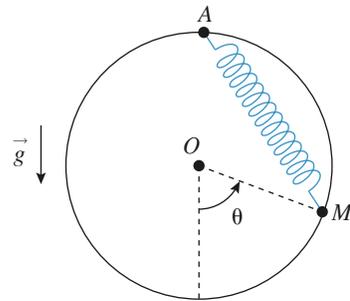
2) Déduire des calculs de la question précédente que $r\dot{r} = \text{cte}$. En déduire $r(t)$, puis $\theta(t)$ et éliminer le temps entre ces deux expressions pour obtenir $r(\theta)$.

3) Utiliser l'expression de $\sin \alpha$ en fonction de r et v .

3 Rappel élastique le long d'un cercle

Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m , est assujettie à glisser sans frottement sur un cercle vertical de centre O et rayon R .

Elle est reliée au point A par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0 .



1 • Établir par trois méthodes différentes l'équation du mouvement du point M .

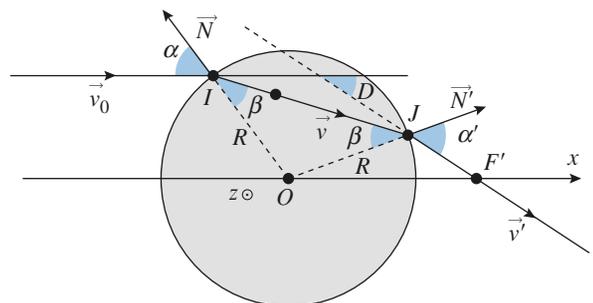
2 • Discuter les équilibres, leur stabilité, et indiquer éventuellement la période des petites oscillations.

Conseil

1) Une seule variable, l'angle $\theta(t)$, décrit l'état du système. Il faut donc trouver une équation qui ne fait pas apparaître la réaction du cercle.

4 *Déviation d'une particule par un puits de potentiel

Une particule de charge $q > 0$, mobile à la vitesse v_0 dans une région de l'espace où le potentiel électrostatique est nul (par convention), pénètre à l'intérieur d'une sphère de rayon R où le potentiel est $-V_0$, acquérant ainsi l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = -qV_0$. (On suppose $V_0 > 0$.)



On admettra que l'on peut parvenir à ce résultat avec deux grilles sphériques métalliques concentriques très proches

de rayons égaux à R , la grille externe étant au potentiel nul et la grille interne étant au potentiel $-V_0$. Le champ électrostatique entre les deux grilles, dans une pellicule d'épaisseur très faible, est radial.

On supposera, en outre, que ces grilles sont parfaitement perméables à la particule et on négligera les effets de la pesanteur. Le référentiel d'étude est galiléen. La particule rencontre la première grille sous l'angle d'incidence α .

1 • Montrer que la particule pénètre alors entre les deux grilles ($r < R$) avec un angle β par rapport à la normale OI que l'on exprimera en fonction de α , qV_0 et \mathcal{E}_{K_0} énergie cinétique initiale.

Vérifier que la réfraction constatée obéit à la loi de Descartes, par analogie optique. On définira un indice de réfraction équivalent.

2 • Décrire le mouvement ultérieur de la particule et déterminer l'angle de déviation résultant par ce puits sphérique. Le système proposé est-il stigmatique au sens de l'optique géométrique ?

Conseils

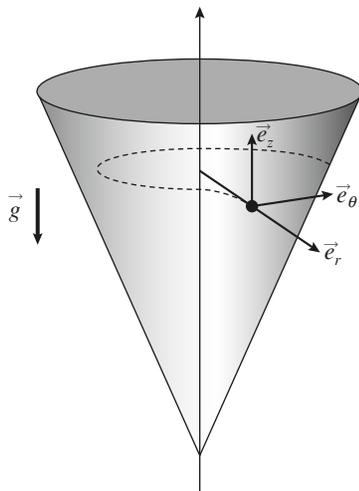
1) Identifier les grandeurs conservées pour ce mouvement : deux relations obtenues devraient permettre de déterminer la norme de la vitesse et sa direction dans le plan de figure...

2) Tous les « rayons » incidents parallèles à l'axe (Ox) passent-ils par le point F' après traversée du système ?

5 *Particule évoluant dans un cône

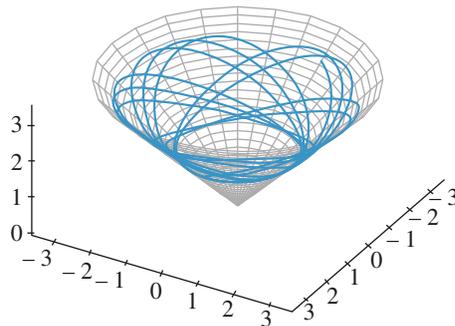
Un point matériel M de masse m glisse sans frottement dans un cône d'axe (Oz) vertical et de demi-angle au sommet valant α .

À l'instant initial, il est lancé à l'altitude z_0 avec une vitesse horizontale $v_0 = v_0 \vec{e}_\theta(t=0)$.

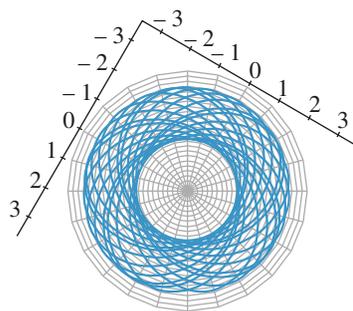


Doc. 1

On observe alors l'évolution suivante (doc. 2 et 3), représentée pour une vue oblique et pour une vue de dessus de l'évolution du point M .



Doc. 2. Vue oblique.



Doc. 3. Vue de dessus.

1 • Pourquoi le point M contourne-t-il l'axe (Oz) en tournant toujours dans le même sens, et sans jamais tomber au fond du cône ?

2 • En exprimant deux constantes du mouvement, justifier l'évolution du point entre deux altitudes extrêmes.

3 • La trajectoire pourrait-elle être circulaire ?

Conseils

Considérer les actions subies par le point, leurs directions, ainsi que leur puissance, pour proposer les deux constantes associées à ce mouvement. Discuter ensuite les zones énergétiquement accessibles au point M .

6 Pendule à deux longueurs

D'après Mines de Douai, Alès, etc., 2005.

On considère un mobile ponctuel de masse constante m soumis, dans un référentiel galiléen, à un ensemble de forces de résultante \vec{f} , partout et constamment définie dans l'espace et le temps.

1 • En utilisant le principe fondamental de la dynamique (ou théorème du centre d'inertie), montrer que, sous cette hypothèse, la norme v du vecteur vitesse du mobile est une fonction continue du temps.

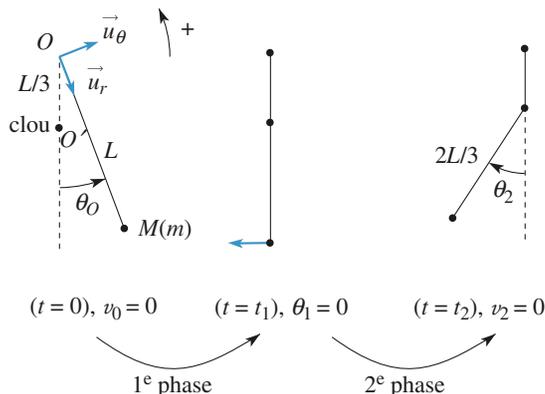


Fig. 1

On étudie un pendule simple modifié, présenté sur la figure 1. Un mobile ponctuel M de masse m , est accroché à l'extrémité d'un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, dont l'autre extrémité est fixe en O . On néglige tout frottement et on repère l'inclinaison θ du brin de fil soutenant M par rapport à la verticale. Lorsque $\theta > 0$, le système se comporte comme un pendule simple de centre O et de longueur de fil L . À la verticale et en dessous de O , un clou est planté en O' avec $OO' = \frac{L}{3}$, qui bloquera la partie haute du fil vers la gauche : quand $\theta < 0$, le système se comporte donc comme un pendule simple de centre O' et de longueur de fil $\frac{2L}{3}$. À la date $t = 0$, on abandonne sans vitesse initiale le mobile M en donnant au fil une inclinaison initiale $\theta(0) = \theta_0 > 0$. On note t_1 la date de la

première rencontre du fil avec le clou, t_2 la date de première annulation de la vitesse du mobile pour $\theta < 0$. L'intervalle de dates $[0, t_1[$ est nommé première phase du mouvement, l'intervalle $]t_1, t_2]$ est nommé deuxième phase. À la date t_1^- immédiatement inférieure à t_1 , le fil n'a pas encore touché le clou et à la date t_1^+ immédiatement supérieure, le fil vient de toucher le clou.

2 • Établir l'équation différentielle vérifiée par θ pour la première phase du mouvement.

3 • Dans l'hypothèse des petites oscillations, on suppose que $\sin \theta \approx \theta$. Reconnaitre l'équation différentielle d'un certain type d'oscillateur et en déduire, sans résoudre l'équation, la durée δt_1 de la première phase du mouvement.

4 • En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, déterminer la vitesse v de M à la date t_1^- . En déduire la vitesse angulaire $\omega_1^- = \frac{d\theta}{dt}$ à cette date.

5 • Le blocage de la partie supérieure du fil par le clou ne s'accompagne d'aucun transfert énergétique. Déterminer la vitesse v_1^+ de M à la date t_1^+ . En déduire la vitesse angulaire $\omega_1^+ = \frac{d\theta}{dt}$ à cette date.

6 • En utilisant le résultat des questions 2 et 3, donner sans calcul la durée δt_{II} de la deuxième phase.

7 • Déterminer l'expression de l'angle θ_2 à la date t_2 .

8 • Décrire brièvement la suite du mouvement de ce système et donner l'expression de sa période T .

9 • Dresser l'allure du portrait de phase, dans le système d'axes $\left(\theta, \frac{d\theta}{dt}\right)$.

1 Oscillateur harmonique spatial

1 • La force étant centrale, on sait que le moment cinétique $\vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ est une constante du mouvement, qui a lieu dans le plan contenant O et perpendiculaire à \vec{L}_O (si \vec{L}_O est nul, la trajectoire est plus simplement rectiligne).

Pour le rappel élastique proposé, on a :

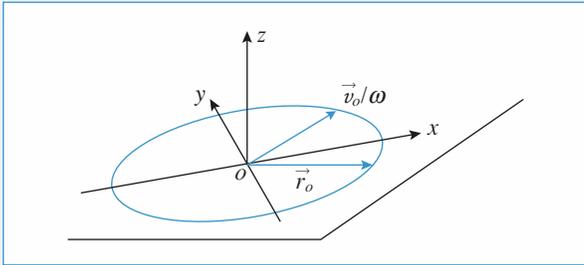
$$m \ddot{\vec{r}} = -k\vec{r} \quad \text{ou} \quad \ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = \vec{0} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

de sorte que la solution $\vec{r}(t)$ est de la forme :

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos \omega(t - t_0) + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin \omega(t - t_0)$$

où \vec{r}_0 et \vec{v}_0 sont les position et vitesse du point M à l'instant t_0 .

La trajectoire est donc plane, et dans ce cas précis elliptique, de centre O .



Doc. 1

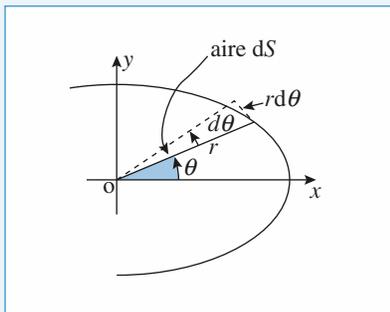
En choisissant, dans le plan de la trajectoire, les axes x et y suivant les axes de l'ellipse, on obtient les équations cartésiennes paramétriques proposées.

Notons que x_0 et y_0 sont de même signe si le point M contourne l'axe (Oz) dans le sens direct.

2 • L'aire élémentaire balayée pendant dt est, à l'ordre 1 en dt :

$$dS = \frac{r r d\theta}{2} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} dt$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 = x_0^2 \cos^2 \omega t + y_0^2 \sin^2 \omega t$ (doc. 2).



Doc. 2

D'autre part : $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0} \tan \omega t$,

$$\text{donc :} \quad \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{y_0}{x_0} \frac{\omega dt}{\cos^2 \omega t}$$

On a donc :

$$dS = \frac{1}{2} r^2 (1 + \tan^2 \theta)^{-1} \frac{y_0}{x_0} \frac{\omega dt}{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{2} x_0 y_0 \omega dt$$

$$\text{et on retrouve :} \quad \frac{dS}{dt} = \frac{x_0 y_0 \omega}{2} = \text{cte}$$

conformément à la loi des aires (en utilisant celle-ci, on aurait pu aussi calculer directement $\frac{dS}{dt}$ à l'instant $t = 0$, ce qui redonne immédiatement le même résultat).

On peut alors écrire $\left| \frac{dS}{dt} \right| = \text{cte} = \frac{S}{T}$, ce qui donne l'aire balayée par la trajectoire :

$$S = T \left| \frac{x_0 y_0 \omega}{2} \right| = \pi |x_0 y_0|, \text{ qui est naturellement l'aire d'une ellipse de demi-grand et petit axes } |x_0| \text{ et } |y_0|.$$

2 Mouvement à force centrale

1 • Le point étant soumis à une force centrale, son mouvement est plan. On repère sa position dans ce plan par ses coordonnées polaires d'origine O , le centre de la force.

On a alors $\vec{OP} = r\vec{e}_r$ et $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. La conservation du moment cinétique s'écrit $L = m r^2 \dot{\theta} = m C$.

L'angle α entre \vec{OP} et \vec{v} vérifie :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{OP} \cdot \vec{v}}{OP v} = \frac{r \dot{r}}{r \sqrt{\dot{r}^2 + (r \dot{\theta})^2}} = \frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2 + \left(\frac{C}{r}\right)^2}}$$

En élevant cette équation au carré, on obtient, après calculs l'équation (1) :

$$(\sin^2 \alpha) \dot{r}^2 = \cos^2 \alpha \frac{C^2}{r^2}. \text{ On dérive cette expression par rapport}$$

au temps, après simplification par $2\dot{r}$, on obtient :

$$\dot{r} \sin^2 \alpha = -\cos^2 \alpha \frac{C^2}{r^3} = f. \quad (1)$$

Or, la relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_r , s'écrit $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m\left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3}\right) = f$.

En utilisant l'équation (1), on a l'expression de f :

$$f = -m \left(\frac{C}{\sin \alpha} \right)^2 \frac{1}{r^3} \quad (\text{avec } \vec{f} = \vec{f} \vec{e}_r).$$

Remarque : On peut aussi écrire $L = m r v \sin \alpha$,

$$\text{d'où } \sin \alpha = \frac{C}{r v}, \text{ puis } r^2 (\dot{r}^2 + \left(\frac{C^2}{r^2}\right) \sin^2 \alpha) = C^2.$$

Tous calculs faits, on retrouve l'équation (1).

2 • L'équation (1) s'écrit aussi $r\dot{r} = \text{cte} = r_0\dot{r}_0$, ou encore

$$\frac{d(r^2)}{dt} = 2r_0\dot{r}_0. \text{ On en déduit } r^2 = 2r_0\dot{r}_0 t + r_0^2,$$

$$\text{d'où : } r(t) = \sqrt{2r_0\dot{r}_0 t + r_0^2}.$$

$$\text{On a de plus } \dot{\theta} = \frac{C}{r^2} = \frac{C}{2r_0\dot{r}_0 t + r_0^2}, \text{ et donc } \dot{\theta}_0 = \frac{C}{r_0^2}$$

$$\text{d'où : } \theta(t) = \frac{C}{2r_0\dot{r}_0} \ln\left(\frac{2\dot{r}_0}{r_0} t + 1\right).$$

En éliminant le temps entre $r(t)$ et $\theta(t)$, on obtient :

$$r = r_0 \exp\left(\frac{r_0\dot{r}_0}{C} \theta\right).$$

Si $\dot{r}_0 \neq 0$, la trajectoire est une spirale (le fait que l'angle entre le rayon et la tangente à la courbe soit constant est une propriété caractéristique des spirales logarithmiques).

Si $\dot{r}_0 = 0$, r est constant : la trajectoire est un cercle.

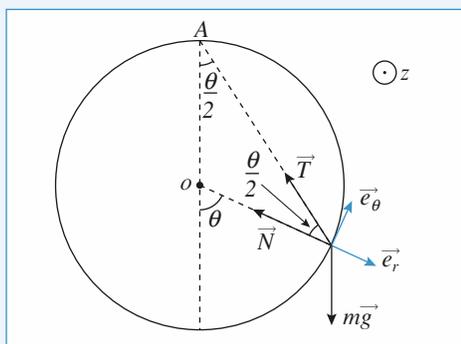
3 • L'énergie de la particule est :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v^2 - m \left(\frac{C}{\sin \alpha}\right)^2 \frac{1}{2r^2} + \text{cte}.$$

On a montré que $v = \frac{C}{r \sin \alpha}$: l'énergie de la particule est constante, ce qui est naturel puisque la force que l'on a déterminée est bien conservative.

3 Rappel élastique le long d'un cercle

1 •



La réaction du support $\vec{N} = N\vec{e}_r$ étant normale au cercle, on peut l'éliminer :

– en utilisant la relation fondamentale de la dynamique, en projection sur \vec{e}_θ ;

– en appliquant le théorème du moment cinétique au point fixe O , car \vec{N} « passe par O » ;

– en utilisant la conservation de l'énergie mécanique, le poids et la traction \vec{T} de l'élastique dérivant d'une énergie potentielle, la réaction \vec{N} ne travaillant pas (normale à tout instant à la vitesse de la masselotte).

Méthode 1

Le poids est $m\vec{g} = mg(\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$.

La traction du ressort est :

$$\vec{T} = k \Delta \ell \left(-\cos \frac{\theta}{2} \vec{e}_r + \sin \frac{\theta}{2} \vec{e}_\theta \right),$$

avec $\Delta \ell = 2R \cos \frac{\theta}{2} - \ell_0$ et θ variant entre $-\pi$ et π .

La relation fondamentale de la dynamique donne, en projection sur \vec{e}_θ :

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta + k \left(R \sin \theta - \ell_0 \sin \frac{\theta}{2} \right).$$

Méthode 2

Le moment cinétique en O est $\vec{L}_O = mR^2\dot{\theta}\vec{e}_z$.

Le bras de levier associé à la traction de l'élastique est :

$d = R \sin \frac{\theta}{2}$, son moment en O est donc :

$$\mathcal{M}_{\vec{T}/O} = k \Delta \ell d \vec{e}_z = k \left(R^2 \sin \theta - \ell_0 R \sin \frac{\theta}{2} \right) \vec{e}_z.$$

Le moment du poids en O est :

$$\mathcal{M}_{m\vec{g}/O} = -mgR \sin \theta \vec{e}_z.$$

Le théorème du moment cinétique, appliqué en O , donne donc :

$$mR^2\ddot{\theta} = -mgR \sin \theta + k \left(R^2 \sin \theta - \ell_0 R \sin \frac{\theta}{2} \right)$$

ce qui est conforme au résultat précédent.

Méthode 3

L'énergie cinétique vaut : $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$.

L'énergie potentielle est, à une constante près (en notant $\Delta \ell$ l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre) :

$$\mathcal{E}_p = -mgR \cos \theta + \frac{1}{2} k \Delta \ell^2$$

$$= -mgR \cos \theta + \frac{1}{2} k (2R^2 (1 + \cos \theta) - 4 \ell_0 R \cos \frac{\theta}{2} + \ell_0^2).$$

En dérivant par rapport au temps l'équation de conservation de l'énergie $\mathcal{E}_K + \mathcal{E}_p = \text{cte}$, on retrouve encore l'équation d'évolution de la position du point M .

2 • L'équation du mouvement :

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m} \right) \sin \theta + \frac{k\ell_0}{mR} \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

nous indique les positions d'équilibre ($\ddot{\theta} = 0$) pour :

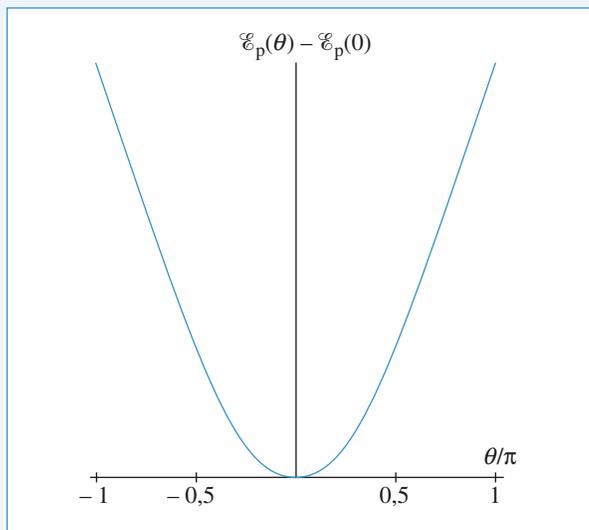
$$\sin \frac{\theta}{2} \left[2 \left(\frac{g}{R} - \frac{k}{m} \right) \cos \frac{\theta}{2} + \frac{k\ell_0}{mR} \right] = 0.$$

La position d'équilibre $\theta = 0$ apparaît ici, ainsi éventuellement que les solutions $\pm \theta_0$, où l'angle θ_0 , compris entre 0 et π , est donné par :

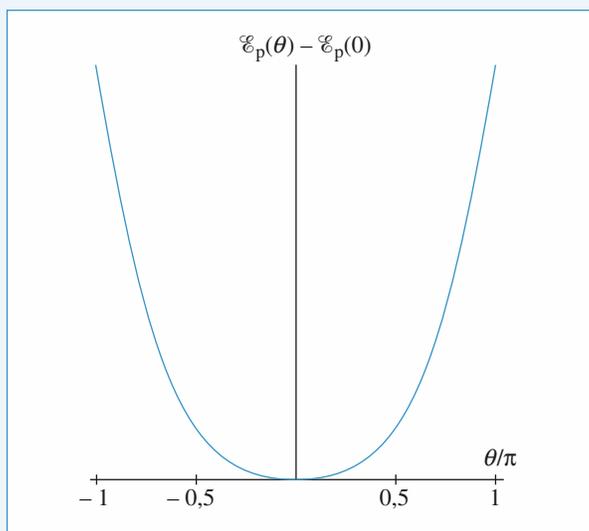
$$\cos \frac{\theta_0}{2} = \frac{\ell_0}{2 \left(R - \frac{mg}{k} \right)}.$$

Ces deux dernières positions ont un sens lorsque l'angle θ_0 est défini entre $-\pi$ et π , donc si $kR > mg$, et dans ce cas, pour $k\ell_0 < 2(kR - mg)$.

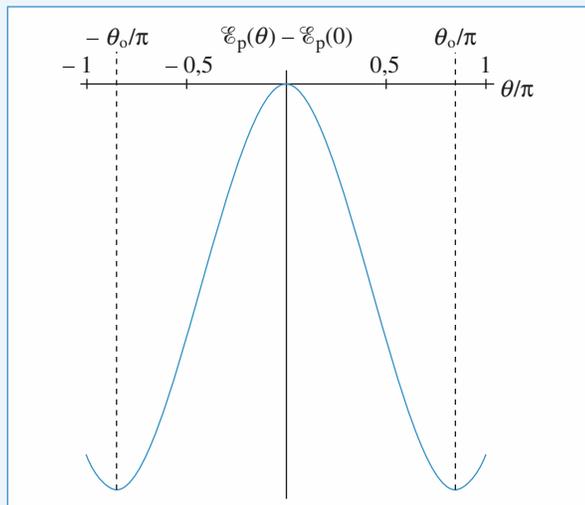
On peut retrouver ces conclusions sur les tracés des variations de $\mathcal{E}_p(\theta) - \mathcal{E}_p(0)$ dans les trois cas utiles, pour θ variant de $-\pi$ à π :



Cas. 1. $mg > kR$.



Cas. 2. $mg < kR$ et $k\ell_0 > 2(kR - mg)$.



Cas. 3. $mg < kR$ et $k\ell_0 < 2(kR - mg)$.

Au voisinage d'une position d'équilibre on note : $\theta = \theta_{\text{eq}} + \varepsilon$. L'équation du mouvement est alors :

$$\begin{aligned} \ddot{\varepsilon} &= \left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R} \right) \sin(\theta_{\text{eq}} + \varepsilon) - \frac{k\ell_0}{mR} \sin\left(\frac{\theta_{\text{eq}} + \varepsilon}{2}\right) \\ &= 0 + \left[\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R} \right) \cos\theta_{\text{eq}} - \frac{k\ell_0}{2mR} \cos\left(\frac{\theta_{\text{eq}}}{2}\right) \right] \varepsilon + \dots \end{aligned}$$

Pour $\theta_{\text{eq}} = 0$, on obtient, à l'ordre linéaire :

$$\ddot{\varepsilon} = \left[\left(\frac{k}{m} - \frac{g}{R} \right) - \frac{k\ell_0}{2mR} \right] \varepsilon.$$

Cette équation est de la forme $\ddot{\varepsilon} = -\Omega^2\varepsilon$ dans les cas : $[mg > kR]$ et $[mg < kR$ et $k\ell_0 > 2(kR - mg)]$, pour lesquels cette position d'équilibre, unique, est alors stable. On

obtient ainsi de petites oscillations de période $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ au voisinage de $\theta_{\text{eq}} = 0$.

Pour $\theta_{\text{eq}} = \pm\theta_0$, l'équation linéarisée est :

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{k}{m} \frac{\ell_0^2 - 4\left(R - \frac{mg}{k}\right)^2}{4R\left(R - \frac{mg}{k}\right)} \varepsilon.$$

Elle est de la forme $\ddot{\varepsilon} = -\Omega^2\varepsilon$, la position $\pm\theta_0$ étant stable dès lors qu'elle existe.

4 Déviation d'une particule par un puits de potentiel

1 • À la traversée du dioptré de rayon R , la particule chargée subit l'effet d'une force radiale, dirigée vers le point O : sa trajectoire reste dans le plan de figure, le moment cinétique au point O est conservé.

La force électrique $q\vec{E}$ est associée à l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = qV$. L'énergie mécanique $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + qV$ est, elle aussi, conservée.

La conservation du moment cinétique nous donne :

$$(R \sin \alpha)(mv_0) = (R \sin \beta)(mv)$$

et celle de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} mv^2 - qV_0.$$

On en déduit la relation « de Descartes » :

$$1 \sin \alpha = n \sin \beta$$

où l'indice n associé à la sphère de rayon R vaut :

$$n = \sqrt{1 + \frac{qV_0}{mV_0^2}} = \sqrt{1 + \frac{qV_0}{2 \mathcal{E}_{K0}}}.$$

2 • À la sortie de la sphère, on retrouve naturellement :

$$\alpha' = \alpha \text{ et } v' = v.$$

La déviation est $D = 2(\alpha - \beta)$.

On peut déterminer la position de F' , car :

$$x_J = R \cos(\alpha - D) \text{ et } y_J = R \sin(\alpha - D).$$

Donc : $\overline{OF'} = x_{F'} = x_J + \frac{y_J}{\tan D}$.

Il est clair que la position de F' dépend de l'angle α , et le système n'est donc pas stigmatique pour un faisceau de particules homocinétique dirigé parallèlement à l'axe (Ox).

On constate que dans les conditions de Gauss, donc pour α petit, on a stigmatisme approché car ($\alpha \ll 1$) :

$$\beta \approx \frac{\alpha}{n}; D = 2(\alpha - \beta) = 2\alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right);$$

$$\alpha - D \approx \alpha \left(-1 + \frac{2}{n}\right); y_J \approx R\alpha \left(-1 + \frac{2}{n}\right);$$

$$\frac{1}{\tan D} \approx \frac{1}{D}$$

$$\frac{y_J}{\tan D} \approx \frac{R\alpha \left(-1 + \frac{2}{n}\right)}{2\alpha \left(1 - \frac{1}{n}\right)} = \frac{R}{2} \frac{-1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}}$$

$$x_{F'} \approx R + \frac{R}{2} \frac{-1 + \frac{2}{n}}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{R}{2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)}.$$

5 Particule évoluant dans un cône

1 • La rotation autour de l'axe (Oz) nous fait naturellement considérer le moment cinétique du point M par rapport à cet axe. Celui-ci vaut :

$$L_z = (m\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z \\ = m[(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \wedge (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z)] \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}.$$

Les actions subies par le point M sont son poids, qui est vertical, et la réaction du cône, perpendiculaire à la surface de celui-ci, et qui passe donc par l'axe (Oz) : le moment des actions subies par rapport à l'axe fixe (Oz) est nul, donc L_z est une constante du mouvement.

Cette constante est indiquée par les conditions initiales :

$$L_z = mr_0 v_0 = mz_0(\tan \alpha)v_0.$$

On voit donc que le signe de $\dot{\theta}$ ne change jamais : le point M contourne toujours l'axe (Oz) dans le même sens. De plus r ne peut pas s'annuler : le point M ne tombe pas au fond du cône (sauf si $L_z = 0$, soit $v_0 = 0$).

2 • Le poids travaille et dérive de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p = mgz$. La réaction du cône ne travaille pas. L'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + mgz$$

est donc aussi une constante du mouvement.

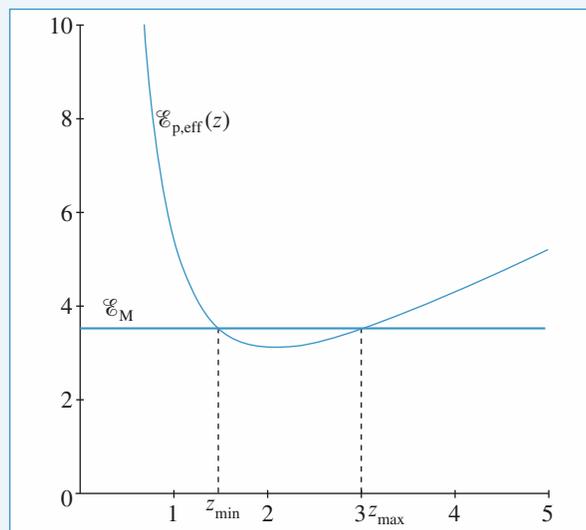
En utilisant l'équation du cône : $r = z \tan \alpha$ et l'expression de L_z , il vient alors :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} m(1 + \tan^2 \alpha)\dot{z}^2 + \frac{L_z^2}{2m \tan^2 \alpha} \frac{1}{z^2} + mgz = \text{cte}$$

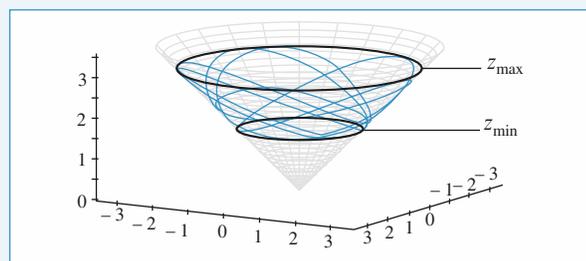
on en déduit que l'évolution de l'altitude z est soumise à la contrainte :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(z) = \frac{L_z^2}{2m \tan^2 \alpha} \frac{1}{z^2} + mgz \leq \mathcal{E}_M$$

de sorte que z évolue entre z_{\min} et z_{\max} , altitudes extrêmes pour lesquelles l'inégalité précédente devient une égalité. Ces valeurs limites se devinent aisément sur la trajectoire. Notons qu'avec les conditions initiales proposées, z_0 coïncide avec l'une de ces valeurs limites.



Doc. 1



Doc. 2

3 • La trajectoire est circulaire si la valeur de l'énergie mécanique correspond juste au minimum de l'énergie potentielle effective, ce qui impose la relation :

$$\frac{v_0^2}{z_0} = g.$$

6 Pendule à deux longueurs

1 • Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m s'écrit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}.$$

En multipliant scalairement par \vec{v} , on obtient :

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \vec{f} \cdot \vec{v}.$$

\vec{f} étant partout définie, $\vec{f} \cdot \vec{v}$ n'est pas infinie et v^2 est donc une fonction continue du temps, de même que v .

2 • Lors de la première phase du mouvement, le théorème du moment cinétique appliqué à m en O donne :

$$mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta$$

3 • Dans l'hypothèse des petites oscillations, $\sin \theta \approx \theta$.

$$\text{Soit } \ddot{\theta} + \frac{g}{L} \theta = 0.$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

δt_1 correspond au quart de cette période, soit :

$$\delta t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

$$\mathbf{4 \bullet} \quad E_M = \frac{1}{2} m v^2 + mgL (1 - \cos \theta).$$

La tension du fil ne travaille pas donc l'énergie mécanique de m est constante.

$$\text{À } t = 0, \text{ on obtient } E_M = mgL (1 - \cos \theta_0).$$

$$\text{À } t = t_1, E_M = \frac{1}{2} m v_1^{-2} = mgL (1 - \cos \theta_0).$$

$$v_1 = \sqrt{2gL (1 - \cos \theta_0)} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{v_1}{L} = \sqrt{\frac{2g}{L} (1 - \cos \theta_0)}.$$

5 • Au moment du blocage par le clou, il n'y a pas de transfert d'énergie, donc

$$E_M = \frac{1}{2} m v_1^{-2} = \frac{1}{2} m v_1^{+2} \quad v_1^+ = v_1^-.$$

La longueur du pendule devient $\frac{2L}{3}$

$$\text{donc } \omega_1^+ = \frac{3v_1^+}{2L} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2g}{L} (1 - \cos \theta_0)}.$$

$$\mathbf{6 \bullet} \quad \delta t_{II} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{2L}{3g}}.$$

7 • Pendant la deuxième phase

$$E_M = \frac{1}{2} m v^2 + mg \frac{2L}{3} (1 - \cos \theta_0).$$

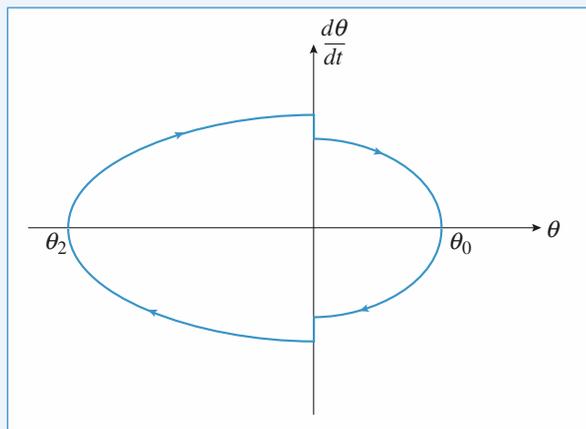
À la date t_2 , $v = 0$.

$$mg \frac{2L}{3} (1 - \cos \theta_2) = mgL (1 - \cos \theta_0).$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \cos \theta_0.$$

8 • Le pendule redescend alors jusqu'à $\theta = 0$ puis remonte avec la longueur L jusqu'à l'angle θ_0 et ainsi de suite.
 $T = 2(\delta t_1 + \delta t_{II})$.

9 •



Le portrait de phase comporte deux décrochements qui correspondent aux variations brusques de $\frac{d\theta}{dt}$.

6

Forces centrales conservatives Interaction newtonienne

LES OBJECTIFS

- Mettre en œuvre les lois de conservation pour étudier le mouvement de particules dans un champ newtonien.

LES PRÉREQUIS

- Notions d'énergie, de moment cinétique.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Coordonnées polaires, coniques.

ESSENTIEL

◀ Force centrale conservative

Un champ de force centrale conservative de centre O est de la forme $\vec{F} = F(r) \vec{e}_r$, avec :

$F(r) = -\frac{d\mathcal{E}_p(r)}{dr}$, $\mathcal{E}_p(r)$ désignant l'énergie potentielle (définie à une constante près) associée à ce champ de force.

Un point matériel évoluant dans un tel champ de force décrit une trajectoire plane (notons \vec{N} la normale de ce plan), voit son moment cinétique $\vec{L}_O = mC\vec{N}$ au centre du champ de force et son énergie mécanique $\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_p(r)$ conservée au cours du mouvement. Le domaine des valeurs de r accessible à la trajectoire est défini par $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \leq \mathcal{E}_M$, où la fonction énergie potentielle effective est définie par :

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

où C est la constante des aires du mouvement plan.

◀ Champ newtonien

• Champ de force

Le champ de force est de la forme $\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$. L'énergie potentielle, prise nulle à l'infini, est

alors $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{\alpha}{r}$. Le champ est attractif pour $\alpha > 0$, répulsif sinon. La force de gravitation

$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$ attirant le point matériel de masse m vers un astre de masse M à symétrie sphérique en est un exemple, et permet de comprendre l'essentiel de la mécanique du système solaire, par exemple.

• Constantes du mouvement

Soit un mouvement de point matériel dans un champ newtonien de centre O défini par un champ de force de la forme $\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$.

Pour ce mouvement le moment cinétique \vec{L}_O et l'énergie mécanique \mathcal{E}_M se conservent.

Pour un champ de force newtonien de la forme $\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$, on peut définir le vecteur de Runge-

$$\text{Lenz } \vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r.$$

Pour ce mouvement, le vecteur de Runge-Lenz se conserve : il est parallèle au rayon vecteur \vec{r} lorsque la distance r au centre O de la force passe par une valeur extrême, et de norme e , excentricité de la conique, trajectoire du point matériel.

• Trajectoires

Les équations du mouvement peuvent être résolues exactement, et les trajectoires obtenues sont

des coniques, d'équation polaire $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$:

- cas répulsif : $e > 1$, $\mathcal{E}_M > 0$ – branche d'hyperbole (état de diffusion) ;
- cas attractif : $e < 1$, $\mathcal{E}_M < 0$ – ellipse (état lié) ;
- $e = 1$, $\mathcal{E}_M = 0$ – parabole ;
- $e > 1$, $\mathcal{E}_M > 0$ – branche d'hyperbole (état de diffusion).

Pour une trajectoire circulaire de rayon a (plus généralement, pour une ellipse de demi-grand

axe a), l'énergie vaut $\mathcal{E}_M = -\frac{\alpha}{2a}$.

• Lois de Kepler

Pour le système solaire, où le champ de gravitation solaire est le champ newtonien prépondérant agissant sur les planètes, des observations astronomiques ont conduit à l'énoncé des trois lois de Kepler.

Première loi

Chaque planète décrit une ellipse dont le Soleil est un foyer.

Deuxième loi

L'aire balayée par le rayon Soleil-planète est proportionnelle au temps mis pour la décrire (loi des aires).

Troisième loi

Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est une constante dans le système solaire.

Conseils et pièges à éviter

- Pour les forces centrales conservatives de centre O , ne pas oublier que :
 - le moment cinétique se conserve $\vec{L}_O = mC\vec{N}$, avec C la constante des aires, et \vec{N} normale au plan de la trajectoire ;
 - l'énergie mécanique se conserve.
- Le vecteur de Runge-Lenz ne s'utilise que pour une interaction newtonienne.
- Les lois de Kepler ne s'utilisent que pour une interaction newtonienne.

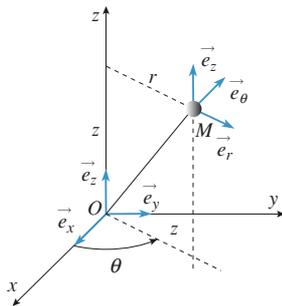
1 Orbitogramme de la Villette

D'après Banque Agro-Véto, 2007.

A. Étude cinématique

On considère un référentiel galiléen associé au repère orthonormé $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, l'axe Oz est vertical ascendant. La position d'un point matériel M sera définie par ses coordonnées cylindriques, r ($r > 0$), θ et z .

On notera respectivement \vec{e}_r et \vec{e}_θ les vecteurs unitaires déduits de \vec{e}_x et \vec{e}_y par rotation d'angle θ autour de Oz .



- Exprimer \overline{OM} dans la base cylindrique.
- En déduire la vitesse $\vec{v}(M)$ dans cette même base.
- Montrer que l'accélération peut se mettre sous la forme :

$$\vec{a}(M) = \left(\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{e}_z.$$

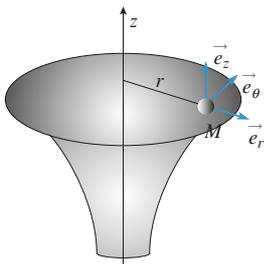
- Montrer que $\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta$ peut s'écrire aussi :

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right)$$

B. Étude dynamique et énergétique

On étudie le mouvement d'une bille d'acier M , de masse m assimilée à un point matériel sur une surface de révolution. La surface sur laquelle roule la bille est engendrée par la révolution d'une portion d'hyperbole, $z = \frac{-k}{r}$, $k > 0$.

La bille se comporte sur cette surface comme un corps céleste soumis à une force de gravitation.



- Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par un point M_1 de masse m_1 sur un point M_2 de masse m_2 . On notera $r = M_1 M_2$ la distance entre les points et $\vec{u} = \frac{\overline{M_1 M_2}}{r}$ le vecteur unitaire orienté de M_1 vers M_2 .

- Montrer que cette force dérive d'une énergie potentielle dont on établira l'expression. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

On revient à l'étude de la bille.

On néglige les frottements. La réaction normale du support sera notée :

$$\vec{R}_N = R_r \vec{e}_r + R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z.$$

- Justifier sans calcul que $R_\theta = 0$.
- Faire un bilan des forces s'exerçant sur la bille. Préciser si ces forces dérivent d'une énergie potentielle. Dans l'affirmative, préciser l'expression de l'énergie potentielle associée en fonction de la variable r uniquement. On choisira l'origine de l'énergie potentielle lorsque r tend vers l'infini.

- Écrire le principe fondamental de la dynamique et faire la projection dans la base cylindrique.

En déduire que la quantité $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante notée C .

- Exprimer l'énergie mécanique sous la forme :

$$E_m = \frac{1}{2} m \alpha(r) \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}. \text{ Préciser } \alpha(r) \text{ en}$$

fonction de k et r .

Que peut-on dire de l'énergie mécanique ?

- On peut donc définir une énergie potentielle effective

$$E_{\text{peff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{mgk}{r}.$$

Tracer l'allure de la courbe $E_{\text{peff}}(r)$.

En fonction de la valeur de l'énergie mécanique initiale du système E_0 , discuter le caractère lié ou libre du mouvement.

- Pour quelle valeur de r a-t-on un mouvement circulaire ?

On exprimera le rayon du mouvement circulaire r_C en fonction de C , g et k .

- On lance la bille d'une distance r_0 avec une vitesse \vec{v}_0 . Préciser la direction et le module de \vec{v}_0 pour avoir un mouvement circulaire.

Conseils

A. Cf. cours.

B.3. S'il n'y a pas de frottements $\vec{R} \cdot \vec{v} = 0$, donc \vec{R} est normal à la surface.

2 Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ de force en $\frac{1}{r^n}$

Un point matériel de masse m évolue dans le champ de force centrale $F(r)\vec{e}_r$, de centre O .

1 • Quelle relation lie le rayon r_0 et la vitesse v_0 dans le cas d'une trajectoire circulaire ?

2 • L'objet subit une perturbation de vitesse, de sorte qu'à $t = 0$:

$r(0) = r_0$, $v_\theta(0) = r\dot{\theta}_0(0) = v_0$ et $v_r(0) = \dot{r}(0) = \alpha v_0$, avec $|\alpha| \ll 1$.

Étudier l'évolution du rayon $r(t)$ au voisinage de r_0 , et établir un critère que doit vérifier le champ de force pour que l'évolution ultérieure se fasse au voisinage du cercle initial.

2 • Que devient cette condition pour un champ de force en $\frac{1}{r^n}$? Qu'en est-il pour le cas newtonien ?

Conseils

- 1) Quelle est l'accélération pour un mouvement circulaire ? Ce mouvement est-il uniforme ?
- 2) Écrire l'équation du mouvement radial en utilisant la constante des aires.
- 3) *A priori*, il vaut mieux trouver que le champ newtonien donne une solution stable...

3 Chez le petit prince

Évaluer le rayon d'une planète telle qu'en sautant à pieds joints, on puisse échapper à la pesanteur.

Conseil

Que faut-il faire pour réaliser un état de diffusion ?

4 Lancement d'un satellite GPS

Le lancer d'un satellite depuis une navette spatiale s'effectue en trois étapes successives : la navette est d'abord mise sur orbite circulaire, au moyen de fusées auxiliaires ; à partir de cette orbite circulaire, la navette éjecte le satellite qui gagne progressivement une altitude plus élevée ; enfin, une fois parvenu à son altitude définitive, le satellite s'y stabilise au moyen d'un dispositif de freinage. Dans la première phase, la navette et son satellite sont solidaires. Avec l'équipage et la charge utile, l'ensemble est assimilé à un point matériel unique de masse M . Le tout est en orbite circulaire d'altitude h et de rayon $r = R + h$, où R est le rayon de la Terre. On appelle g_0 l'accélération de la pesan-

teur au niveau du sol. On prendra $g_0 = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et $R = 6\,400 \text{ km}$ pour les applications numériques.

1 • Déterminer, dans le référentiel géocentrique (\mathcal{G}) supposé galiléen, en fonction des constantes M , R et g_0 , la vitesse $v(r)$, la vitesse angulaire $\omega_0(r)$ et l'énergie mécanique $\mathcal{E}(r)$ de l'ensemble.

2 • Avant le lancement, la fusée était placée sur un pas de tir situé à la latitude λ . Déterminer la variation d'énergie mécanique entre le lancement (avant la mise en route des fusées) et l'arrivée sur orbite circulaire, en fonction de r , R , M , g_0 , λ et T , période de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

3 • Commenter le choix de λ permettant, avec des moteurs donnés, la mise en orbite la plus favorable.

4 • *A.N.* : L'orbite à atteindre est située à l'altitude de 300 km. Calculer l'économie d'énergie réalisée par unité de masse du système lancé, lors du passage du pas de tir d'Edwards (Californie, $\lambda_1 = 34^\circ 50' \text{N}$) à celui de Cap Canaveral (Floride, $\lambda_2 = 28^\circ 30' \text{N}$) (à titre documentaire, un gramme d'essence fournit typiquement 40 kJ dans un moteur à explosion). Commenter.

5 • *A.N.* : Déterminer l'altitude H qu'il faut atteindre pour obtenir la période de rotation de 12 heures qui est celle des satellites du système GPS.

Conseils

- 1) Projeter la relation fondamentale de la dynamique, appliquée à l'ensemble {navette + satellite + équipage + matériel} sur son orbite circulaire, sur la normale au mouvement.
- 2) Sur le pas de tir, la vitesse de la fusée est égale à la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même en ce point.

5 Transfert d'un satellite

(Concours national DEUG 2008)

La Terre est considérée comme un astre sphérique de centre O , de rayon R et de masse M . Le référentiel géocentrique est supposé galiléen. La Terre est animée par rapport à ce référentiel d'un mouvement de rotation uniforme de période T_1 .

On désigne par g_0 l'intensité du champ de gravitation terrestre à la surface de la Terre.

On place un satellite (S) de masse m sur une orbite circulaire C_0 située dans le plan équatorial et d'altitude z faible devant R .

On considère que sur l'orbite C_0 le satellite est soumis au champ de pesanteur \vec{g}_0 identique à celui qui règne au niveau du sol.

1 • Déterminer la vitesse v du satellite (S) en fonction de g_0 et R .

2 • Exprimer la période T_0 du satellite (S) en fonction de g_0 et R .

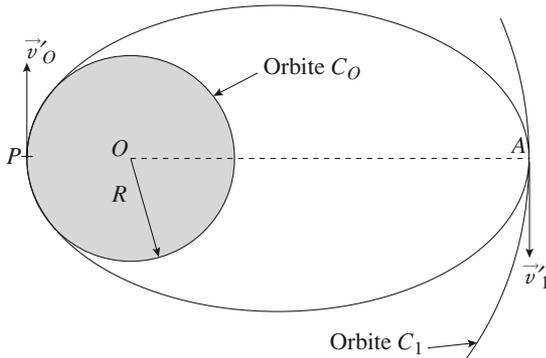
3 • Déterminer la vitesse v_E d'un point de l'équateur terrestre en fonction de R et T_1 ainsi que le rapport $\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2$.

4 • **Application numérique :**

Calculer le rapport $\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2$ pour $R = 6\,400$ km,

$g_0 = 9,81$ m·s⁻² et $T_1 = 24$ h.

Dans la suite du problème, on négligera v_E^2 devant v_0^2 .



On place maintenant le satellite (S) sur une nouvelle orbite C_1 située dans le plan équatorial. On désire que (S) soit vu immobile de tout point de la surface terrestre. On ne considère plus que z est très petit devant R .

5 • Exprimer le champ de pesanteur g en fonction de g_0 .

6 • Déterminer le rayon R_1 de cette nouvelle orbite C_1 .

En déduire le rapport $x = \frac{R_1}{R}$.

7 • Déterminer la vitesse v_1 du satellite (S) sur l'orbite C_1 en fonction de x et v_0 .

8 • Exprimer en fonction de $K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$ et de x , le travail

W nécessaire pour amener le satellite (S) sur l'orbite C_1 depuis la surface terrestre.

La mise en orbite géostationnaire du satellite (S) est réalisée de la manière suivante :

– **Phase 1 :** On lance le satellite (S) depuis la surface terrestre sur l'orbite C_0 . On désigne par W_1 le travail nécessaire à cette opération.

– **Phase 2 :** En un point P de C_0 , on communique au satellite (S) en un temps très bref une nouvelle vitesse v'_0 de manière à le placer sur une orbite elliptique tangente à C_1 au point A .

On désigne par v'_1 la vitesse du satellite (S) à son arrivée au point A .

– **Phase 3 :** Au point A , on fait passer la vitesse du satellite (S) de v'_1 à v_1 .

9 • Exprimer W_1 le travail nécessaire à la phase 1 en fonction de K_0 .

10 • Déduire de l'énergie sur C_0 et sur la trajectoire elliptique la vitesse v'_0 en fonction de v_0 et de x .

11 • Exprimer le travail W_2 nécessaire à la phase 2 en fonction de K_0 et de x .

12 • Déterminer la vitesse v'_1 en fonction de v_0 et de x .

13 • Exprimer le travail W_3 nécessaire à la phase 3 en fonction de K_0 et de x . Comparer le travail W calculé à la question 8 et la somme $W_1 + W_2 + W_3$.

14 • Déduire de la 3^e loi de Kepler la durée t du transfert du satellite (S) de l'orbite C_0 à l'orbite C_1 en fonction de T_1 et de x .

6 *Trajectoire d'une comète

On considère que la Terre décrit autour du Soleil une trajectoire circulaire de rayon $R_T = 150 \cdot 10^9$ m, avec la période T_0 , à la vitesse v_T . Une comète décrit une orbite dans le même plan que celle de la Terre. Elle passe le plus près du Soleil à une distance kR_T , sa vitesse en ce point est v_1 .

1 • Déterminer la vitesse v de la comète lorsqu'elle coupe l'orbite terrestre en fonction de k , v_T et v_1 .

A.N. : $k = 0,42$, $v_T = 30,00 \cdot 10^3$ m·s⁻¹ et

$v_1 = 65,08 \cdot 10^3$ m·s⁻¹. Calculer v .

2 • Montrer que la comète décrit une orbite elliptique. Exprimer son demi-grand axe a sous la forme $a = \lambda R_T$. Déterminer son excentricité e en fonction de v_T , v_1 et k . Donner la période de révolution T de la comète sous la forme $T = nT_0$.

A.N. : Calculer λ , e et n .

3 • Pendant combien de temps reste-t-elle dans l'orbite terrestre, c'est-à-dire $r = SC \leq R_T$? Cette durée donne l'ordre de grandeur de la durée de visibilité de la comète depuis la Terre, elle sera mise sous la forme d'une intégrale, puis, comme on n'en cherche qu'un ordre de grandeur, on prendra $e = 1$ pour effectuer le calcul, et on

utilisera $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{(1 + \cos \theta)^2} = \frac{1}{2} \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1}{6} \tan^3\left(\frac{\theta_0}{2}\right)$.

Conseils

1) Utiliser la conservation de l'énergie de la comète en l'exprimant au point de sa trajectoire le plus proche du Soleil et au point où elle coupe l'orbite terrestre.

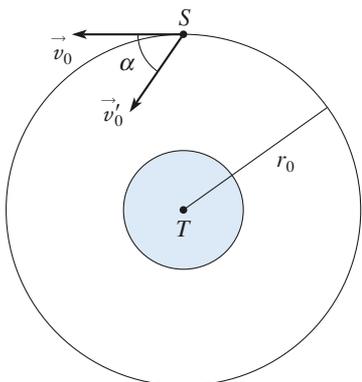
2) Déterminer le signe de l'énergie de la comète. Exprimer a en fonction de l'énergie de la comète pour obtenir la relation $a = \lambda R_T$.

3) À partir de l'équation traduisant la conservation du moment cinétique, isoler $\dot{\theta}$ et le mettre sous la forme $\dot{\theta} = f(\theta)$.

En déduire l'ordre de grandeur de la durée de visibilité de la comète depuis la Terre en utilisant les hypothèses simplificatrices de l'énoncé.

7 Incident sur un satellite

Un satellite se trouve sur une orbite circulaire, de rayon r_0 , autour de la Terre lorsqu'un incident se produit modifiant la direction de la vitesse d'un angle α , sans changer sa norme v_0 .



- 1 • Montrer que la nouvelle trajectoire du satellite est une ellipse de demi-grand-axe égal à r_0 .
- 2 • Montrer, en utilisant le vecteur Runge-Lenz \vec{A} (cf. l'Essentiel) que l'excentricité e de l'ellipse est $e = \sin \alpha$.
- 3 • Le satellite tournant initialement à 700 km d'altitude, pour quelles valeurs de α s'écrasera-t-il sur la Terre ?

Conseils

1) Quelle est l'énergie \mathcal{E} du satellite après l'incident ? En déduire la valeur du demi-grand axe a de l'ellipse grâce à la relation entre a et \mathcal{E} .

2) Rappelons que le vecteur Runge-Lenz :

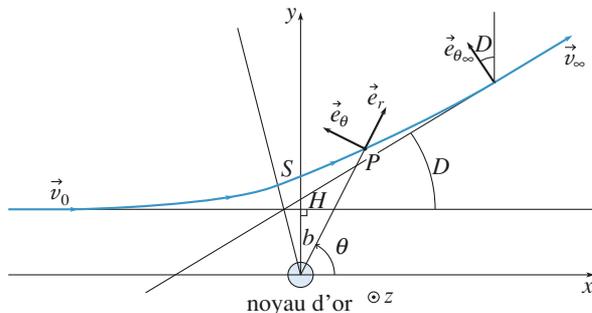
$$\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge L_O}{k} - \vec{e}_r, \text{ avec } \vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

est parallèle au rayon vecteur \vec{r} lorsque la distance r au centre de la force passe par une valeur extrême et de norme e , excentricité de la trajectoire.

3) Le satellite s'écrasera sur la Terre si le périégée de la trajectoire passe sous la surface terrestre.

8 * Mouvement hyperbolique répulsif. Expérience de Rutherford

Une particule α de masse m et de charge $q = 2e$, venant de l'infini avec une vitesse \vec{v}_0 , s'approche avec un paramètre d'impact $b = OH$ d'un noyau cible (noyau d'or) de masse $M \gg m$ et de charge Ze .



- 1 • Montrer que :

$$\vec{v}_\infty - \vec{v}_0 = -\frac{k}{mv_0 b} (\vec{e}_{\theta_\infty} - \vec{e}_{\theta_0}), \text{ où } k = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$$

et où l'indice 0 concerne les grandeurs au départ et l'indice ∞ les grandeurs quand la particule est de nouveau infiniment éloignée du noyau.

- 2 • En déduire la déviation D de la particule en fonction de k, m, b et v_0 .
- 3 • Déterminer la distance minimale r_{\min} de plus courte approche du noyau.

Conseils

1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique et remarquer que \vec{e}_r s'exprime simplement en fonction de $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$.

Intégrer alors l'équation obtenue entre le départ P_0 et un point P_∞ , où la particule est de nouveau infiniment éloignée du noyau.

Attention à l'orientation des vecteurs.

2) Que peut-on dire du module du vecteur vitesse aux points P_0 et P_∞ ? Projeter alors l'équation obtenue à la question 1).

3) On peut utiliser la conservation de l'énergie.

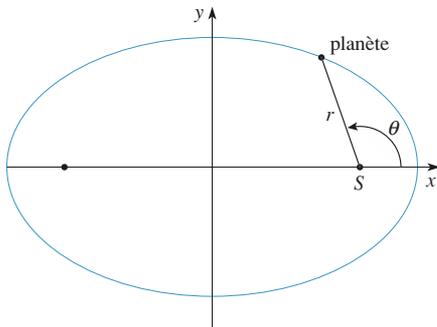
9 Correction relativiste. Avance du périhélie de Mercure

1 • Préliminaire

a) Soit un champ de force newtonien de la forme $\vec{F} = -\alpha \frac{\vec{e}_r}{r^2}$; en utilisant le vecteur de Lenz $\vec{A} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{L}_O}{\alpha} - \vec{e}_r$,

retrouver l'équation polaire $r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$ de l'ellipse trajectoire décrite par une planète autour du Soleil. Relier en particulier le paramètre p à m , $\vec{L}_O = L\vec{e}_z$ et α constante d'interaction à préciser.

b) Exprimer p à l'aide de r_A et r_P , distances en périhélie et à l'apogée de la trajectoire.



2 • Avance du périhélie

En Relativité Générale, le mouvement d'une planète de masse m autour du Soleil, assimilé à une sphère homogène de masse M_0 et de centre S , doit être décrit comme si au potentiel d'attraction newtonienne subi par la masse (de la forme $V(r) = -G \frac{M_0 m}{r}$) se superposait un potentiel

perturbateur $V_p(r) = \frac{GM_0}{c^2} \frac{L^2}{m} \frac{1}{r^3} = \frac{-\varepsilon}{3r^3}$, où c désigne la vitesse de la lumière ($c = 3.10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$).

On prendra $M_0 = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ (on suppose que $M_0 \gg m$ de telle sorte que l'on peut considérer le Soleil comme immobile). On traitera V_p comme une perturbation par rapport au potentiel newtonien V .

a) Quelle condition doit satisfaire le mouvement de la planète pour qu'il en soit ainsi ? Vérifier rapidement si l'on peut appliquer cette approximation à la Terre et à Mercure (dont la période de révolution autour du soleil est de 88 jours). On rappelle que la distance Terre-Soleil est $R_T = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$. On admet alors qu'en première approximation la trajectoire de la planète reste sensiblement elliptique. On appelle (Ox) l'axe focal et (Oy) l'axe perpendiculaire à (Ox) .

b) Exprimer $\frac{d\vec{A}}{dt}$ où \vec{A} est le vecteur de Runge-Lenz, en fonction de ε , G , M_0 , θ et $\frac{d\theta}{dt}$ ainsi que de

l'excentricité e et du paramètre $p = \frac{L^2}{m^2 GM_0}$ de l'ellipse.

Ce vecteur sera exprimé dans la base polaire puis dans la base cartésienne (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . En déduire que la variation $\Delta \vec{A}$ du vecteur \vec{A} pendant une période de révolution de la planète sur sa trajectoire elliptique est égale à : $\Delta \vec{A} = 2e\pi \frac{\varepsilon}{GM_0 p^2} \vec{e}_y$.

Données :

$$\int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^2 \cos \theta \, d\theta = 2e\pi \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \theta)^2 \sin \theta \, d\theta = 0.$$

En déduire que le potentiel perturbateur V_p d'origine relativiste entraîne une déformation de la trajectoire correspondant à une rotation lente du grand axe de l'ellipse, dans son plan, autour du Soleil.

c) Calculer l'angle $\Delta\phi$ dont tourne la trajectoire de la planète pendant une période de révolution en fonction de G , M_0 , c et des distances maximale et minimale, r_A et r_P , de la planète au Soleil.

d) En déduire « l'avance séculaire » $\delta\Omega$ pour une planète dont la période de révolution, exprimée en jours sidéraux, est T , c'est-à-dire l'angle dont a tourné le grand axe de sa trajectoire au bout d'un siècle (on rappelle qu'un an correspond à $T_0 = 365,25$ jours sidéraux).

Calculer $\delta\Omega$ en secondes d'arc (1 seconde d'arc est égale à $\frac{1}{3600}$ degré) pour Mercure, dont l'aphélie se trouve à $7,0 \cdot 10^{10} \text{ m}$ du Soleil et le périhélie à $4,6 \cdot 10^{10} \text{ m}$. Expérimentalement, on trouve $\delta\Omega = 42,6 \pm 0,9$ secondes d'arc. La théorie relativiste rend-elle effectivement compte de cette valeur ?

Conseils

1) Cf. l'Essentiel.

2) a) Pour déterminer l'ordre de grandeur de la vitesse de la Terre et de Mercure autour du Soleil, assimiler leurs trajectoires à des cercles.

b) $\frac{d\vec{v}}{dt}$ est la somme de deux termes : l'un dû à $V(r)$,

l'autre à $V_p(r)$. En déduire que dans l'expression de $\frac{d\vec{A}}{dt}$, seul le deuxième terme donne une contribution

non nulle. Exprimer alors L en fonction de θ et de sa dérivée par rapport au temps (en utilisant l'équation polaire de la trajectoire) pour obtenir une expression de la forme $\frac{d\vec{A}}{dt} = f(\theta)\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. Il faut ensuite exprimer ce vecteur dans la base cartésienne avant de l'intégrer sur une période de révolution.

c) Quelle est la relation entre le module de \vec{A} et l'excentricité de la trajectoire ? Exprimer ensuite p en fonction de r_A et r_P .

1 Orbitogramme de la Vilette

A. Étude cinématique

1 • $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$.

2 • $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

3 • $\vec{a} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_r + \ddot{z}\vec{e}_z$.

$$\vec{a} = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_r + \left(2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right) \vec{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_z.$$

4 • $\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2}$

Si on calcule $\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 2r \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = r \vec{a} \cdot \vec{e}_\theta$,

d'où le résultat demandé.

B. Étude dynamique et énergétique

1 • $\vec{f}_{1/2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u}$.

2 • $\vec{f}_{1/2} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2} \vec{u} = -\frac{dE_p}{dr} \vec{u}$

$$E_p(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r} \text{ à l'origine choisie.}$$

3 • La normale à la surface considérée n'a pas de composante sur \vec{e}_θ , donc $R_\theta = 0$ en l'absence de frottements.

4 • Les forces qui s'exercent sur la bille sont
– le poids $m\vec{g}$ qui dérive de l'énergie potentielle

$$E_p = mgz = -mg \frac{k}{r}$$

– la réaction \vec{R}_N qui ne travaille pas.

5 • $m\vec{a} = \vec{R}_N + m\vec{g}$.

En projetant sur la base cylindrique, on obtient :

$$\begin{cases} m \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = R_r \\ m \frac{1}{r} \frac{dr}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \\ m \frac{d^2z}{dt^2} = -mg + R_z \end{cases}$$

De la deuxième équation, on déduit que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante.

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = C.$$

6 • $E_m = \frac{1}{2} m v^2 + mgz$

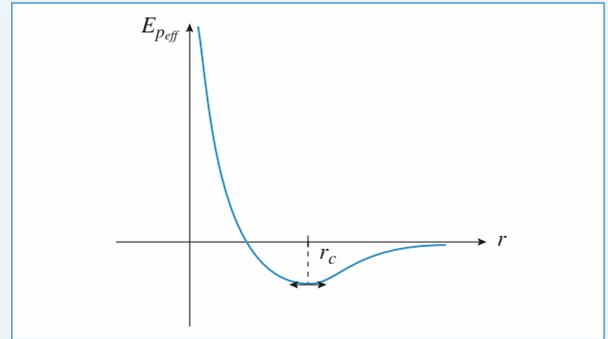
$$= \frac{1}{2} m \left(\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 \right) + mgz$$

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{C^2}{r^2} \quad z = -\frac{k}{r} \text{ d'où } \frac{dz}{dt} = -\frac{k}{r^2} \frac{dr}{dt}.$$

$$E_m = \frac{1}{2} m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \frac{1}{2} m \frac{k^2}{r^4} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - mg \frac{k}{r}.$$

On trouve l'expression demandée avec $\alpha(r) = 1 + \frac{k^2}{r^4}$.

3 •



Si $E_0 > 0$, l'état est libre.

Si $E_0 < 0$, l'état est lié.

8 • Le mouvement est circulaire pour $\frac{dE_{p\text{eff}}}{dr} = 0$.

$$\text{Soit } \frac{C^2}{r^3} = \frac{gk}{r^2} \quad r_c = \frac{C^2}{gk}.$$

9 • La bille doit être lancée selon \vec{e}_θ . $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$.

$$C = r^2 \frac{d\theta}{dt} = r_0 v_0.$$

On a aussi $r_0 = r_c$ d'où $r_0 = \frac{r_0^2 v_0^2}{gk}$.

$$v_0^2 = \frac{gk}{r_0}.$$

2 Stabilité d'une trajectoire circulaire dans un champ de force en $\frac{1}{r^n}$

1 • Pour la trajectoire circulaire, décrite à vitesse angulaire constante (loi des aires), on a :

$$m \frac{v_0^2}{r_0} = -F(r_0).$$

2 • L'équation du mouvement, en projection sur le vecteur radial, donne :

$$F(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = m \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} \right) = m \left(\ddot{r} - \frac{r_0^2 v_0^2}{r^3} \right).$$

Posons $r = r_0(1 + \varepsilon(t))$, et linéarisons cette équation :

$$\frac{F(r_0)}{m} + \varepsilon r_0 \frac{F'(r_0)}{m} + \dots = r_0 \ddot{\varepsilon} - \frac{v_0^2}{r_0} (1 - 3\varepsilon + \dots)$$

où le terme d'ordre 0 se simplifie (question 1)), ce qui donne :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{3v_0^2}{r_0^2} - \frac{F'(r_0)}{m} \right) \varepsilon = 0$$

ou bien encore : $\ddot{\varepsilon} - \frac{1}{m} \left(\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) \right) \varepsilon = 0$.

On obtient une évolution au voisinage de r_0 si :

$$\frac{3F(r_0)}{r_0} + F'(r_0) < 0.$$

3 • Pour $F(r) = \frac{-k}{r^n}$, il vient $k(n-3) < 0$.

Pour avoir une trajectoire circulaire, il faut déjà avoir un champ attractif, soit $k > 0$, de sorte que la condition de stabilité est $n < 3$. Dans le cas de la gravitation, $n = 2$, et ainsi la trajectoire circulaire apparaît stable : ouf !

3 Chez le petit prince

Sur Terre, un saut à pieds joints permet facilement d'élever son centre de gravité d'une hauteur h de l'ordre de 50 centimètres. L'impulsion initiale correspond à une énergie développée de l'ordre de mgh .

Admettons que l'on fera de même sur la planète en question, pour laquelle la vitesse de libération est donnée par :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GmM}{R} = 0$$

où G est la constante de gravitation, M la masse de la planète, R son rayon.

L'énergie cinétique $\frac{1}{2} m v_0^2$ que l'on peut créer étant de

l'ordre de mgh , on en déduit $gh = \frac{GM}{R}$ où le champ de pesanteur g est pratiquement égal au champ de gravitation à

la surface terrestre : $g \approx \frac{GM_T}{R_T^2}$, et on obtient :

$$M_T \frac{h}{R_T^2} = \frac{M}{R}.$$

En supposant que la densité de la planète soit très voisine de celle de la Terre, on aura alors $M = M_T \frac{R^3}{R_T^3}$, et donc finalement :

$R = \sqrt{h R_T} \approx 1,8 \text{ km}$ ($R_T = 6\,400 \text{ km}$).

La planète a la taille d'un astéroïde...

4 Lancement d'un satellite GPS

1 • La relation fondamentale de la dynamique projetée

sur \vec{e}_r donne $- \frac{Mv^2}{r} = -G \frac{MM_T}{r^2}$, où M_T est la masse de

la Terre. Avec $g_0 = \frac{GM_T}{R^2}$, on obtient $v = R \sqrt{\frac{g_0}{r}}$. On en

déduit $\omega_0 = \frac{v}{r} = \sqrt{g_0 \frac{R^2}{r^3}}$.

L'énergie potentielle gravitationnelle est :

$$\mathcal{E}_P = -M \frac{GM_T}{r} = -g_0 M \frac{R^2}{r}.$$

L'énergie mécanique $\mathcal{E}(r)$ du système est donc :

$$\mathcal{E}(r) = \frac{1}{2} M v^2(r) - M g_0 \frac{R^2}{r} = -M g_0 \frac{R^2}{2r}.$$

2 • L'énergie mécanique de la fusée sur le pas de tir est :

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} M v_0^2 - M g_0 R \quad \text{avec} \quad v_0 = \left(\frac{2\pi}{T} \right) R \cos \lambda.$$

La variation d'énergie mécanique entre le lancement et l'arrivée sur l'orbite circulaire est donc :

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}(r) - \mathcal{E}_0 = M g_0 R \left(1 - \frac{R}{2r} \right) - \frac{1}{2} M \left(\frac{2\pi R \cos \lambda}{T} \right)^2.$$

3 • $\Delta \mathcal{E}$ représente l'énergie à fournir au système pour le mettre en orbite. Elle diminue quand $\cos \lambda$ augmente, donc quand λ diminue : les meilleures bases de lancement sont les plus proches de l'équateur.

4 • $\Delta \mathcal{E}(\lambda_1) - \Delta \mathcal{E}(\lambda_2) = 2M \left(\frac{\pi R}{T} \right)^2 (\cos^2 \lambda_2 - \cos^2 \lambda_1)$.

Par unité de masse, l'économie d'énergie est de 24 kJ, ce qui semble assez faible, si on la compare à $\Delta \mathcal{E}(\lambda_2) \approx 32,8 \cdot 10^3 \text{ kJ}$ pour 1 kg de charge.

5 • $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \frac{(R+H)^2}{R \sqrt{g_0}}$,

soit : $H = \left(\frac{RT_0 \sqrt{g_0}}{2\pi} \right)^{\frac{2}{3}} - R = 20,3 \cdot 10^3 \text{ km}$.

5 Transfert d'un satellite

1 • Sur l'orbite circulaire de rayon R , on a :

$$m \frac{v_0^2}{R} = m g_0 \quad \text{d'où} \quad v_0 = \sqrt{g_0 R}.$$

2 • $v_0 = R \omega_0 = R \frac{2\pi}{T_0}$

$$T_0 = \frac{2\pi R}{\sqrt{g_0 R}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g_0}}$$

$$3 \bullet v_E = R \frac{2\pi}{T_1}$$

$$\frac{v_E}{v_0} = \frac{T_0}{T_1}$$

$$\left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} \frac{R}{g_0}$$

$$4 \bullet \text{A.N.} : \left(\frac{v_E}{v_0}\right)^2 = 3,45 \cdot 10^{-3}$$

$$5 \bullet \vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{u}_r = m \vec{g}. \quad g = \frac{GM}{r^2} \text{ et } g_0 = \frac{GM}{R^2}.$$

$$\text{Donc } g = g_0 \frac{R^2}{R_1^2} \text{ à la distance } r = R_1.$$

6 • La période du satellite sur l'orbite C_1 doit être T_1 .

$$m \omega_1^2 R_1 = mg = mg_0 \frac{R^2}{R_1^2}$$

$$R_1^3 = g_0 \frac{R^2}{\omega_1^2} = g_0 \frac{R^2}{4\pi^2} T_1^2$$

$$R_1 = 4,24 \cdot 10^7 \text{ m.}$$

$$x = \frac{R_1}{R} = 6,62.$$

$$7 \bullet m \frac{v_1^2}{R_1} = \frac{GmM}{R_1^2} \quad v_1^2 = \frac{GM}{R_1}$$

$$\text{De même } v_0^2 = \frac{GM}{R}.$$

On en déduit :

$$v_1 = \frac{v_0}{\sqrt{x}}$$

8 • Sur l'orbite C_1 , l'énergie du satellite est :

$$E_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{GmM}{R_1} = -\frac{1}{2} m v_1^2.$$

$$\text{Sur la Terre} : E = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{GmM}{R} = \frac{1}{2} m v_E^2 - m v_0^2.$$

Le travail W à fournir pour passer à C_1 est :

$$W = E_1 - E = -\frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 + m v_0^2 \approx +\frac{1}{2} m v_0^2 \left(2 - \frac{1}{x}\right)$$

$$W = K_0 \left(2 - \frac{1}{x}\right).$$

9 • Lorsque le satellite est sur Terre, son énergie est :

$$E = \frac{1}{2} m v_E^2 - \frac{GmM}{R}$$

$$W_1 = E_0 - E \approx -\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{GmM}{R} = +\frac{1}{2} m v_0^2.$$

$$W_1 = K_0.$$

10 • Le transfert se fait sur une ellipse de demi-grand axe

$$\frac{R + R_1}{2}.$$

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{R + R_1} = \frac{1}{2} m v_0'^2 - \frac{GmM}{R}.$$

$$v_0'^2 = 2GM \frac{R_1}{R(R + R_1)} = \frac{2GM}{R} \frac{x}{1+x}$$

$$v_0'^2 = v_0^2 \frac{2x}{1+x}$$

$$v_0' = v_0 \sqrt{\frac{2x}{1+x}}$$

11 • $W_2 = E_{\text{ellipse}} - E_0$

$$W_2 = -\frac{GmM}{R + R_1} + \frac{GmM}{2R} = GmM \frac{R_1 - R}{2R(R + R_1)}$$

$$W_2 = K_0 \frac{x-1}{x+1}$$

12 • Au point A, on a :

$$E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{R_1} + \frac{1}{2} m v_1'^2 = -\frac{GmM}{R + R_1}$$

$$v_1' = v_0 \sqrt{\frac{2}{x(1+x)}}$$

13 • $W_3 = E_1 - E_{\text{ellipse}} = -\frac{GmM}{2R_1} + \frac{GmM}{R + R_1}$

$$W_3 = K_0 \frac{x-1}{x(1+x)}$$

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + W_3 &= K_0 \left(1 + \frac{x-1}{x+1} + \frac{x-1}{x(1+x)}\right) \\ &= K_0 \frac{2x^2 + x - 1}{x(1+x)} = K_0 \left(2 - \frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

$$W_1 + W_2 + W_3 = W.$$

14 • La troisième loi de Kepler donne :

$$T_{\text{ellipse}}^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \left(\frac{R + R_1}{2}\right)^3 \text{ et } T_1^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R_1^3.$$

$$T_{\text{ellipse}} = T_1 \left(\frac{R + R_1}{2R_1}\right)^{3/2}$$

$$t = \frac{T_{\text{ellipse}}}{2} = \frac{T_1}{2^{5/2}} \left(\frac{1+x}{x}\right)^{3/2}.$$

6 Trajectoire d'une comète

1 • L'énergie de la comète est :

• au point le plus proche du Soleil :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m v_1^2 - m \frac{GM_S}{kR_T}; \quad (1)$$

- au point où elle coupe l'orbite terrestre :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 - m\frac{GM_S}{R_T}; \quad (2)$$

avec pour la Terre sur son orbite circulaire :

$$v_T^2 = \frac{GM_S}{R_T}. \quad (3)$$

La conservation de l'énergie de la comète permet de déterminer v . Tous calculs faits, on obtient :

$$v = \sqrt{v_T^2 + 2v_T^2\left(1 - \frac{1}{k}\right)} = 41,8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- 2 •** L'énergie de la comète est égale à :

$$\mathcal{E} = m\left(\frac{1}{2}v_1^2 - \frac{v_T^2}{k}\right) = -25 \cdot 10^6 m \text{ (en joules)};$$

elle est négative, donc la trajectoire de la comète est une ellipse. Elle est reliée au demi-grand axe a par :

$$\mathcal{E} = -m\frac{GM_S}{2a} = -m\frac{v_T^2 R_T}{2a}.$$

Des relations (1) et (3), on déduit $a = \frac{R_T}{\frac{2}{k} - \frac{v_1^2}{v_T^2}}$;

c'est de la forme $a = \lambda R_T$, avec $\lambda = \frac{1}{\frac{2}{k} - \frac{v_1^2}{v_T^2}}$.

Pour déterminer l'excentricité e de la trajectoire, on peut utiliser, par exemple, la distance comète-Soleil au périhélie : $r_p = kR_T = a(1 - e)$, d'où :

$$e = 1 - \frac{k}{\lambda} = k\frac{v_1^2}{v_T^2} - 1$$

($e < 1$: la trajectoire est bien elliptique).

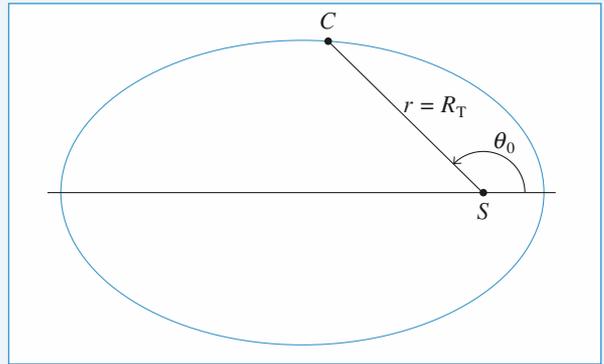
La troisième loi de Kepler donne $\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_0^2}{R_T^3}$, où T_0 est la période de rotation de la Terre autour du Soleil.

On en déduit $T = \lambda^{\frac{3}{2}} T_0 = nT_0$.

A.N. : $\lambda = 17,9$; $e = 0,977$ (e est donc proche de 1, l'ellipse est très excentrée); $n = 75,7$: la période de la comète est d'environ 76 ans (il s'agit sans doute de la comète de Halley).

- 3 •** La loi des aires donne $r^2 \dot{\theta} = \frac{L}{m} = kR_T v_1$ (au périhélie, la vitesse est orthogonale à SC). L'équation de la trajectoire est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}, \text{ avec } p = r_p(1 + e) = R_T \left(\frac{kv_1}{v_T}\right)^2.$$



On en déduit :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{m} \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} = \frac{v_T^4}{R_T (kv_1)^3} (1 + e \cos \theta)^2.$$

On pose $\tau = R_T \frac{(kv_1)^3}{v_T^4}$. La durée recherchée est :

$$\Delta t = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} dt = \tau \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2},$$

où θ_0 est l'angle correspondant au point d'intersection de la trajectoire de la comète et de celle de la Terre (voir le schéma précédent).

Pour déterminer l'ordre de grandeur de Δt , on prend $e = 1$ (approximation justifiée par l'application numérique ci-dessus).

On obtient $\Delta t = 2\tau \left(\frac{1}{2} \tan\left(\frac{\theta_0}{2}\right) + \frac{1}{6} \tan^3\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \right)$,

avec $R_T = \frac{p}{1 + e \cos \theta_0}$, d'où :

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{k^2 \frac{v_1^2}{v_T^2} - 1}{k \frac{v_1^2}{v_T^2} - 1} \right), \text{ soit } \theta_0 = 100^\circ.$$

A.N. : $\Delta t = 1,76 \tau$, soit environ 77 jours.

7 Incident sur un satellite

- 1 •** L'énergie du satellite après l'incident est la même qu'avant puisque la vitesse reste la même en module : elle est donc négative, égale à :

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{2} G \frac{mM_T}{r_0}$$

la trajectoire est une ellipse de demi-grand axe r_0 (l'énergie sur une trajectoire elliptique est $\mathcal{E} = -G \frac{mM_T}{2a}$).

2 • Calculons le vecteur de Runge-Lenz, constant, à l'instant initial :

$$\vec{A} = \frac{1}{k} (\vec{v} \wedge \vec{L}_O) - \vec{e}_r$$

$$= \frac{1}{k} [v_0(\cos \alpha \vec{e}_{\theta_0} - \sin \alpha \vec{e}_{r_0}) \wedge m r_0 v_0 \cos \alpha \vec{e}_z] - \vec{e}_{r_0}$$

Sachant que la constante d'interaction est $k = GmM_T$, et que

$$\frac{v_0^2}{r_0} = \frac{GM_T}{r_0^2}, \text{ on en déduit :}$$

$$\vec{A} = \sin \alpha (-\sin \alpha \vec{e}_{r_0} + \cos \alpha \vec{e}_{\theta_0})$$

et, par conséquent :

$$e^2 = \vec{A}^2 = \sin^2 \alpha$$

ce qui assure le résultat.

3 • L'équation polaire de la trajectoire est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

avec $e = \sin \alpha$ et $p = a(1 - e^2) = r_0 \cos^2 \alpha$.

Au périhélie, la distance minimale est :

$$r_P = \frac{r_0(1 - \sin^2 \alpha)}{1 + \sin \alpha} = r_0(1 - \sin \alpha).$$

Le satellite ne s'écrase pas si $r_P > R_T$, ce qui donne :

$$\sin \alpha < 1 - \frac{R_T}{r_0}.$$

L'écrasement est donc évité pour :

$$\alpha < \arcsin\left(1 - \frac{R_T}{r_0}\right) \approx 5,7^\circ.$$

8 Mouvement hyperbolique répulsif. Expérience de Rutherford

1 • La relation fondamentale de la dynamique appliquée à

la particule α s'écrit $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$.

En remarquant que $\vec{e}_r = -\frac{1}{\dot{\theta}} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$, on peut écrire l'équation

précédente sous la forme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{-k}{mr^2 \dot{\theta}} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}.$$

On reconnaît au dénominateur le moment cinétique de la particule $L = mr^2 \dot{\theta} = -mbv_0$ (c'est une constante du mouvement, on le calcule au départ **en faisant très attention à l'orientation des vecteurs**). D'après le schéma de l'énoncé, θ diminue au cours du mouvement, il est donc normal de trouver $L < 0$.

En intégrant l'équation ci-dessus entre le départ et un point où la particule est de nouveau très éloignée du noyau, on obtient :

$$\vec{v}_\infty - \vec{v}_0 = \frac{k}{mv_0 b} (\vec{e}_{\theta_\infty} - \vec{e}_{\theta_0}).$$

2 • À l'infini (des deux côtés), l'énergie potentielle d'interaction entre la particule α et le noyau est nulle, l'énergie est uniquement sous forme cinétique, on en déduit (grâce à la conservation de l'énergie) que $\|\vec{v}_\infty\| = v_0$.

On projette alors l'équation précédente sur les axes (Ox) ou (Oy) en remarquant que $\vec{e}_{\theta_0} = -\vec{e}_y$ et que l'angle entre (Oy) et \vec{e}_{θ_∞} est égal à D , on obtient :

$$\begin{cases} v_0 \cos D - v_0 = -\frac{k}{mv_0 b} \sin D & \text{(sur } (Ox)) \\ v_0 \sin D = \frac{k}{mv_0 b} (\cos D + 1) & \text{(sur } (Oy)). \end{cases}$$

On vérifie que ces deux équations sont équivalentes.

La première équation (par exemple) devient :

$$2v_0 \sin^2 \frac{D}{2} = \frac{k}{mv_0 b} 2 \sin \frac{D}{2} \cos \frac{D}{2},$$

d'où : $\tan \frac{D}{2} = \frac{k}{mv_0^2 b}.$

3 • L'énergie de la particule, constante, est :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_M &= \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \frac{k}{r} \\ &= \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{mb^2 v_0^2}{2r^2} + \frac{k}{r}. \end{aligned}$$

Lorsque la distance est minimale, il vient :

$$mb^2 v_0^2 + 2kr_{\min} - mv_0^2 r_{\min}^2 = 0.$$

La racine positive de cette équation de degré 2 est :

$$r_{\min} = \frac{k}{mv_0^2} + \sqrt{\left(\frac{k}{mv_0^2}\right)^2 + b^2}$$

que l'on peut aussi écrire :

$$r_{\min} = b \left(\tan \frac{D}{2} + \frac{1}{\cos \frac{D}{2}} \right).$$

9 Correction relativiste. Avance du périhélie de Mercure

1 • Préliminaire

a) \vec{A} est un vecteur constant dans le plan de la trajectoire (dirigé de S , foyer de l'ellipse, vers P , périhélie de la trajectoire, que l'on peut exprimer :

$$\vec{A} = \frac{1}{\alpha} (\vec{v} \wedge \vec{L}_O) - \vec{e}_r = \frac{1}{GmM_0} (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \wedge L \vec{e}_z - \vec{e}_r.$$

En notant $\theta(\vec{A}, \vec{r})$, on a :

$$\vec{r} \cdot \vec{A} = \|\vec{A}\| r \cos \theta, \text{ mais aussi } \vec{r} \cdot \vec{A} = \frac{L^2}{Gm^2 M_0} - r.$$

En notant $e = \|\vec{A}\|$ et $p = \frac{L^2}{Gm^2M_0}$, on obtient bien la conique :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}.$$

b) Au périhélie : $r_P = \frac{p}{1 + e}$; à l'apogée : $r_A = \frac{p}{1 - e}$;

donc :

$$e = \frac{p - r_P}{r_P} = \frac{r_A - p}{r_A},$$

ce qui nous donne :

$$p = \frac{2r_A r_P}{r_A + r_P}.$$

2 • Avance du périhélie

a) Le terme supplémentaire est correctif si $|V_p| \ll |V|$,

soit :

$$\frac{GM_0}{c^2} \frac{L^2}{r^3} \ll \frac{GmM_0}{r}.$$

Comme L est de l'ordre de $mr v$, on en déduit $\frac{v}{c} \ll 1$. La

planète doit avoir une vitesse non relativiste pour traiter le terme supplémentaire comme une petite perturbation à apporter au mouvement newtonien classique.

Pour la Terre : $v_T = \frac{2\pi R_T}{T_T} \approx 30 \text{ km/s}$.

Pour Mercure : $v_M = \frac{2\pi R_M}{T_M}$ avec $\frac{T_T^2}{R_T^3} = \frac{T_M^2}{R_M^3}$ (3^e loi de

Kepler), soit $v_M \approx 50 \text{ km/s}$.

Dans les deux cas, l'approximation non relativiste est bien satisfaisante.

b) Pour ce mouvement, la force :

$$\vec{F} = -\frac{d}{dr} (V(r) + V_p(r)) \vec{e}_r = -\frac{GmM_0}{r^2} \vec{e}_r - \frac{\varepsilon}{r^4} \vec{e}_r$$

est centrale, et le moment cinétique est une constante du mouvement. On a donc :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{1}{GmM_0} \left(\frac{\vec{F}}{m} \wedge \vec{L}_O \right) - \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ &= \frac{1}{Gm^2M_0} \left(-\frac{\varepsilon}{r^4} \vec{e}_r \right) \wedge L \vec{e}_z = \frac{\varepsilon}{GmM_0} \frac{\dot{\theta}}{r^2} \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

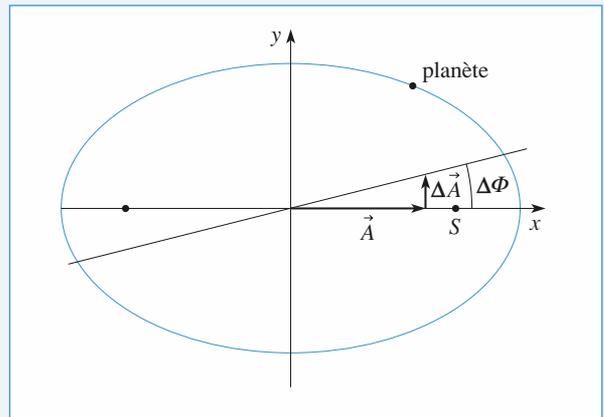
car le résultat donné par le terme newtonien est nul. En utilisant l'équation polaire (mouvement peu perturbé) de la trajectoire, il vient :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\varepsilon}{GmM_0} \frac{(1 + e \cos \theta)^2}{p^2} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) \frac{d\theta}{dt}$$

et en intégrant sur un tour :

$$\Delta \vec{A} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot dt = \frac{2\pi \varepsilon e}{GmM_0 p^2} \vec{e}_y.$$

La variation de \vec{A} est orthogonale à \vec{A} , de module très inférieur à \vec{A} : le potentiel perturbateur V_p entraîne une déformation de la trajectoire correspondant à une rotation lente du grand axe de l'ellipse dans son plan.



c) L'angle $\Delta\phi$, dont tourne la trajectoire pendant une révolution

est $\Delta\phi = \frac{\|\Delta\vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$ (il est très faible donc assimilable à sa

tangente). Le module de \vec{A} étant aussi l'excentricité de la trajectoire, cette expression se simplifie :

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\varepsilon}{GmM_0 p^2} = \frac{6\pi L^2}{m^2 C^2 p^2} = \frac{6\pi GmM_0}{C^2 p}.$$

On introduit r_A et r_P , il vient finalement :

$$\Delta\phi = \frac{3\pi GmM_0}{C^2} \frac{r_A + r_P}{r_A r_P}.$$

Remarque : Mercure n'a pas une vitesse nettement plus importante que la Terre sur son orbite, mais les distances caractéristiques r_A et r_P sont bien plus faibles dans son cas car c est la planète la plus proche du Soleil. L'avance de son périhélie sera donc plus facilement détectable car $\Delta\phi$ est ici plus important, le phénomène étant également plus rapide puisque c est aussi la plus petite période de révolution.

d) En un siècle, le grand axe de l'ellipse a tourné de :

$$\delta\Omega = 100 \frac{T_0}{T} \Delta\phi.$$

L'application numérique donne $\delta\Omega = 2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 43,1$ secondes d'arc. Cette valeur rentre dans la zone d'incertitude fournie par l'expérience : la théorie relativiste rend effectivement compte de l'avance du périhélie de Mercure.

Remarque : On observe un phénomène semblable pour les satellites terrestres, la cause en est tout autre : l'avance du périhélie des satellites est due à l'aplatissement de la Terre aux pôles, le potentiel gravitationnel n'étant plus exactement newtonien mais de la forme $V = -m \frac{GM_T}{r} - \frac{m\varepsilon}{r^3}$, le deuxième terme étant très faible par rapport au premier.

LES OBJECTIFS

- Prévoir et interpréter le mouvement d'une particule soumise à un ensemble de forces dans n'importe quel référentiel.

LES PRÉREQUIS

- Mécanique en référentiel galiléen.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Les mêmes que pour les chapitres précédents.

ESSENTIEL

Forces d'inertie, relation fondamentale de la dynamique

Dans un référentiel non galiléen \mathcal{R} , il faut introduire des forces d'inertie pour traduire la relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a}_{I\mathcal{R}}(M) = \vec{F} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ic}' ,$$

avec :

$\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M)$, où $\vec{a}_c(M)$ est l'accélération du point coïncidant ;

$\vec{F}_{ic}' = -m\vec{a}_c'(M) = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{I\mathcal{R}}(M)$, où $\vec{a}_c'(M)$ est l'accélération de Coriolis du point M et $\vec{\Omega}$ est le vecteur rotation du référentiel non galiléen \mathcal{R} par rapport à un référentiel galiléen.

Dans l'expression du théorème du moment cinétique en un point fixe de \mathcal{R} (référentiel non galiléen), il faut aussi introduire le moment des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.

Théorème de l'énergie cinétique

Le travail de la force d'inertie de Coriolis est toujours nul dans \mathcal{R} .

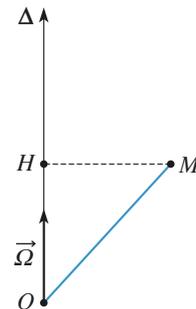
Le théorème de l'énergie cinétique s'applique dans \mathcal{R} en introduisant le travail de la force d'inertie d'entraînement :

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{T}(\vec{F}) + \mathcal{T}(\vec{F}_{ic}').$$

La force d'inertie d'entraînement peut éventuellement dériver d'une énergie potentielle. Par exemple, dans le cas où \mathcal{R} est en mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe Δ d'un référentiel galiléen, l'énergie potentielle d'inertie d'entraînement est alors égale à

$$\mathcal{E}_p = -\frac{1}{2}m\Omega^2 HM^2 + \text{cte} , \text{ où } \Omega \text{ est la vitesse de rotation constante}$$

de \mathcal{R} autour de Δ et H la projection orthogonale de M sur l'axe de rotation Δ .



Δ est un axe fixe dans un référentiel galiléen et $\vec{\Omega}$ est un vecteur rotation constant.

Conseils et pièges à éviter

- Les lois de la dynamique appliquées en référentiel non galiléen sont souvent simples, en particulier dans les référentiels en translation et en rotation.

1 Une attraction foraine sans danger ?

Un des manèges d'une foire foraine est constitué d'un énorme cylindre vertical qui tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω . Les passagers pénètrent à l'intérieur et s'installent contre la paroi du cylindre. Le cylindre est mis en rotation, d'abord lentement, puis de plus en plus vite. Quand la vitesse de rotation ω est suffisamment grande, le plancher est retiré et les passagers restent collés contre la paroi du cylindre.

1 • Expliquer pourquoi les passagers restent collés contre la paroi. Quelle est la force qui les empêche de tomber ? Est-ce sans danger ? Que ressent un passager qui essaie de décoller un bras ou une jambe ?

2 • On appelle μ le coefficient de frottement : les passagers sont immobiles tant que les composantes tangentielle \vec{R}_T et normale \vec{R}_N de la réaction du support vérifient la relation $|\vec{R}_T| \leq \mu |\vec{R}_N|$.

Déterminer la valeur minimale de la vitesse de rotation du cylindre (en fonction du rayon du cylindre a , de g et de μ) à partir de laquelle on peut retirer le plancher.

3 • A. N. : $a = 4$ m et $\mu = 0,4$. Calculer la vitesse minimale de rotation du cylindre en tours par minute.

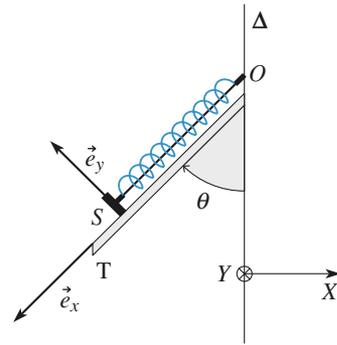
Conseils

- 1) Comment doit être dirigée la force qui permet aux passagers de ne pas tomber ?
- 2) Projeter la condition d'équilibre relatif des passagers sur le rayon-vecteur et sur l'axe du cylindre pour exprimer \vec{R}_T et \vec{R}_N . La relation $|\vec{R}_T| \leq \mu |\vec{R}_N|$ permet de déterminer la valeur minimale de ω .

2 Équilibre en référentiel tournant

D'après ENAC Pilotes.

Un système est constitué d'une glissière T soudée sur un bâti mobile autour d'un axe vertical Δ . Sur la glissière inclinée d'un angle θ fixe par rapport à la verticale est posé un solide S de masse m qui peut glisser sans frottements sur T . Ce solide, que l'on peut considérer comme ponctuel, est accroché à un ressort à spires non jointives, de raideur k , de longueur à vide ℓ_0 dont l'autre extrémité est fixée au bâti, selon la figure ci-après.



1 • Le système est immobile. Calculer la longueur ℓ_e du ressort à l'équilibre.

2 • Le système est mis en rotation autour de l'axe Δ avec une vitesse angulaire constante ω suffisamment faible pour que S reste au contact de T .

Calculer la réaction \vec{R} du bâti sur S quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre ℓ'_e en raisonnant dans le référentiel tournant \mathcal{R}_T lié à la tige.

3 • Calculer la vitesse de rotation du solide ω_0 telle que le solide décolle juste de la glissière quand le ressort a atteint sa nouvelle longueur d'équilibre ℓ''_e .

Conseils

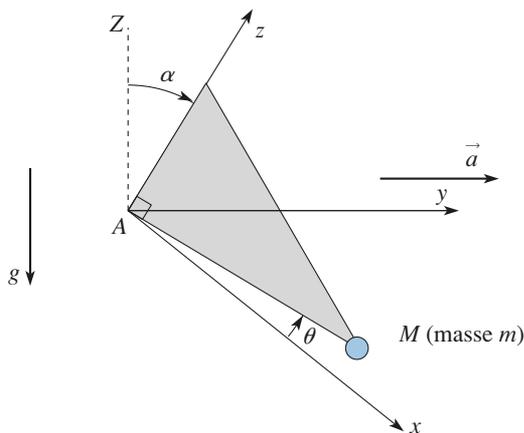
- 2) Faire l'inventaire des forces qui agissent sur S quand il est en équilibre dans le référentiel tournant \mathcal{R}_T . La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur la direction de la tige donne la longueur du ressort à l'équilibre ; sa projection sur une direction orthogonale donne la réaction de la tige sur S .
- 3) Quelle est la valeur de la réaction du support quand la tige décolle ?

3 *Équerre oscillante

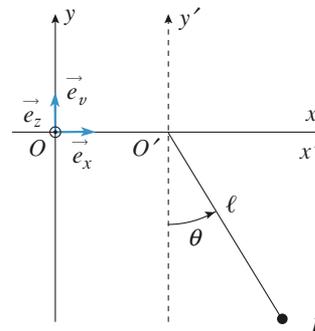
Une équerre d'inertie négligeable, portant une surcharge de masse m à sa pointe M (avec $AM = \ell$), pivote autour de l'axe Az fixe, incliné de l'angle α par rapport à la verticale AZ . Le plan xAz est vertical, et on repère la rotation de l'équerre par l'angle θ .

L'effet de frottements fluides est modélisé par un couple de

freinage $-\lambda \frac{d\theta}{dt}$ par rapport à Az .



posera constamment tendu, avec la verticale Oy de \mathcal{R} (cf. figure ci-dessous). Dans un premier temps, l'origine O' de \mathcal{R}' reste fixe et confondue avec l'origine O de \mathcal{R} .



1 • Caractériser les mouvements de l'équerre, l'angle θ restant faible.

2 • L'axe (Az) est maintenant animé dans le laboratoire d'un mouvement accéléré : $\vec{a} = a_0 \vec{e}_y$. Quelle est la position d'équilibre et la période des petites oscillations à son voisinage si les frottements sont négligés ?

3 • L'axe est toujours animé, mais d'un mouvement oscillant : $y_A = y_0 \cos(\omega t)$. Déterminer les mouvements du pendule dans l'approximation des petits angles, en régime permanent établi. Le système peut-il entrer en résonance ?

Conseils

- 1) Pour un mouvement de rotation, on peut penser à utiliser le théorème du moment cinétique.
- 2) Dans le référentiel en translation, on peut utiliser les forces d'inertie.
- 3) En régime sinusoïdal forcé établi, l'utilisation de la notation complexe permet d'obtenir rapidement le régime linéaire forcé.

4 Oscillations d'un pendule dans un référentiel en mouvement

D'après ENAC07.

On désigne par $\mathcal{R}'(O'x'y'z')$ un repère d'origine O' dont les axes orthogonaux $O'x'$, $O'y'$ et $O'z'$ sont respectivement parallèles aux axes Ox , Oy et Oz d'un repère $\mathcal{R}(Oxyz)$ que l'on supposera galiléen. Un pendule simple est constitué d'un point matériel P de masse m , suspendu à l'origine O' de \mathcal{R}' par un fil sans masse ni raideur et de longueur ℓ . On note θ l'angle que fait le fil, que l'on sup-

1 • Quelle doit être la longueur ℓ du fil pour que la période des petits mouvements du pendule soit $T_0 = 1$ s ? On prendra pour norme de l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, la valeur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

2 • Le repère \mathcal{R}' est maintenant animé d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré d'accélération constante $\vec{a} = a\vec{e}_x$.

Calculer le moment $\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ic})$ par rapport au point O' de la force d'inertie d'entraînement \vec{F}_{ic} qui s'applique au point P dans le référentiel \mathcal{R}' .

3 • Calculer le moment $\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ic})$ par rapport au point O' de la force d'inertie de Coriolis \vec{F}_{ic} qui s'applique au point P dans le référentiel \mathcal{R}' .

4 • Dédurre du théorème du moment cinétique appliqué en O' dans \mathcal{R}' au point matériel P l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ .

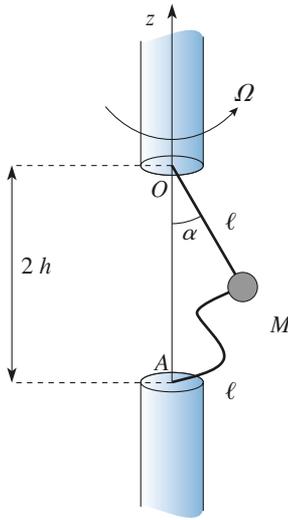
5 • Déterminer la valeur θ_0 de l'angle θ correspondant à la position d'équilibre du pendule.

6 • Exprimer la période T des petits mouvements autour de la position d'équilibre θ_0 en fonction de ℓ , a et g .

5 *Rupture dans un système tournant

Un point matériel M de masse m est relié aux points O et A situés sur l'axe (Oz) , distants de $2h$, par deux fils identiques, souples, de masse négligeable, inextensibles et

de longueur $\ell > h$ (doc. 1). L'ensemble est en rotation à vitesse angulaire Ω constante autour de Oz .



Doc. 1

1 • Décrire les positions d'équilibre relatif du pendule suivant les valeurs données à Ω .

2 • Lorsque la tension d'un fil atteint $T_{\max} = 50 \text{ N}$, celui-ci casse. Pour quelle valeur Ω_{\max} cela se produit-il ?

Données : $m = 1 \text{ kg}$; $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$; $\ell = 40 \text{ cm}$ et $h = 30 \text{ cm}$.

Conseils

- 1) On peut étudier l'équilibre et sa stabilité à l'aide d'une énergie potentielle adéquate, dans le référentiel tournant à $\Omega = \text{cte}$.
- 2) Traduire l'équilibre relatif pour déterminer la tension du (ou des) fil(s).

6 Bille dans un tube en rotation

D'après ESTP.

Cet exercice représente un peu moins de la moitié d'une épreuve de concours de 4 heures.

L'exercice envisage différentes situations d'une bille B , de masse m , quasi ponctuelle, soumise à la pesanteur et susceptible de se déplacer à l'intérieur d'un tube cylindrique mince T , de longueur 2ℓ , effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe passant par son centre O .

L'accélération de la pesanteur est \vec{g} , de module g constant, dirigée selon la verticale descendante.

La position de B dans le tube est repérée par $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$.

On pose $r = \|\vec{r}\|$ et $v = \frac{dr}{dt}$.

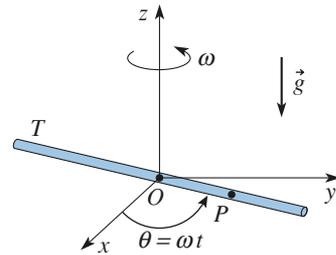
À l'instant initial, $r = r_0$ et $v = v_0$.

Les mouvements de la bille ont lieu sans frottements.

1 • Le tube T est dans le plan horizontal (xOy) et tourne autour de l'axe (Oz), selon le document 1.

Établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$. Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales.

Établir l'expression du temps τ que mettra la bille pour sortir du tube. Calculer τ pour $\ell = 0,1 \text{ m}$, $r_0 = 1 \text{ cm}$, $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$ et $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$.



Doc. 1

2 • Le tube T est dans le plan vertical (yOz) et tourne autour de l'axe (Ox) selon le document 2. À l'instant t , le tube T fait l'angle $\theta = \omega t$ avec l'axe (Oy). On utilisera la base de projection liée au tube : $(\vec{u}, \vec{\tau}, \vec{e}_x)$ où

$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$ est tangent au tube, $\vec{\tau}$ est orthogonal à \vec{u} dans la direction des θ croissants et $\vec{e}_x = \vec{u} \wedge \vec{\tau}$. On note \vec{R} la réaction du tube et $R = \|\vec{R}\|$.

a) Établir l'équation différentielle en $r(t)$ du mouvement de B .

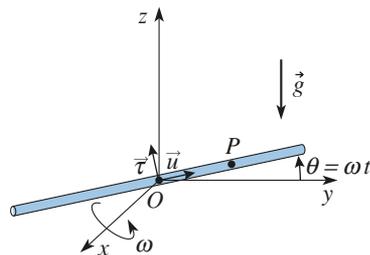
b) Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales.

c) Établir l'expression de $R(t)$.

d) Discuter des équilibres possibles de B par rapport au tube. À quelle condition le mouvement est-il sinusoïdal ?

e) Décrire le mouvement pour les conditions initiales liées :

$$r = r_0 \text{ et } v_0 = \frac{g}{2\omega} - r_0\omega.$$



Doc. 2

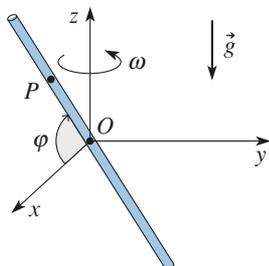
3 • Le tube T est, dans le plan vertical (xOz) du repère mobile $(Oxyz)$ orthonormé, en rotation autour de l'axe (Oz) , la vitesse angulaire ω étant constante. La position du tube T dans ce repère est fixée par l'angle φ qu'il fait avec l'axe (Ox) ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$).

On note \vec{R} la réaction du tube. On choisit la base de projection $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{u} \wedge \vec{u}')$, où \vec{u} est défini comme à la question 2) et \vec{u}' orthogonal à \vec{u} dans le plan (xOz) décrit dans le document 3.

a) Déterminer l'équation différentielle en $r(t)$ du mouvement de B .

b) Intégrer cette équation en tenant compte des conditions initiales.

c) Discuter des équilibres possibles de B et de leur stabilité.



Doc. 3

Conseils

1) Faire soigneusement l'inventaire des forces qui agissent sur la bille dans le référentiel tournant à vitesse angulaire constante. Remarque que le mouvement de la bille a lieu le long du tube, donc que la vitesse et l'accélération du point dans le référentiel tournant sont, elles aussi, dirigées selon le tube.

2) a) Le bilan des forces est le même, seules leurs directions changent. Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{u} pour éliminer \vec{R} .

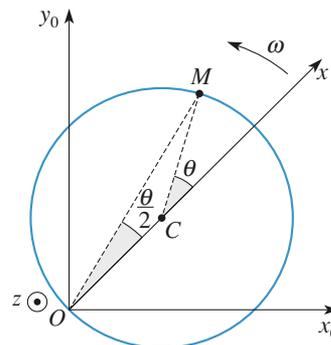
b) On cherchera la solution particulière sous la même forme que le second membre de l'équation différentielle, c'est-à-dire sous la forme $C \sin \omega t$, où C est une constante.

c) Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{r} et sur \vec{e}_x .

3) a) Le bilan des forces est le même, seules leurs directions changent. Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{u} pour éliminer \vec{R} .

7 * Perle sur un cercle horizontal en rotation

Un cerceau horizontal, de centre C et de rayon a , est en rotation uniforme ω autour de l'axe vertical ascendant (Oz) , O étant un point fixe du cerceau. Une petite perle M , assimilable à un point matériel, de masse m , se déplace sans frottements sur le cerceau. On repère sa position par l'angle θ entre les vecteurs \vec{OC} et \vec{CM} , comme le décrit le schéma ci-dessous.



- 1 • Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.
- 2 • Déterminer la réaction du cerceau sur la perle.

Conseils

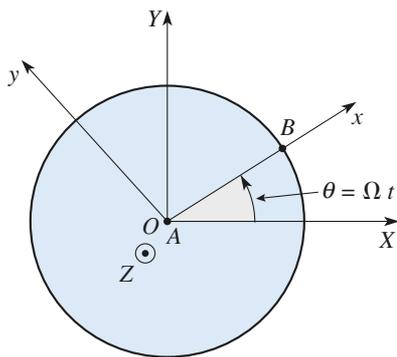
Faire soigneusement l'inventaire des forces qui interviennent dans le référentiel tournant lié au cerceau. Que peut-on dire sur la direction de la réaction du support (attention, le support est filiforme)?

Pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$, il faut utiliser une méthode qui permette d'éliminer la réaction du support.

8 ** Jeu de palets sur un manège

Sur un plateau horizontal tournant à vitesse angulaire constante Ω autour de l'axe vertical OZ , se trouvent deux individus notés A et B .

À l'instant initial ($t=0$, donc $\theta=0$), A lance un palet vers B avec la vitesse v_0 , tandis que B lance un palet vers A avec la même vitesse. On néglige tout frottement pour les contacts entre les palets et le manège.



- 1 • Justifier très simplement que ni l'un, ni l'autre, ne recevra le palet expédié par son vis-à-vis.
- 2 • Retrouver ces résultats en aidant A et B à tenir compte des forces d'inertie sur leur manège. (On pourra utiliser l'affixe complexe $u = x + iy$ pour un palet.)

Conseils

- 1) Le mouvement des palets dans (XOY) est élémentaire.
- 2) Tenir compte des forces d'inertie pour écrire les équations des mouvements en projection sur (OX) et (OY) . Le changement de variable proposé, classique en référentiel tournant, permet une résolution rapide.

1 Une attraction foraine sans danger ?

1 • Il faut que les passagers soient soumis à une force verticale qui équilibre leur poids pour qu'ils ne tombent pas : ce sont les frottements qui permettent aux passagers de tenir en équilibre. La force qui leur permet de rester collés contre la paroi est la composante tangentielle de la réaction du support. Le coefficient de frottement paroi-passagers doit être suffisamment important : les vêtements des passagers ne doivent pas être trop « lisses ».

Si un passager essaie de décoller un bras, celui-ci sera rappelé vers la paroi par la force d'inertie d'entraînement (force centrifuge); pour réussir, il devra fournir l'effort nécessaire pour vaincre cette force.

2 • Dans le référentiel tournant lié au cylindre, la condition d'équilibre d'un passager s'écrit : $\vec{0} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_{ie}$

(le passager est immobile dans le référentiel tournant, donc $\vec{F}_{ie} = \vec{0}$).

- En projection sur la verticale ascendante : $0 = -mg + R_T$;
- en projection sur le rayon vecteur : $0 = -R_N + m\omega^2 a$.

Le passager est en équilibre tant que $|\vec{R}_T| \leq \mu |\vec{R}_N|$, ce qui impose : $mg \leq \mu m\omega^2 a$.

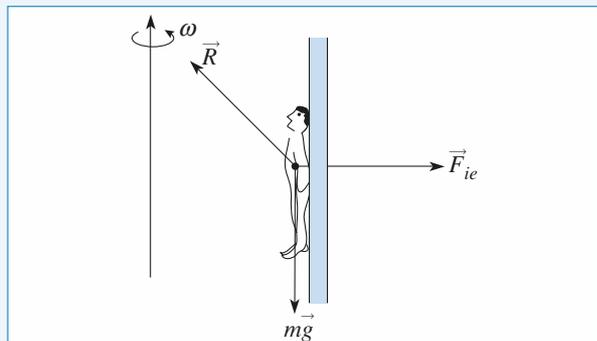
La vitesse ω de rotation du cylindre doit vérifier :

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu a}}$$

On remarque que cette valeur ne dépend pas de la masse du passager : si ω est supérieure à $\sqrt{\frac{g}{\mu a}}$, tous les passagers

seront en équilibre, à condition que μ soit le même pour tous (ce qui dans la réalité n'est pas le cas car la valeur de μ dépend, par exemple, des vêtements des passagers).

3 • A. N. : $\omega_{\min} = 2,48 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 0,4 \text{ tours par seconde}$, soit 23,6 tours par minute.



2 Équilibre en référentiel tournant

1 • Les forces appliquées au solide S sont :

- son poids $\vec{P} = m\vec{g}$;
- la réaction de la glissière $\vec{R} = R\vec{e}_y$;
- la tension du ressort $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_x$.

À l'équilibre, la relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_x donne $0 = mg \cos \theta - k(\ell_e - \ell_0)$, soit :

$$\ell_e = \ell_0 + \frac{mg}{k} \cos \theta.$$

2 • Dans le référentiel lié à la tige, il faut tenir compte des forces d'inertie. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{a}_{\text{rel}}(S) = \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$$

quand le solide est en contact avec la glissière.

À l'équilibre relatif, $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{De plus } \vec{F}_{ie} &= -m\omega^2 \ell \sin \theta \vec{e}_x \\ &= m\omega^2 \ell \sin \theta (\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y). \end{aligned}$$

La relation fondamentale de la dynamique à l'équilibre, projetée sur \vec{e}_x donne :

$$0 = mg \cos \theta - k(\ell'_e - \ell_0) + m\omega^2 \sin^2 \theta \ell'_e,$$

soit :

$$\ell'_e = \frac{k\ell_0 + mg \cos \theta}{k - m(\omega \sin \theta)^2},$$

ce qui n'a de sens que si $k > m\omega^2 \sin^2 \theta$, donc si le ressort est assez raide pour pouvoir compenser l'effet de la rotation, sinon il se tendra jusqu'à une réponse non linéaire, voire la rupture.

Cette équation projetée sur \vec{e}_y donne la valeur de \vec{R} :

$$\vec{R} = (mg \sin \theta - m\omega^2 \ell \sin \theta \cos \theta) \vec{e}_y.$$

3 • Le solide décolle quand $\vec{R} = \vec{0}$. La longueur ℓ''_e vérifie donc les deux équations suivantes :

$$\ell''_e = \frac{k\ell_0 + mg \cos \theta}{k - m(\omega_0 \sin \theta)^2},$$

$$\text{et } mg \sin \theta - m\omega_0^2 \ell''_e \sin \theta \cos \theta = 0.$$

La pulsation ω_0 et la longueur ℓ''_e vérifient donc :

$$\omega_0^2 = \frac{kg}{mg + k\ell_0 \cos \theta} \quad \text{et} \quad \ell''_e = \ell_0 + \frac{mg}{k \cos \theta}.$$

3 Équerre oscillante

1 • Le moment cinétique est celui du point matériel de masse m , ce qui donne en projection sur (Az) :

$$L_z = m\ell^2 \dot{\theta}.$$

Le moment du poids par rapport à cet axe est :

$$\Gamma_{z, \text{poids}} = (\overline{AM} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{e}_z = -mg \ell \sin \theta \sin \alpha.$$

Le théorème du moment cinétique, en projection sur l'axe fixe (Az) , donne donc :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -\lambda\dot{\theta} - mg\ell \sin\theta \sin\alpha.$$

Pour de petits angles $\theta(t)$, on obtient l'équation d'oscillateur harmonique amorti :

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g \sin\alpha}{\ell}} \text{ et } Q = \frac{m\ell^2\omega_0}{\lambda}.$$

2 • Il faut tenir compte des forces d'inertie, réduites ici à la force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = -ma_0\vec{e}_x$ dont le moment par rapport à (Az) vaut :

$$\Gamma_{ie,z} = -m\ell a_0 \cos\theta.$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m\ell^2}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\alpha \sin\theta - \frac{a_0}{\ell}\cos\theta = 0.$$

L'équilibre dans le référentiel entraîné correspond donc à :

$$\theta_{eq} = \arctan\left(\frac{a_0}{g \sin\alpha}\right).$$

Au voisinage de l'équilibre, notons $\theta = \theta_{eq} + \varepsilon$, ce qui donne à l'ordre linéaire, et en négligeant les frottements :

$$\ddot{\varepsilon} + \left(\frac{g}{\ell}\sin\alpha \cos\theta_{eq} + \frac{a_0}{\ell}\sin\theta_{eq}\right)\varepsilon = 0$$

ou encore : $\ddot{\varepsilon} + \omega^2\varepsilon = 0$.

La période des petites oscillations au voisinage de θ_{eq} est alors $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

3 • L'accélération d'entraînement est ici :

$$\vec{a} = -\omega^2 y_0 \cos\omega t \cdot \vec{e}_y,$$

ce qui donne, pour de petits angles d'oscillation :

$$\ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m\ell^2}\dot{\theta} + \left(\frac{g}{\ell}\sin\alpha\right)\theta = \frac{-\omega^2 y_0}{\ell}\cos\omega t$$

en régime sinusoïdal forcé établi, on aura, en notation complexe :

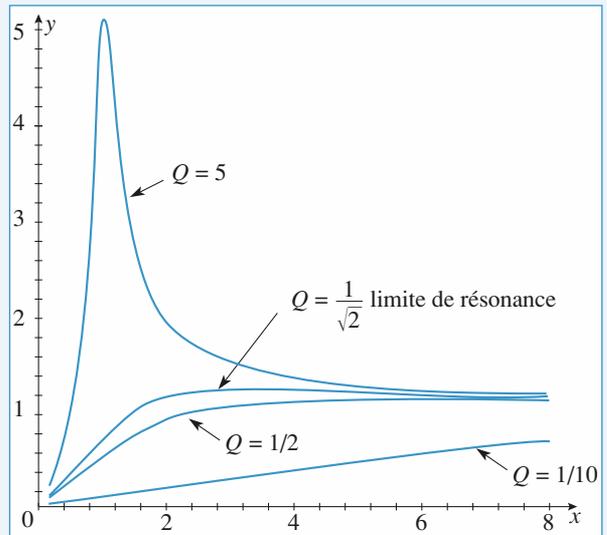
$$\theta = \frac{-\omega^2 y_0}{\ell(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2)} e^{j\omega t} = \theta_0(\omega) e^{j(\omega t + \varphi(\omega))}$$

où l'amplitude d'oscillation est :

$$\theta_0 = \frac{y_0}{\ell} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\omega_0}{Q\omega}\right)^2}}.$$

Cette fonction de la pulsation ω passe effectivement par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, comme le confirme le graphe des

variations de $\frac{\ell\theta_0}{y_0}$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$:



4 Oscillations d'un pendule dans un référentiel en mouvement

D'après ENAC07.

1 • Dans le référentiel \mathcal{R} galiléen, le théorème du moment cinétique appliqué en O à la masse m donne :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta.$$

Pour des petits mouvements, il vient :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

La période des oscillations du pendule est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

$T_0 = 1$ s pour $\ell = 0,2$ m.

2 • $\vec{F}_{ie} = -ma\vec{e}_x$.

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ie}) = \vec{O'P} \wedge (-ma\vec{e}_x) = -ma\ell \cos\theta \vec{e}_z.$$

3 • $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ or $\vec{\Omega} = \vec{0}$ donc $\vec{F}_{ic} = \vec{0}$.

$$\vec{M}_{O'}(\vec{F}_{ic}) = \vec{0}.$$

4 • On a alors :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell \sin\theta - ma\ell \cos\theta$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{a}{\ell}\cos\theta.$$

5 • À l'équilibre, $\ddot{\theta} = 0$.

$$\tan\theta = -\frac{a}{g}. \quad \theta_0 = -\arctan\frac{a}{g}.$$

6 • Soit $\theta = \theta_0 + \varepsilon$. $\cos(\theta_0 + \varepsilon) \approx \cos\theta_0 - \varepsilon \sin\theta_0$.

$$\sin(\theta_0 + \varepsilon) \approx \sin\theta_0 + \varepsilon \cos\theta_0.$$

$$\ddot{\varepsilon} = \varepsilon \left(-\frac{g}{\ell}\cos\theta_0 + \frac{a}{\ell}\sin\theta_0\right) = \frac{\varepsilon}{\ell} \cos\theta_0 \left(-g + a \tan\theta_0\right).$$

$$\cos\theta_0 = \frac{g}{\sqrt{a^2 + g^2}}.$$

$$\text{Soit } \ddot{\varepsilon} = -\frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell} \varepsilon. \quad \omega^2 = \frac{\sqrt{a^2 + g^2}}{\ell}$$

Donc la période T des petits mouvements autour de θ_0 est donnée par :

$$T = 2\pi \left(\frac{\ell}{\sqrt{a^2 + g^2}} \right)^{1/2}.$$

5 Rupture dans un système tournant

1 • On raisonne dans le référentiel tournant à vitesse angulaire Ω constante, dans lequel le poids, les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, et la traction du fil du haut (on suppose pour le moment que le fil du bas n'est pas encore tendu) agissent sur le point M . Le poids $-mg \vec{e}_z$ et la force d'inertie d'entraînement $mr\Omega^2 \vec{e}_r$ (on utilise les coordonnées cylindriques d'axe (Oz)) sont les seules forces qui travaillent, et il est possible de leur associer l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = mgz - \frac{1}{2} m r^2 \Omega^2 = -mg\ell \cos \alpha - \frac{1}{2} m \ell^2 \Omega^2 \sin^2 \alpha$$

où α est l'angle d'inclinaison du fil par rapport à la verticale.

À l'équilibre dans le référentiel tournant, $\frac{d\mathcal{E}_p}{d\alpha} = 0$, soit :

$$\alpha = 0, \alpha = \pi \text{ ou bien } \alpha = + \arccos\left(\frac{g}{\ell\Omega^2}\right) = \pm \alpha_0(\Omega)$$

les deux solutions non triviales ayant un sens lorsque :

$$\Omega > \Omega_c = \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

En déterminant la dérivée seconde :

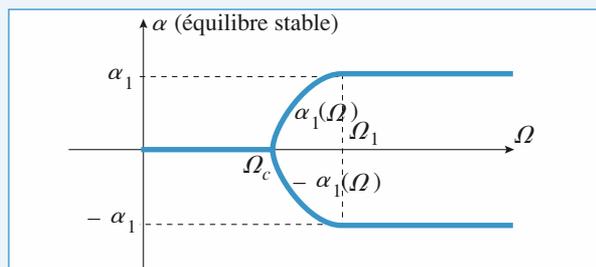
$$\frac{d^2\mathcal{E}_p}{d\alpha^2} = mg\ell \cos \alpha + m\ell^2 \Omega^2 (1 - 2 \cos^2 \alpha)$$

$$= \begin{cases} m\ell^2(\Omega_c^2 - \Omega^2) & \text{en } \alpha = 0 \\ -m\ell^2(\Omega_c^2 + \Omega^2) & \text{en } \alpha = \pi \\ m\ell^2 \frac{(\Omega_c^2 - \Omega^2)^2}{\Omega^2} & \text{en } \alpha = \pm \alpha_0 \end{cases}$$

on voit que :

- $\alpha = 0$ est stable (minimum de \mathcal{E}_p) pour $\Omega < \Omega_c$, instable sinon ;
- $\alpha = \pi$ est instable (et peu envisageable avec un fil souple !);
- $\alpha = \pm \alpha_0$ est stable lorsqu'elle existe, pour $\Omega > \Omega_c$.

On en déduit la position que va prendre le pendule, suivant la vitesse de rotation imposée :



Doc. 1

où l'angle α_1 est donné par la mise en tension du fil du bas, soit :

$$\alpha_1 = \arccos\left(\frac{h}{\ell}\right) \text{ et } \Omega_1 = \Omega_c \sqrt{\frac{\ell}{h}}.$$

2 • Pour $\Omega < \Omega_c$, la tension du fil du haut est :

$$T = mg = 10 \text{ N} < T_{\max}.$$

Pour $\Omega_c < \Omega < \Omega_1$, on obtient :

$$\vec{T} + m\vec{g} + m\ell\Omega^2 \sin \alpha \vec{e}_r = 0, \text{ donc } T = \frac{mg}{\cos \alpha}, \text{ inférieure à } \Omega_1$$

$$T_1 = \frac{mg}{\cos \alpha_1} = 1,33 \text{ N} < T_{\max}. \text{ Le fil ne casse donc pas.}$$

Il faut donc envisager le cas $\Omega > \Omega_1$, avec $\alpha = \alpha_1$, les deux étant tendus, soit :

$$\vec{T} + m\vec{g} + \vec{T}' + m\ell\Omega^2 \sin \alpha_1 \vec{e}_r = \vec{0}$$

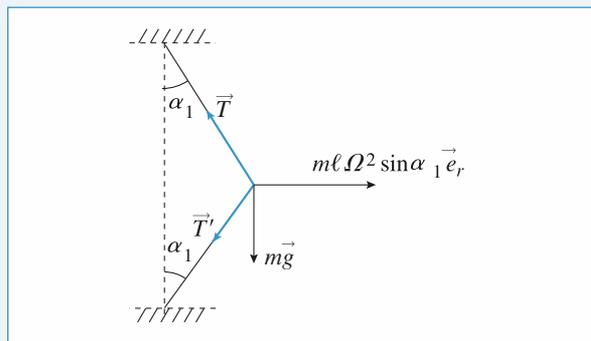
et donc, en projection :

$$(T + T') \sin \alpha_1 = m\ell\Omega^2 \sin \alpha_1$$

$$(T - T') \cos \alpha_1 = mg$$

La tension la plus importante est :

$$T = \frac{\left(\frac{mg}{\cos \alpha_1} + m\ell\Omega^2\right)}{2}.$$



Doc. 2

Le fil casse pour :

$$\Omega_{\max} = \sqrt{\frac{-g}{\ell \cos \alpha_1} + \frac{2T_{\max}}{m\ell}} \approx 14,7 \text{ rad.s}^{-1} \approx 140 \text{ tours/min.}$$

6 Bille dans un tube en rotation

1 • Dans le référentiel \mathcal{R}_T lié au tube T , la bille B est soumise :

- à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
- à la réaction \vec{R} du tube (orthogonale au tube $\vec{R} \cdot \vec{u} = 0$);
- à la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{F}_{ie} = -(-m \cdot \omega^2 \cdot \overline{OP});$$

- à la force d'inertie de Coriolis :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}_{1/\mathcal{R}_T}(B).$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$m\vec{a}_{/R_r}(B) = m\vec{g} + \vec{R} + m\omega^2\vec{OP} - 2m\omega\vec{e}_z \wedge \vec{v}_{/R_r}(B)$$

avec $\vec{OP} = r\vec{u}$, $\vec{v}_{/R_r}(B) = r\dot{\vec{u}}$ et $\vec{a}_{/R_r}(B) = r\ddot{\vec{u}}$.

En projection sur \vec{u} , on obtient $m\dot{r} = m\omega^2 r$. La solution est :

$$r(t) = r_0 \text{ch}(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \text{sh}(\omega t).$$

La bille sort du tube à l'instant τ tel que :

$$r(\tau) = r_0 \text{ch}(\omega \tau) + \frac{v_0}{\omega} \text{sh}(\omega \tau) = \ell.$$

Avec $v_0 = 0$, cette équation devient :

$$\tau = \frac{1}{\omega} \arg \text{ch} \left(\frac{\ell}{r_0} \right) = 1,5 \text{ s.}$$

2 • a) Le bilan des forces est le même qu'à la question 1) mais leurs expressions changent :

- $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$;
- $\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_x\vec{e}_x$;
- $\vec{F}_{ic} = m\omega^2 r\vec{u}$, et
- $\vec{F}_{ic} = -2m\omega\vec{e}_x \wedge r\dot{\vec{u}} = -2m\omega r\dot{\vec{e}}_x$.

La relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{u} (ce qui permet d'éliminer \vec{R}) s'écrit :

$$m\ddot{r} = -mg\sin(\omega t) + m\omega^2 r.$$

b) La solution de cette équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène associée r_h et d'une solution particulière r_p .

$$r_h = A\text{ch}(\omega t) + B\text{sh}(\omega t) \text{ (cf. question 1))}.$$

On cherche r_p sous la forme $r_p = C\sin(\omega t)$ (la solution particulière cherchée « ressemble » au second membre de l'équation différentielle); on doit donc avoir :

$$-mC\omega^2 \sin(\omega t) = -mg\sin(\omega t) + m\omega^2 C \sin(\omega t),$$

$$\text{soit } C = \frac{g}{2\omega^2}.$$

Finalement :

$$r(t) = A\text{ch}(\omega t) + B\text{sh}(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$\text{avec } r_0 = A \text{ et } v_0 = \omega B + \frac{g}{2\omega}.$$

On en déduit :

$$r(t) = r_0 \text{ch}(\omega t) + \frac{1}{\omega} \left(v_0 - \frac{g}{2\omega} \right) \text{sh}(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t).$$

c) La relation fondamentale de la dynamique projetée respectivement sur \vec{e}_r et sur \vec{e}_x donne :

$$\begin{cases} 0 = R_r - mg \cos(\omega t) - 2m\omega \dot{r} \\ 0 = R_x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } \vec{R} = & \left(mg \cos(\omega t) + 2m\omega \left(\omega r_0 \text{sh}(\omega t) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(v_0 - \frac{g}{2\omega} \right) \text{ch}(\omega t) + \frac{g}{2\omega} \cos(\omega t) \right) \right) \vec{e}_r. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(t) = \| R_r \vec{e}_r \| = & | 2mg \cos(\omega t) + 2m\omega^2 r_0 \text{sh}(\omega t) \\ & + (2m\omega v_0 - mg) \text{ch}(\omega t) |. \end{aligned}$$

d) B est en équilibre si, et seulement si, $r(t)$ est constant, ce qui est parfaitement impossible d'après l'expression établie au 2) b).

Le mouvement de B est sinusoïdal si les facteurs de $\sinh(\omega t)$ et de $\cosh(\omega t)$ sont nuls donc si :

$$r_0 = 0 \text{ et } v_0 = \frac{g}{2\omega}.$$

e) Les conditions initiales donnent :

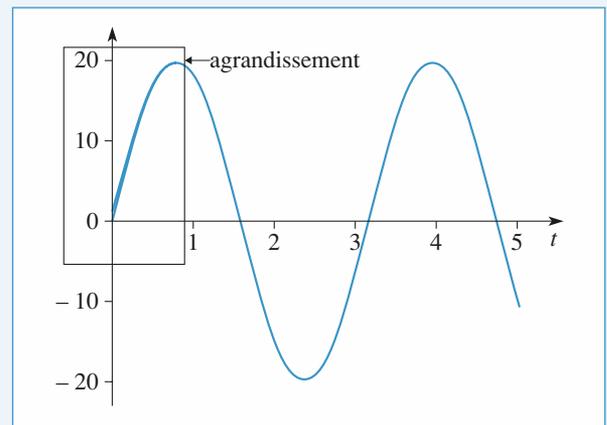
$$r(t) = r_0 (\text{ch}(\omega t) - \text{sh}(\omega t)) + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$= r_0 \exp(-\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t).$$

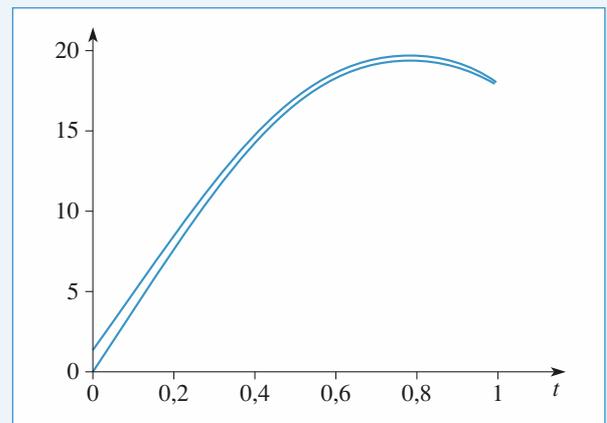
Au bout d'un temps $\tau \gg \frac{1}{\omega}$, l'exponentielle sera négligeable

et seul subsistera le mouvement sinusoïdal.

On a tracé sur le même graphique $r(t)$ et sa partie sinusoïdale : elles sont très vite confondues.



Doc. 1



Doc. 2

3 • a) Le bilan des forces est toujours le même. Leurs expressions sont ici :

$$\begin{aligned} \bullet \vec{P} = & -mg\vec{e}_z; & \bullet \vec{R} = & R_u\vec{u}' + R_y\vec{e}_y; \end{aligned}$$

• $\vec{F}_{ic} = m\omega^2 r \cos \varphi \vec{e}_x$ • $\vec{F}_{ic} = 2m\omega \dot{r} \cos \varphi \vec{e}_y$.

En projection sur \vec{u} (pour éliminer \vec{R}), la relation fondamentale de la dynamique donne :

$$m\ddot{r} = m\omega^2 r \cos^2 \varphi - mg \sin \varphi \Leftrightarrow \ddot{r} - (\omega \cos \varphi)^2 r = -g \sin \varphi.$$

b) La solution de cette équation est de la forme :

$$r(t) = A \operatorname{ch}(\Omega t) + B \operatorname{sh}(\Omega t) + \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2}$$

en posant $\Omega = \omega \cos \varphi$. Compte tenu des conditions initiales, on obtient :

$$r(t) = \left(r_0 - \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2} \right) \operatorname{ch}(\Omega t) + \frac{v_0}{\Omega} \operatorname{sh}(\Omega t) + \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2}$$

c) À l'équilibre, $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ donc $r_{eq} = \frac{g \sin \varphi}{\Omega^2}$.

Cet équilibre est instable : en effet, si on écarte la bille de cette position d'équilibre, l'équation du mouvement que l'on peut écrire sous la forme $\ddot{r} = (r - r_{eq})\Omega^2$ prouve que la bille s'éloignera de sa position d'équilibre.

7 Perle sur un cercle horizontal en rotation

1 • Dans le référentiel tournant \mathcal{R}_c , la perle est soumise aux forces suivantes :

- son poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
- la réaction du cerceau : \vec{R} (avec $\vec{R} \cdot \vec{e}_\theta = 0$, car le mouvement a lieu sans frottements) ;
- la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_{ic} = m\Omega^2 \vec{OM}$;
- la force d'inertie de Coriolis : $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_c}(P)$.

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$: $\vec{CM} = a\vec{e}_r$

$$\vec{OM} = \vec{OC} + \vec{CM} = a(1 + \cos \theta)\vec{e}_r - a \sin \theta \vec{e}_\theta,$$

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}_c}(M) = a\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \vec{a}_{/\mathcal{R}_c}(M) = -a\dot{\theta}^2\vec{e}_r + a\ddot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Alors $\vec{F}_{ic} = 2ma\Omega\dot{\theta}\vec{e}_r$.

Pour déterminer l'équation du mouvement, on projette la relation fondamentale de la dynamique sur \vec{e}_θ (ce qui a pour effet d'éliminer la force inconnue \vec{R}) :

$$ma\ddot{\theta} = -m\Omega^2 a \sin \theta \text{ d'où } \ddot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta = 0.$$

Remarque

La perle est en équilibre pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$ (dans ce cas la perle est en O , c'est-à-dire sur l'axe de rotation). La position $\theta = 0$ est stable : au voisinage de cette position d'équilibre, l'équation du mouvement est $\ddot{\theta} = -\Omega^2 \theta$ dont la solution est sinusoidale. La position $\theta = \pi$ est instable.

Autre méthode

La réaction du support est orthogonale à la vitesse, elle ne travaille donc pas, tout comme la force d'inertie de Coriolis. La perle reste à altitude constante, donc le poids ne travaille pas au cours du mouvement. Seule la force d'inertie d'entraînement travaille et elle est conservative.

On peut donc utiliser la conservation de l'énergie mécanique :

$\mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{P_{ic}} = \text{cte}$. Il reste à déterminer $\mathcal{E}_{P_{ic}}$:

$$\begin{aligned} \delta \tau_{ic} &= \vec{F}_{ic} \cdot d\vec{OM} = -m\Omega^2 a \sin \theta a d\theta \\ &= d(ma^2\Omega^2 \cos \theta) = -d\mathcal{E}_{P_{ic}} \end{aligned}$$

avec $\mathcal{E}_{P_{ic}} = -ma^2\Omega^2 \cos \theta + \text{cte}$.

L'équation du mouvement est donc :

$$ma^2\dot{\theta}^2 - ma^2\Omega^2 \cos \theta = \text{cte},$$

ou encore, après dérivation et simplification par :

$$ma^2\dot{\theta}, \dot{\theta} + \Omega^2 \sin \theta = 0 : \text{c'est la même équation.}$$

2 • La relation fondamentale de la dynamique projetée sur \vec{e}_r et sur \vec{e}_z donne, en posant $\vec{R} = R_r\vec{e}_r + R_z\vec{e}_z$

(\vec{R} est orthogonal au cerceau donc à \vec{e}_θ) :

$$\begin{cases} -ma\dot{\theta}^2 = R_r + m\Omega^2 a(1 + \cos \theta) + 2m\Omega a\dot{\theta} \\ 0 = R_z - mg, \end{cases}$$

d'où $\begin{cases} R_r = -ma\dot{\theta}^2 - m\Omega^2 a(1 + \cos \theta) - 2m\Omega a\dot{\theta} \\ R_z = mg. \end{cases}$

8 Jeu de palets sur un manège

1 • Dans le référentiel galiléen lié au sol (repère (O, X, Y, Z)), le mouvement du palet, horizontal, est rectiligne et uniforme : le poids et la réaction du plan, verticale, se compensent.

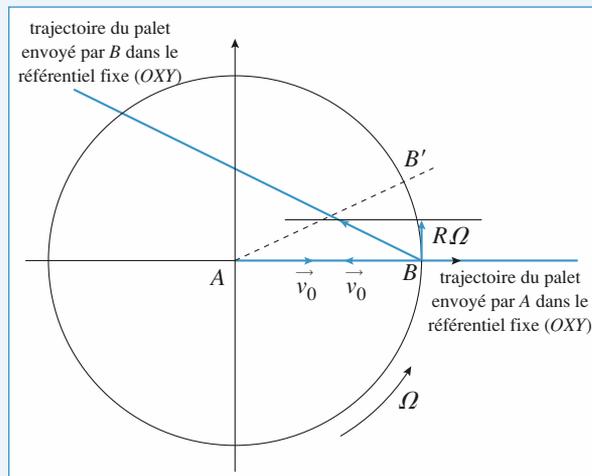
• Erreur de A : il lance le palet à vitesse $v_0 \vec{e}_x(t=0) = v_0 \vec{e}_x$, mais oublie que B se déplace par rapport au sol à vitesse $R\Omega \vec{e}_\theta$ (initialement $R\Omega \vec{e}_y$) : B se trouve par exemple en B'

à la date $t = \frac{R}{v_0}$.

• Erreur de B : il lance le palet à vitesse absolue :

$$-v_0 \vec{e}_x(t=0) + R\Omega \vec{e}_{\theta(t=0)} = -v_0 \vec{e}_x + R\Omega \vec{e}_y,$$

et rate donc A.



Doc. 1

2 • Étudions le mouvement d'un palet dans le référentiel lié au manège (repère $(O, x, y, z = Z)$), en tenant compte des forces d'inertie :

$$\begin{cases} \vec{F}_{ic} = -m \vec{a}_e = +mr \Omega^2 \vec{e}_r = m \Omega^2 (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \\ \vec{F}_{ic} = -2m \Omega \vec{e}_z \wedge (\dot{x} \vec{e}_x + \dot{y} \vec{e}_y) = 2m \Omega (\dot{y} \vec{e}_x - \dot{x} \vec{e}_y) \end{cases}$$

Les mouvements horizontaux des palets sont alors régis par les équations couplées :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega \dot{y} - \Omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega \dot{x} - \Omega^2 y = 0 \end{cases}$$

Pour l'affixe complexe $u = x + iy$, il vient :

$$\ddot{u} + 2i \Omega \dot{u} - \Omega^2 u = 0.$$

Les solutions de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 2 sont $r_1 = -i\Omega = r_2$, confondues, donc :

$$u(t) = (At + B)e^{-i\Omega t} = [(\dot{u}(0) + i \Omega u(0))t + u(0)]e^{-i\Omega t}$$

en utilisant les conditions initiales ; ou bien encore :

$$u(t) = [(\dot{x}_0 + i \dot{y}_0 + i \Omega x_0 - \Omega y_0)t + x_0 + i y_0]e^{-i\Omega t}$$

où on identifie :

$$\begin{cases} x(t) = [(\dot{x}_0 - \Omega y_0)t + x_0] \cos \Omega t + [(\dot{y}_0 + \Omega x_0)t + y_0] \sin \Omega t \\ y(t) = [(\dot{y}_0 + \Omega x_0)t + y_0] \cos \Omega t - [(\dot{x}_0 - \Omega y_0)t + x_0] \sin \Omega t \end{cases}$$

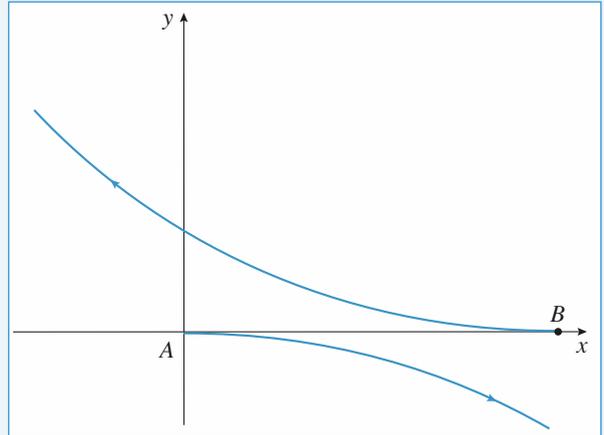
• Pour le palet lancé par A, $x_{A_0} = y_{A_0} = 0$, $\dot{x}_{A_0} = v_0$ et $\dot{y}_{A_0} = 0$, donc :

$$\begin{cases} x_A(t) = v_0 t \cos \Omega t \\ y_A(t) = -v_0 t \sin \Omega t \end{cases}$$

• Pour le palet lancé par B, $x_{B_0} = R$, $y_{B_0} = 0$, $\dot{x}_{B_0} = -v_0$ et $\dot{y}_{B_0} = 0$, donc :

$$\begin{cases} x_B(t) = (-v_0 t + R) \cos \Omega t + (R\Omega t) \sin \Omega t \\ y_B(t) = (R\Omega t) \cos \Omega t - (-v_0 t + R) \sin \Omega t \end{cases}$$

Remarque : Les expressions de X_A et Y_A (ou X_B et Y_B) en fonction du temps étant évidentes, on aurait très bien pu obtenir x_A et y_A (ou x_B et y_B) à partir de celles-ci par une rotation d'angle $-\Omega t$ autour de (Oz) .



Doc. 2

LES OBJECTIFS

- Expliquer différents phénomènes observés sur Terre comme les effets de marée.

LES PRÉREQUIS

- Mécanique en référentiel non galiléen.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Résolution des équations différentielles du second ordre à coefficients constants.
- Développements limités.

ESSENTIEL

Les différents référentiels

- Le référentiel de Copernic $\mathcal{R}_C (C ; x_C, y_C, z_C)$ est défini par le centre de masse C du système solaire et par les axes (Cx_C) , (Cy_C) et (Cz_C) liés aux directions de trois étoiles considérées comme fixes. Pour des points matériels mobiles dans le système solaire, ce référentiel est galiléen, avec une excellente approximation.
- Le référentiel de Kepler \mathcal{R}_K se déduit du référentiel de Copernic par translation : l'origine du référentiel de Kepler (ou référentiel héliocentrique) est le centre d'inertie S du Soleil. En général, \mathcal{R}_K est galiléen avec une excellente approximation.
- Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O se déduit aussi du référentiel de Copernic par translation : l'origine de \mathcal{R}_O est le centre d'inertie O de la Terre et ses axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic. Le référentiel géocentrique n'est pas galiléen.
- Le référentiel terrestre local $\mathcal{R}_T (P ; x, y, z)$ a son origine en un point P de la surface de la Terre, l'axe (Px) pointe vers l'est (le vecteur \vec{e}_x est tangent au parallèle du lieu), l'axe (Py) pointe vers le nord (le vecteur \vec{e}_y est tangent au méridien du lieu) et l'axe (Pz) pointe donc vers le zénith (confondu avec la verticale du lieu). Il est en rotation par rapport au référentiel géocentrique, il n'est pas galiléen.

La loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel géocentrique

$$\begin{aligned} m \vec{a}_{/\mathcal{R}_O}(M) &= \vec{F}_a + m(\vec{G}_T(M) + \vec{G}_L(M) + \vec{G}_S(M) + \dots) - m \vec{a}_{/\mathcal{R}_C}(O) \\ &= \vec{F}_a + m \vec{G}_T(M) + m \left(\left(\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O) \right) + \left(\vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(O) \right) + \dots \right), \end{aligned}$$

où \vec{F}_a représente les différentes forces appliquées au point M et $\vec{G}_i(M)$ l'attraction gravitationnelle de l'astre i sur le point M (l'astre i représente la Terre, la Lune, le Soleil et tous les autres astres). Les termes $\vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O)$, $\vec{G}_S(M) - \vec{G}_S(O)$, ... sont appelés « termes différentiels » ou encore « termes de marées ».

Dans le domaine terrestre, on négligera ces termes différentiels (sauf pour l'étude explicite du phénomène des marées !), le seul champ gravitationnel à prendre en compte étant alors le champ gravitationnel terrestre. Le référentiel géocentrique \mathcal{R}_O se comporte comme un référentiel galiléen et la relation fondamentale de la dynamique s'y écrit :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}_O}(M) = \vec{F}_a + m \vec{G}_T(M).$$

La loi fondamentale de la dynamique dans le référentiel terrestre

En référentiel terrestre, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(M) = \vec{F}_a + m \vec{g}(M) - 2m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M).$$

La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids.

L'importance de la force d'inertie de Coriolis $-2m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M)$ reste faible en général, elle est souvent négligée. Ce terme est responsable, par exemple, de la déviation vers l'est d'un corps tombant en chute libre sans vitesse initiale.

Conseils et pièges à éviter

En référentiel terrestre, l'accélération d'entraînement est incluse dans l'accélération de la pesanteur; ainsi pour un point matériel soumis à une force \vec{F} , le principe fondamental de la dynamique en référentiel terrestre s'écrit :

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}_T}(M) = \vec{F} + m \vec{g} - m \vec{a}_{1C}(M) \quad \text{avec} \quad \vec{a}_{1C}(M) = 2m \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{/\mathcal{R}_T}(M)$$

1 Si la terre tournait plus vite...

Quelle devrait être la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même (ainsi que la durée du jour correspondante) pour qu'il n'y ait pas de pesanteur à l'équateur ?

Conseil Dans le référentiel terrestre, la force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids.

2 Influence de la force de Coriolis terrestre sur la conduite d'une moto

Un motard roule sur une autoroute horizontale et rectiligne, dans la direction nord-sud, à la vitesse de $200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ (il est en excès de vitesse!). La latitude du lieu est de 45° . La masse du système {moto + motard} est de 400 kg .

- Calculer les composantes de la force d'inertie de Coriolis. Commenter.
- De quel angle doit-il s'incliner s'il roule à vitesse constante (la réaction de la route doit être parallèle au plan de la moto pour qu'elle roule bien droit) ?

Conseil Utiliser la définition de la force de Coriolis terrestre et exprimer tous les vecteurs dans la base du référentiel terrestre local.

3 *Lancement vertical d'une fusée

Depuis un point P situé à la surface de la Terre à la latitude de λ , on lance verticalement vers le haut une petite fusée de masse m , assimilée à un point matériel, avec la vitesse \vec{v}_0 .

- Établir les équations du mouvement de la fusée (dans le référentiel terrestre local du point P).
- Déterminer la hauteur h atteinte par la fusée en négligeant la force de Coriolis terrestre.
- En raisonnant par approximations successives, déterminer les coordonnées du point de chute de la fusée. Dans quelle direction est-elle déviée par rapport à son point de départ ? Commenter.

4 • Données : $\lambda = 45^\circ$ et $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) $v_0 = 100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Calculer la distance entre le point de départ et le point de chute ainsi que la hauteur atteinte par la fusée.

b) À quelle vitesse faut-il lancer la fusée pour qu'elle retombe à 5 mètres de son point de chute ? Quelle hauteur atteint-elle alors ?

Conseils La méthode est la même que pour l'exercice classique sur l'étude de la déviation vers l'est (cf. *H-Prépa, Tout en un, 1^{re} année, chapitre 28*).

1) Ne pas oublier que la force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids. Projeter la relation fondamentale de la dynamique sur les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) du référentiel terrestre local.

3) Déterminer en premier lieu l'expression de la vitesse $\vec{v}_{(\text{ordre } 0)}$ en négligeant la force de Coriolis (approximation à l'ordre 0). Dans l'expression de la force de Coriolis (c'est une perturbation par rapport au cas précédent), remplacer la vitesse par son expression à l'ordre 0. On obtient alors l'expression de la vitesse et de la position du point à l'ordre 1 (en Ω), ce qui est suffisant compte tenu de la faiblesse des effets étudiés.

4 *Chute d'un point sur un plan incliné dans le référentiel terrestre

Du haut d'un tremplin de saut à ski (assimilé à un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale), on laisse glisser un objet quasi ponctuel sous l'effet de la pesanteur. Le tremplin est orienté nord-sud en un lieu de latitude λ , sa longueur est ℓ (entre le sommet H et le début de la partie « montante » B), les frottements sont négligeables.

1 • En raisonnant par approximations successives, déterminer :

a) la vitesse \vec{v} de l'objet quand il arrive au bas du tremplin ;

b) son décalage D par rapport à la ligne de plus grande pente HB ; discuter du sens de cette déviation (vers l'est ou vers l'ouest ?). Que dire si $\alpha = \lambda$?

2 • Calculer \vec{v} et D . Que deviennent ces valeurs si le tremplin est orienté sud-nord ?

Données : $\ell = 100 \text{ m}$, $\alpha = 45^\circ$, $\lambda = 60^\circ$.

Conseils Ne pas oublier que la force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids.

Projeter la relation fondamentale de la dynamique (écrite dans le référentiel terrestre local) sur les axes (OX) , (OY) et (OZ) adaptés au plan incliné, sans oublier que le point se déplace sur le plan incliné.

Déterminer en premier lieu l'expression de la vitesse (\vec{v}_0) en négligeant la force de Coriolis (approximation à l'ordre 0). Dans l'expression de la force de Coriolis (c'est une perturbation par rapport au cas précédent), remplacer la vitesse par son expression à l'ordre 0 (\vec{v}_0). On obtient alors l'expression de la vitesse et de la position du point à l'ordre 1 (en Ω), ce qui est suffisant compte tenu de la faiblesse des effets étudiés.

5 * Limite de roche

La comète Shoemaker-Lévy 9 est passée en juillet 1992 suffisamment près de Jupiter pour se fragmenter en morceaux à cause des « forces de marées » dues à Jupiter.

On se propose, dans cet exercice, de déterminer, par un modèle simple, la distance en dessous de laquelle la comète se disloque en s'approchant de Jupiter.

On fait les hypothèses suivantes :

- Jupiter est sphérique et homogène, de rayon $R_J = 71\,400$ km, de masse $M_J = 1,91 \cdot 10^{27}$ kg et de masse volumique μ_J ;
- la comète est sphérique et homogène, de rayon R_C , de masse volumique $\mu_C = 1,00 \cdot 10^3$ kg \cdot m $^{-3}$;
- le référentiel « Jupiterocentrique » est galiléen ;
- la comète n'est soumise qu'à l'action gravitationnelle de Jupiter ;
- la comète est en orbite circulaire de rayon d autour de Jupiter (avec $R_C \ll d$).

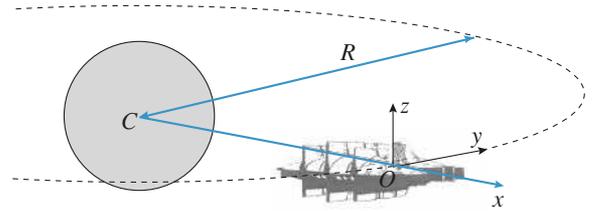
1 • Écrire la relation fondamentale de la dynamique appliquée à un petit volume élémentaire, de masse δm , de la comète dans le référentiel « Cométocentrique ».

2 • On considère un modèle dans lequel la cohésion de la comète n'est plus assurée si le terme des marées dépasse le champ gravitationnel propre de la comète. En se plaçant à la périphérie de la comète pour comparer les deux termes, déduire l'ordre de grandeur de la distance limite d_{lim} à laquelle la comète peut s'approcher de Jupiter sans risque (appelée « limite de roche »).

Conseils

- 1) Le raisonnement est le même que celui du cours en remplaçant le référentiel géocentrique par le référentiel « Cométocentrique » et le référentiel de Copernic par le référentiel « Jupiterocentrique ».
- 2) On prendra comme ordre de grandeur du terme des marées la valeur maximale de son module.

6 ** Pourquoi s'amarrer à la navette spatiale ?



Un vaisseau est en orbite circulaire de rayon R autour d'une planète, à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$.

Un cosmonaute effectuant une sortie est au point O , relié au vaisseau par un câble d'amarrage.

Pour les applications numériques, on prendra une période de révolution de 2 heures autour de la Terre, de masse M . On rappelle que g_0 , champ de pesanteur terrestre à la surface de la planète, de rayon $R_T = 6\,400$ km, vaut environ $9,81$ m \cdot s $^{-2}$.

1 • Quelle est la relation liant la vitesse angulaire Ω , la constante de gravitation G , la masse M de la planète, et le rayon R de l'orbite ? Déterminer numériquement l'altitude de l'orbite.

2 • Établir les équations du mouvement du cosmonaute dans le repère (O, x, y, z) .

3 • Par quel terme la force d'inertie d'entraînement est-elle pratiquement compensée ? Développer alors le terme différentiel identifié à l'ordre linéaire en x/R , y/R et z/R , et simplifier les équations du mouvement.

4 • Le mouvement du cosmonaute selon l'axe (Oz) apparaît-il stable ?

5 • Les valeurs x_0, y_0, \dot{x}_0 et \dot{y}_0 et initiales étant données, déterminer les expressions de $x(t)$ et $y(t)$.

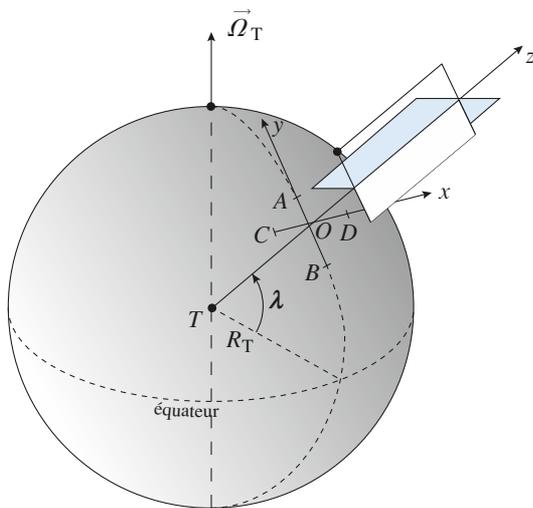
6 • Le cosmonaute part de O avec une petite vitesse radiale : \dot{x}_0 est seule non nulle. Va-t-il s'éloigner indéfiniment de son vaisseau ?

7 • Le cosmonaute n'a pas de vitesse relative initiale, mais perd le contact avec le vaisseau en $O' \neq O$: \dot{x}_0 est seule non nulle. Décrire ce qui arrive à notre aventurier. Que penser du câble d'amarrage utilisé pour les sorties dans l'espace ?

Conseils

- 1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique pour un mouvement circulaire (uniforme).
- 2) Il faut expliciter les forces de gravitation et d'inertie.
- 3) Gravitation et inertie d'entraînement se compensent presque, ce qui justifie l'utilisation d'un développement limité.

7 « Visualisation » de la rotation du pendule de Foucault



Plaçons deux cartes postales « croisées » à la verticale d'un point O de latitude λ sur le globe terrestre : leur direction commune est la verticale du lieu (axe (Oz) , confondu avec le rayon TO), leurs autres directions étant sud-nord (axe (Oy) , carte claire) et ouest-est (axe (Ox) , carte sombre).

On note AB la projection, de largeur $2L$, de la tranche inférieure de la carte claire (pour la carte sombre, CD).

1 • Le globe est mis en rotation à vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$ autour de l'axe des pôles géographiques. Quelles sont les vitesses des points A et B , à exprimer à l'aide de R_T , L , λ et Ω_T ?

2 • La carte étant fixe dans le référentiel géocentrique, le segment AB semble tourner sous elle. Exprimer la vitesse angulaire correspondante, notée ω .

3 • ω peut-elle coïncider avec Ω_T ? Que se passe-t-il dans l'hémisphère Sud ? Qu'advient-il du segment CD , projection de la base de la carte sombre ?

4 • Quel lien peut-on proposer entre cette expérience élémentaire et celle du pendule de Foucault ?

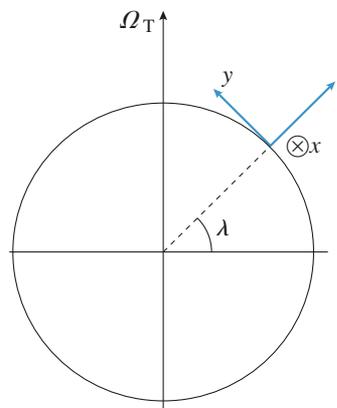
Conseil

Il est conseillé de faire l'expérience pour visualiser les rotations ; les calculs proposés étant par ailleurs élémentaires, ils permettent de retrouver simplement la rotation du plan d'oscillation du pendule de Foucault étudiée en cours (cf. *H. Prépa, Tout en un, 1^{re} année, chapitre 28*).

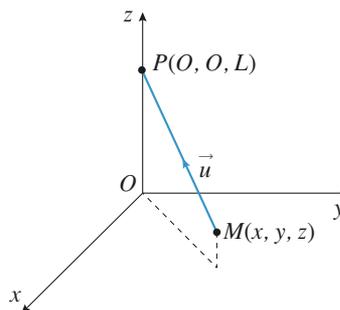
8 Distances extrêmes pour le pendule de Foucault

Un pendule simple de longueur L , porte une masse ponctuelle m en M . Il est accroché en un point O fixe de la verticale du lieu notée Oz , à la latitude λ sur Terre. On note Ω_T la vitesse angulaire de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles. On se limite à des oscillations de faible amplitude, de sorte que le mouvement pourra être considéré comme ayant lieu dans un plan horizontal. À la date $t = 0$, on lâche le pendule, la masse m étant abandonnée sans vitesse initiale à la distance r_0 de l'axe (Oz) .

On note : $\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}$; $\Omega = \Omega_T \sin \lambda$.



Doc. 1



Doc. 2

1 • Montrer que les équations du mouvement dans le plan (xOy) s'écrivent :

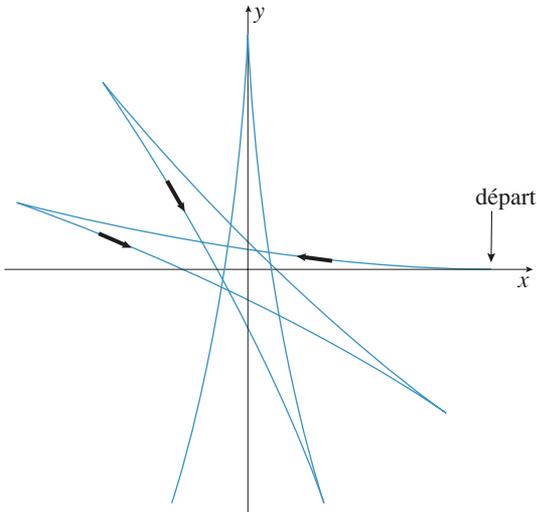
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega\dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \\ \ddot{y} + 2\Omega\dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$$

Exprimer Ω .

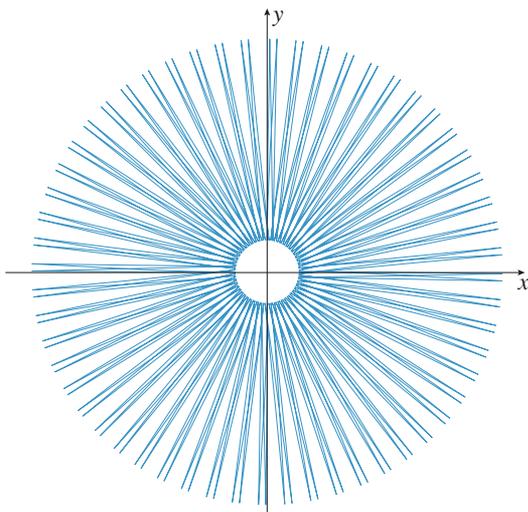
2 • On simule l'évolution régie par ces équations en prenant Ω de l'ordre de $\frac{\omega_0}{10}$, ce qui donne les résultats suivants indiqués sur les documents 3 et 4 (le pendule est

lâché à l'abscisse x_0 sur l'axe (Ox) , sans vitesse initiale). Justifier qualitativement que le pendule, lâché sans vitesse initiale, rate tout de même le point O .

Que constate-t-on pour l'évolution de la direction d'oscillation ? Pour l'évolution de la distance r à l'origine O ?



Doc. 3. Premières oscillations.



Doc. 4. Après de nombreuses oscillations.

3 • Pour justifier ce dernier constat, on étudie le mouvement de l'extrémité du pendule en coordonnées polaires.

a) Écrire les équations du mouvement projetées sur les directions radiale et orthoradiale.

b) Quelle équation correspond à l'expression du théorème du moment cinétique projeté sur (Oz) ? En obtenir une intégrale première.

c) Exprimer en fonction de ω , Ω , et $r_0 = x_0$ les valeurs particulières de r observées.

d) Cette simulation numérique semble-t-elle adaptée à la description du mouvement du pendule de Foucault réel ?

Conseils

1) Écrire les équations données par la relation fondamentale de la dynamique, en tenant compte du caractère correctif de la force de Coriolis et de la faible inclinaison du pendule (cf. H. Prépa, Tout en un, 1^{re} année, chapitre 28, le cours).

3) a) Reprendre les expressions de \vec{v} et \vec{a} en coordonnées polaires.

b) Considérer la composante L_z du moment cinétique en O .

c) On élimine $\dot{\theta}$ avec le moment cinétique, et on étudie l'équation radiale où il ne reste plus que $r(t)$...

9 *** Terme des marées, marées de vives-eaux et marées de mortes-eaux

D'après Polytechnique.

La Lune, le Soleil et la Terre sont assimilés à des sphères homogènes, de centres respectifs L , S et T , de rayons respectifs R_L , R_S et R_T , de masses respectives M_L , M_S et M_T . On utilise un repère orthonormé direct $(C; x, y, z)$ lié à la Terre, l'axe (Cz) étant dirigé du pôle Sud vers le pôle Nord. Dans ce référentiel, L et S décrivent des cercles de centre C dans le plan (Cxy) , de rayons respectifs R_{CL} et R_{CS} , avec des vitesses angulaires constantes ω_L et ω_T correspondant respectivement aux périodes :

$$T_L = 24 \text{ h } 50 \text{ min} \quad \text{et} \quad T_S = 24 \text{ h}.$$

À l'origine des temps, on suppose que L et S sont situés sur l'axe (Cx) . On suppose enfin que, par rapport à un référentiel galiléen, le mouvement de la Terre est exclusivement constitué du mouvement de C sous l'action de l'attraction gravitationnelle du Soleil et de la Lune et d'un mouvement de rotation propre autour de l'axe (Cz) à la

vitesse angulaire ω (avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = 24 \text{ h}$).

1 • On considère un corps ponctuel P , de masse m , lié à la Terre par un support exerçant une force \vec{F} sur ce point. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique au point P dans le référentiel lié à la Terre, donner l'expression de la force \vec{F} sous forme de trois termes dont l'un, noté $m\vec{g}_0$, représente le poids du corps P et les deux autres, notés respectivement $m\Delta\vec{g}_L$ et $m\Delta\vec{g}_S$ les termes de marées dus à la Lune et au Soleil.

2 • Dans cette question, on néglige l'influence du Soleil. Par un schéma simple, expliquer l'existence de deux marées par jour et le décalage entre les heures de marées hautes (ou basses) pour deux jours consécutifs.

3 • On cherche maintenant à comparer les influences respectives de la Lune et du Soleil. On prend P situé sur

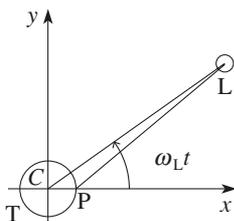
l'axe (Ox) à la surface de la Terre.

a) Montrer que $\Delta\vec{g}_L$ peut se mettre, au premier ordre en

$\frac{R_T}{R_{CL}}$, sous la forme :

$$\Delta\vec{g}_L = \frac{GM_L}{R_{CL}^2} \left(\frac{R_T}{R_{CL}} \right) \left((3\cos^2(\omega_L t) - 1)\vec{u}_x + (3\cos(\omega_L t)\sin(\omega_L t))\vec{u}_y \right).$$

Exprimer sous la même forme $\Delta\vec{g}_S$.



b) La Lune et le Soleil sont vus depuis la Terre sous le même diamètre apparent $\varepsilon = 0,01$ radian. Leurs masses volumiques respectives sont $\mu_L = 3,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $\mu_S = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

Comparer les influences de la Lune et du Soleil.

On pourra calculer le rapport $\frac{|\Delta\vec{g}_L|}{|\Delta\vec{g}_S|}$ à $t = 0$, par exemple. Commenter.

c) En supposant que les variations du niveau de la mer au point P sont proportionnelles à la composante de $\Delta\vec{g}$ sur Cx , caractériser les positions relatives de la Lune, du Soleil et de la Terre lors des marées d'amplitude maximale (marées de vives-eaux) et lors des marées d'amplitude minimale (marées de mortes-eaux).

Conseils

1) On conserve le terme de marées dans la relation fondamentale de la dynamique écrite dans le référentiel lié à la Terre. Dans ce référentiel le point P est immobile. La force d'inertie d'entraînement est incluse dans le poids.

2) Représenter sur un schéma le terme différentiel en plusieurs points de la surface de la Terre pour une position donnée de la Lune.

3) Faire un schéma représentant la Terre, la Lune, le point P à un instant t quelconque avant de calculer. Penser à écrire $\overline{PL} = \overline{PC} + \overline{CL}$.

10 Étude dynamique des anneaux de Saturne

D'après ENSTIM 2008.

La planète Saturne est assimilée à un corps à répartition sphérique de masses, de centre O_S , de masse $m_S = 6 \cdot 10^{26} \text{ kg}$, de rayon R_S . On suppose que le référentiel saturnien, de point fixe O_S et en translation circulaire par rapport au référentiel héliocentrique, est galiléen. On note Γ la constante de gravitation.

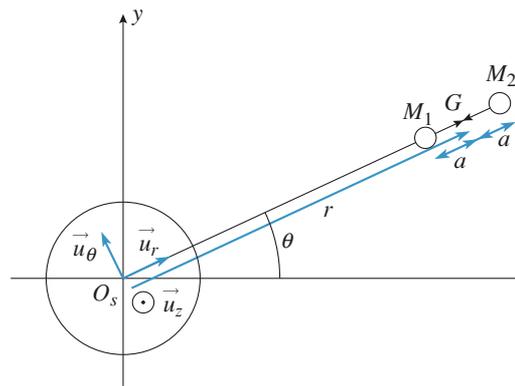
1. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

Supposons qu'un anneau soit un agglomérat solide de corps (rochers, cailloux, blocs de glace), en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de Saturne. On isole deux de ces corps formant un doublet $\delta = \{M_1, M_2\}$, de faible taille à l'échelle astronomique, de centre d'inertie G , de même masse m , à la distance $2a$ l'un de l'autre ; on suppose, en outre, que :

- O_S, M_1 et M_2 restent alignés en permanence ;
- on pose $\vec{u}_r = \frac{\overline{O_S G}}{O_S G}$, $\overline{O_S G} = r\vec{u}_r$, $\theta = \omega \cdot t$, et on définit

le repère cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$;

- il vient $\overline{O_S M_1} = (r - a)\vec{u}_r$ et $\overline{O_S M_2} = (r + a)\vec{u}_r$;
- $a \ll r$;
- le référentiel $\mathcal{R}_{sd} = (O_S, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est appelé référentiel saturno-doublet : c'est un référentiel non galiléen en rotation uniforme par rapport au référentiel saturnien, à la vitesse angulaire ω et dans lequel O_S, G, M_1 et M_2 sont immobiles.



On néglige l'influence de tous les autres corps de l'anneau sur le système δ .

- 1 • En écrivant le théorème de la résultante cinétique sur le doublet δ , établir l'identité $\frac{\Gamma m_S}{r^2} = \omega^2 r$, vraie au premier ordre en $\frac{a}{r}$.

2 • Faire l'inventaire de toutes les forces subies par M_1 dans \mathcal{R}_{Sd} et montrer que leur somme vectorielle peut s'écrire $\Sigma \vec{f} = f(a, r) \vec{u}_r$: on donnera l'expression de $f(a, r)$ comme une fonction des variables a et r et des paramètres Γ , m et m_s .

Montrer par un développement limité au premier ordre en

$\frac{a}{r}$ que cette fonction a pour valeur approchée :

$$f(a, r) = \frac{\Gamma m^2}{4a^2} - \frac{3\Gamma m_s m a}{r^3}. \text{ Il y aura } \mathbf{dislocation} \text{ progres-$$

sive de l'anneau si la résultante des forces a tendance à éloigner M_2 de M_1 , donc si $f(a, r) < 0$.

3 • Montrer que cette condition se traduit par l'existence d'une valeur minimale r_0 de r (on l'appelle **limite de Roche**) ne dépendant que de m_s et de $\mu = \frac{m}{a^3}$. On donne

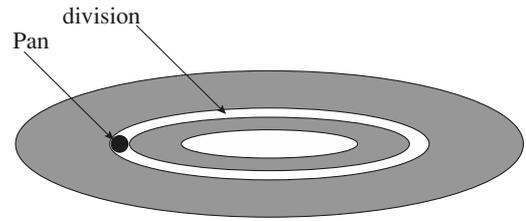
$\mu = 720 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Dédurre de ce qui précède un ordre de grandeur de r_0 . Conclure en considérant que les anneaux ont un rayon de l'ordre de 10^8 m .

Dans ce qui suit, on assimile tous les corps autour de Saturne à des petits et moyens blocs solides indépendants en orbite circulaire et on néglige toutes les forces d'interaction entre eux devant l'attraction gravitationnelle de la planète.

2. Divisions des anneaux

Les anneaux sont divisés : la première division fut observée par Cassini qui détecta le premier une bande circulaire vide de blocs, et découpant ainsi « l'anneau » en deux anneaux distincts (cette division est encore appelée division Cassini). On en a détecté un très grand nombre depuis.

On s'intéresse ici à la division observée sur le rayon orbital d'un petit satellite sphérique, Pan, de centre O_p , de rayon R_p , et de rayon orbital $r_p = O_S O_p$.



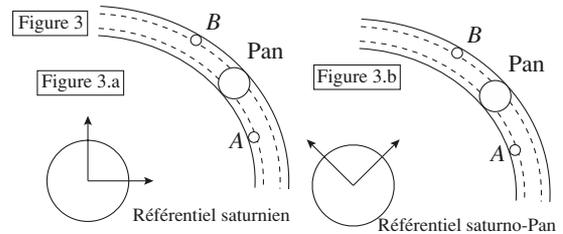
Le référentiel saturno-Pan \mathcal{R}_{SP} est en rotation uniforme autour du référentiel saturnien, suiveur du mouvement de Pan, dans lequel O_S et O_p restent fixes. On considère deux petits rochers A et B encore présents dans cette bande et tournant dans le même sens (cf. figure 3). A est en orbite circulaire de rayon r_A légèrement inférieur à r_p , B est en orbite circulaire de rayon r_B légèrement supérieur à r_p .

1 • Montrer que plus le rayon de l'orbite circulaire d'un corps satellisé autour de Saturne est grand, plus sa vitesse le long de son orbite est faible.

2 • Tracer, sur la figure 3.a), dans le référentiel saturnien, l'allure des vecteurs vitesses des centres des trois corps (l'échelle est arbitraire).

3 • En déduire, dans le référentiel \mathcal{R}_{SP} , l'allure des vecteurs vitesses de A et de B et les tracer sur la figure 3.b).

4 • En déduire pourquoi A et B ne pourront rester sur leur orbite, et pourquoi on dit que Pan « nettoie » la bande décrite par sa trajectoire en dessinant une division dans les anneaux.



1 Si la terre tournait plus vite...

1 • Dans le référentiel terrestre, le champ de pesanteur en un point M est composé de deux termes : l'interaction gravitationnelle massique $-GM_T \frac{\vec{OM}}{OM^3}$ et la force d'inertie d'entraînement massique $\Omega^2 \vec{HM}$ (H , la projection de M sur l'axe de rotation terrestre sud-nord, et Ω la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même) :

$$\vec{g}(M) = -GM_T \frac{\vec{OM}}{OM^3} + \Omega^2 \vec{HM}.$$

Si le point M est à l'équateur, $H = O$ (où O est le centre de la Terre), ce qui donne :

$$g(M) = -G \frac{M_T}{OM^2} + \Omega^2 OM;$$

si M est de plus un point à la surface de la Terre $OM = R_T$, rayon de la Terre.

Si on appelle g_0 l'interaction gravitationnelle massique (accélération de la pesanteur à la surface de la Terre au pôle Nord!), il n'y a pas de pesanteur à l'équateur si :

$$0 = -g_0 + \Omega^2 R_T \Leftrightarrow \sqrt{\frac{g_0}{R_T}} = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

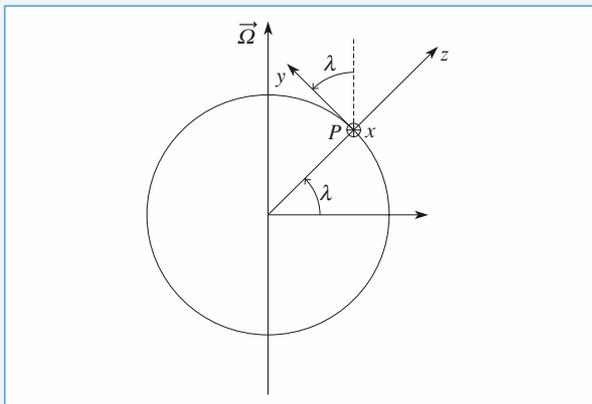
La durée d'un jour serait donc de 5 075 s, c'est-à-dire de 1 h 25 min. Cette durée est égale au temps que mettrait un satellite terrestre pour décrire une trajectoire circulaire de rayon R_T .

2 Influence de la force de Coriolis terrestre sur la conduite d'une moto

1 • $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{|P_{\mathcal{R}_T}}$ avec, dans le référentiel terrestre local : $\vec{\Omega} = \Omega(\sin\lambda \vec{e}_z + \cos\lambda \vec{e}_y)$ et $\vec{v}_{|P_{\mathcal{R}_T}} = -v\vec{e}_y$, donc :

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega \sin\lambda v \vec{e}_x$$

elle est dirigée vers l'ouest.



A.N. : $F_{ic} \approx 3 \text{ N} \ll mg \approx 4 \text{ kN}$.

2 • Quand le motard roule à vitesse constante, la somme des forces qui agissent sur lui dans le référentiel terrestre est nulle : $\vec{R} + m\vec{g} + \vec{F}_{ic} = \vec{0}$. Si on appelle α l'angle que fait la moto avec la verticale, la projection sur la direction orthogonale à la moto de cette équation s'écrit : $mg \sin\alpha = 2m\Omega \sin\lambda v \cos\alpha$.

$$\text{On en déduit : } \tan\alpha = 2 \frac{\Omega \sin\lambda v}{g}.$$

A.N. : $\alpha \approx 0,03^\circ \approx 2' \text{ d'arc}$.

Ces calculs restent très théoriques : le moindre coup de vent aura une influence beaucoup plus importante sur l'équilibre de la moto que la force de Coriolis qui reste, même à vitesse élevée, un terme correctif avant tout.

3 Lancement vertical d'une fusée

1 • Dans le référentiel terrestre local, la relation fondamentale de la dynamique appliquée à la fusée s'écrit :

$$m\vec{a}(M) = m\vec{g} + \vec{F}_{ic} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}(M).$$

En projection sur \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z (dirigés respectivement vers l'est, le nord et le zénith, voir l'Essentiel), cette équation s'écrit :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -2\Omega(\cos\lambda \dot{z} - \sin\lambda \dot{y}) \\ \ddot{y} = -2\Omega \sin\lambda \dot{x} \\ \ddot{z} = -g + 2\Omega \cos\lambda \dot{x} \end{cases} \quad (1)$$

À l'ordre 0, c'est-à-dire en négligeant les termes en Ω (l'effet de la force de Coriolis est faible), on obtient la solution classique d'un point en mouvement dans le champ de pesanteur (uniforme) :

$$\dot{x} = 0, \dot{y} = 0, \dot{z} = -gt + v_0 \text{ (vitesse à l'ordre 0),}$$

$$\text{puis : } x = 0, y = 0, z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 t.$$

2 • La fusée atteint sa hauteur maximale h à l'instant :

$$t = \frac{v_0}{g} \text{ (}\dot{z} = 0\text{)}, \text{ d'où } h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

3 • Pour obtenir les lois $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ à l'ordre 1, on reporte les expressions de \dot{x} , \dot{y} et \dot{z} à l'ordre 0 dans les équations du mouvement (1). On obtient alors :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2\Omega \cos\lambda (v_0 - gt) \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

Remarque

Seule l'équation sur l'axe (Px) est changée : la vitesse à l'ordre 0 est dirigée selon la verticale (Pz) donc, au premier ordre, la force de Coriolis est dirigée selon l'axe (Px) (le vecteur rotation de la Terre est dans le plan (Pyz)). En particulier, la hauteur maximale atteinte par la fusée est celle de la question 2).

Ces équations s'intègrent en :

$$\begin{cases} \dot{x} = -2\Omega \cos \lambda \left(v_0 t - \frac{gt^2}{2} \right) \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \end{cases}$$

puis en :

$$\begin{cases} x = -2\Omega \cos \lambda \left(\frac{v_0 t^2}{2} - \frac{gt^3}{6} \right) \\ y = 0 \\ z = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t. \end{cases}$$

Quand la fusée retombe sur le sol, $z = 0$, donc :

$$t = \frac{2v_0}{g} \quad \text{et} \quad x = -\frac{4}{3}\Omega \cos \lambda \frac{v_0^3}{g^2}.$$

On remarque que l'abscisse du point de chute de la fusée est négative : la fusée retombe à l'ouest de son point de départ. La force de Coriolis est orientée vers l'ouest à la montée, vers l'est à la descente.

4 • a) $x = -1,5 \text{ cm}$ est beaucoup plus faible que $h = 39,4 \text{ m}$: la force d'inertie de Coriolis a une influence faible sur le mouvement de la fusée.

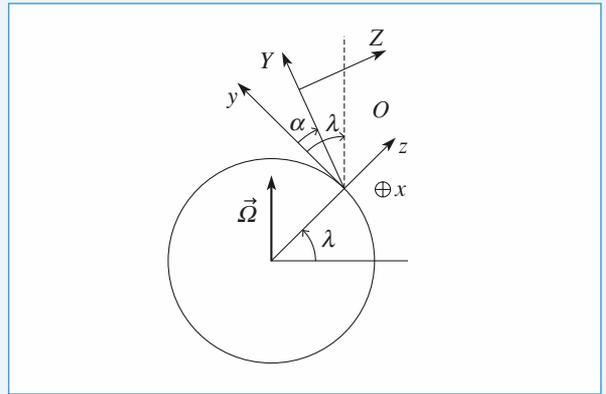
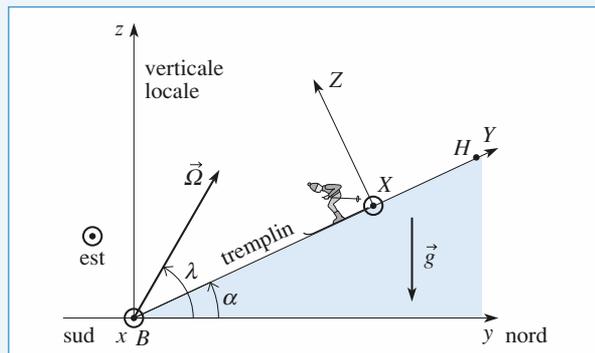
b) $v_0 = 689,8 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Pour que l'effet de la force d'inertie de Coriolis soit significatif, il faut lancer la fusée avec une grande vitesse initiale.

$h \approx 1 \text{ 870 m}$. La hauteur atteinte par la fusée est beaucoup plus importante ici (on peut cependant toujours considérer le champ de pesanteur comme uniforme, sa variation par rapport à sa valeur au niveau du sol, à 2 km d'altitude est d'environ $0,06 \%$).

Dans la réalité, compte tenu de la résistance et des mouvements de l'air, la validité des applications numériques précédentes est discutable !

4 Chute d'un point sur un plan incliné dans le référentiel terrestre

1 • La relation fondamentale de la dynamique, appliquée à l'objet, dans le référentiel terrestre s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} - 2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$, où \vec{R} est la réaction du tremplin sur l'objet. On utilise comme base de projection la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, où \vec{e}_x et \vec{e}_y appartiennent au plan incliné et où \vec{e}_z lui est perpendiculaire.



Dans cette base, $\vec{g} = -g(\sin \alpha \vec{e}_y + \cos \alpha \vec{e}_z)$ et $\vec{\Omega} = \Omega(\cos(\lambda - \alpha) \vec{e}_y + \sin(\lambda - \alpha) \vec{e}_z)$.

Le point se déplace sur le plan incliné donc sa cote Z est constamment nulle. La relation fondamentale de la dynamique, en projection sur $(OXYZ)$, donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} m\ddot{X} = 2m\Omega \sin(\lambda - \alpha) \dot{Y} \\ m\ddot{Y} = -mg \sin \alpha - 2m\Omega \sin(\lambda - \alpha) \dot{X} \\ 0 = -mg \cos \alpha + R + 2m\Omega \cos(\lambda - \alpha) \dot{X}. \end{cases}$$

À l'ordre zéro, c'est-à-dire en négligeant les termes en Ω (l'effet de la force de Coriolis est faible), ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \ddot{X} = 0 \\ \ddot{Y} = -g \sin \alpha \\ 0 = -mg \cos \alpha + R \end{cases}, \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \dot{X} = 0 \\ \dot{Y} = -gt \sin \alpha \\ R = mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$\text{et enfin} \quad \begin{cases} X = 0 \\ Y = -\frac{g}{2} t^2 \sin \alpha + \ell \\ R = mg \cos \alpha. \end{cases}$$

À l'ordre 1, pour obtenir les lois $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$, on reporte les expressions de \dot{X} , \dot{Y} et \dot{Z} dans les termes en Ω (donc du premier ordre) des équations du mouvement.

La première équation est à cet ordre la seule modifiée :

$$\ddot{X} = -2gt \Omega \sin(\lambda - \alpha) \sin \alpha$$

ce qui donne $\dot{X} = -gt^2 \Omega \sin(\lambda - \alpha) \sin \alpha$,

$$\text{puis} \quad X = -\frac{gt^3}{3} \Omega \sin(\lambda - \alpha) \sin \alpha.$$

Quand l'objet arrive au point B , $Y = 0$, donc :

$$t = t_f = \sqrt{\frac{2\ell}{g \sin \alpha}}.$$

a) Le vecteur vitesse du point est, au premier ordre en Ω , en bas du tremplin :

$$\vec{v} = -2\ell \Omega \sin(\lambda - \alpha) \vec{e}_x - \sqrt{2g\ell \sin \alpha} \vec{e}_y.$$

b) Le décalage D par rapport à la ligne de plus grande pente est :

$$D = X(t_f) = -\frac{2}{3}l\Omega \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} \sin(\lambda - \alpha).$$

Si $\sin(\alpha - \lambda) > 0$ (donc $\alpha > \lambda$), $D > 0$: l'objet est dévié vers l'est ; si $\sin(\alpha - \lambda) < 0$ (donc $\alpha < \lambda$), $D < 0$: l'objet est dévié vers l'ouest. Dans le cas où $\sin(\alpha - \lambda) = 0$ (donc $\alpha = \lambda$), l'objet n'est pas dévié : le vecteur rotation de la Terre est parallèle au plan incliné, donc la force d'inertie de Coriolis est perpendiculaire au plan et sans effet sur le mouvement du point sur le plan incliné.

Dans le cadre de cet exercice, lorsque $\alpha = \lambda$, \vec{v} et $\vec{\Omega}$ sont parallèles à Oy : la force de Coriolis est nulle.

Remarque

Si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le résultat classique de la « déviation vers l'est » (cf. H-Prépa, Tout en un, 1^{re} année, chapitre 28).

2 • $\vec{v} = -3,8 \cdot 10^{-3} \vec{e}_x - 37 \vec{e}_y$. $D = -7$ mm.

Les effets sont extrêmement faibles.

Si le tremplin est orienté sud-nord $\sin(\lambda - \alpha)$ devient

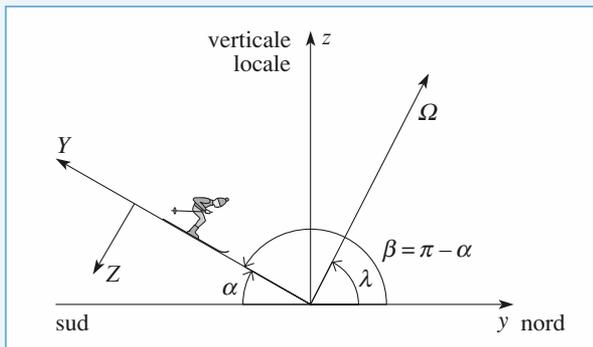
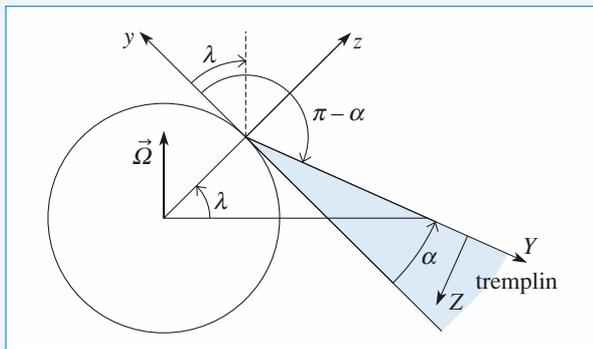
$\sin(\lambda - \beta)$ avec $\beta = \pi - \alpha$,

soit $\sin(\lambda + \alpha - \pi) = -\sin(\alpha + \lambda)$

et donc $\vec{v} = +2l\Omega \sin(\lambda + \alpha) \vec{e}_x - \sqrt{2gl \sin \alpha} \vec{e}_y$

et $D = +\frac{2}{3}l\Omega \sqrt{\frac{2l}{g \sin \alpha}} \sin(\alpha + \lambda)$, ce qui donne :

$$\vec{v} = 1,4 \cdot 10^{-2} \vec{e}_x - 37 \vec{e}_y \text{ et } D = 2,6 \text{ cm.}$$



5 Limite de roche

1 • Dans le référentiel « Cométocentrique » \mathcal{R}_{com} , le petit volume élémentaire de masse δm situé autour du point P est soumis à l'attraction gravitationnelle de la comète et à celle de Jupiter, sans oublier la force d'inertie d'entraînement, car ce référentiel n'est pas galiléen. La relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R}_{com} s'écrit alors :

$$\delta m \vec{a}(P)_{\mathcal{R}_{\text{com}}} = \delta m \vec{G}_e(P) + \delta m \vec{G}_j(P) - \delta m \vec{a}_e.$$

L'accélération d'entraînement est égale à l'accélération du centre de la comète par rapport au référentiel « Jupiterocentrique » \mathcal{R}_{jup} (les deux référentiels sont en translation l'un par rapport à l'autre).

On applique donc la relation fondamentale de la dynamique à la comète dans le référentiel « Jupiterocentrique », on obtient :

$$M_C \vec{a}(C)_{\mathcal{R}_{\text{jup}}} = M_C \vec{G}_j(C).$$

On reporte dans l'équation précédente, il vient :

$$\delta m \vec{a}(P)_{\mathcal{R}_{\text{com}}} = \delta m \vec{G}_e(P) + \delta m (\vec{G}_j(P) - \vec{G}_j(C))$$

(le premier terme est le champ gravitationnel propre de la comète, le second est le terme des marées).

2 • Le module de $G_e(P)$ est $\frac{GM_C}{R_C^2}$, celui du terme des marées est de l'ordre de :

$$GM_J \left(\frac{1}{(d - R_C)^2} - \frac{1}{d^2} \right) \approx 2GM_J \frac{R_C}{d^3} \quad (d \gg R_C).$$

Dans le modèle considéré, la cohésion de la comète est assurée

si : $\frac{GM_C}{R_C^2} > 2GM_J \frac{R_C}{d^3}$, soit $d > \sqrt[3]{\frac{2M_J}{M_C}} R_C = d_{\text{lim}}$.

Pour une comète donnée, il est clair que Jupiter est le pire compagnon dans le système solaire, car le plus massif. (On attribue d'ailleurs le volcanisme important de son satellite Io aux fortes contraintes créées par les forces de marées jupitériennes.)

La comète et Jupiter étant supposées sphériques et homogènes :

$$\frac{M_J}{M_C} = \frac{\mu_J}{\mu_C} \left(\frac{R_J}{R_C} \right)^3$$

d'où : $d_{\text{lim}} = \sqrt[3]{2 \frac{\mu_J}{\mu_C}} R_J,$

avec $\mu_J = \frac{M_J}{4\pi R_J^3} = 1,25 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}.$

On en déduit $d_{\text{lim}} = 1,36 R_J$, soit environ 97 000 km (cette distance est comptée à partir du centre de Jupiter, ce qui représente environ 25 500 km à partir de la périphérie).

6 Pourquoi s'amarrer à la navette spatiale ?

1 • Pour le vaisseau, satellite de masse m gravitant autour de la planète, le mouvement circulaire impose la relation :

$$mR\Omega^2 = G \frac{mM}{R^2}, \text{ soit :}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \approx \sqrt{\frac{g_0 R_T^2}{R^3}}.$$

Pour $\Omega = 2\pi/(2 \text{ heures})$ autour de la Terre, il vient :
 $R = 8\,080 \text{ km}$, soit une altitude $h = 1\,680 \text{ km}$.

2 • Dans le référentiel tournant à vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ constante, on doit tenir compte des forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e = m\Omega^2 \overline{CM} = m\Omega^2 ((R+x)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z),$$

$$\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2m\Omega(\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y).$$

Le cosmonaute est aussi soumis à l'attraction gravitationnelle de la planète :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -GmM \frac{\overline{CM}}{CM^3} = -GmM \frac{(R+x)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{((R+x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -mR^3\Omega^2 \frac{(R+x)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{((R+x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Son mouvement est donc régi par les équations :

$$\ddot{x} = 2\Omega\dot{y} + \Omega^2(R+x) - R^3\Omega^2 \frac{(R+x)}{\left((R+x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\ddot{y} = -2\Omega\dot{x} + \Omega^2 y - R^3\Omega^2 \frac{y}{\left((R+x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\ddot{z} = \Omega^2 z - R^3\Omega^2 \frac{z}{\left((R+x)^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

3 • Le terme gravitationnel annule pratiquement l'effet de la force d'inertie d'entraînement (terme de marée), un développement à l'ordre 1 en x/R , y/R et z/R nous donne alors :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 2\Omega\dot{y} + 3\Omega^2 x \\ \ddot{y} = -2\Omega\dot{x} \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

4 • Le mouvement du cosmonaute selon l'axe (Oz) est clairement instable : $z = z_0 + v_{0z}t$. Rien ne vient compenser une quelconque vitesse initiale dans cette direction (à l'approximation linéaire).

5 • L'équation du mouvement sur (Oy) s'intègre en :

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 - 2\Omega[x(t) - x_0]$$

que l'on reporte dans l'équation sur (Ox) :

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = 2\Omega\dot{y}_0 + 4\Omega^2 x_0$$

que l'on intègre en :

$$x(t) = x_0 + \left(3\dot{y}_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\Omega}\right)(1 - \cos\Omega t) + \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sin\Omega t$$

L'expression de $y(t)$ est alors :

$$y(t) = y_0 - 3(2x_0\Omega + \dot{y}_0)t - 2\left(3x_0 + \frac{2\dot{y}_0}{\Omega}\right) \sin\Omega t - 2\frac{\dot{x}_0}{\Omega}(1 - \cos\Omega t)$$

6 • Avec \dot{x}_0 seule non nulle, il vient :

$$x(t) = \frac{\dot{x}_0}{\Omega} \sin\Omega t \text{ et } y(t) = -\frac{2\dot{x}_0}{\Omega}(1 - \cos\Omega t)$$

de sorte que la trajectoire est une ellipse de centre $\left(0, \frac{2\dot{x}_0}{\Omega}\right)$,

décrit à pulsation Ω : le terme différentiel tend à éloigner le cosmonaute, mais l'effet de la force de Coriolis le ramène à son point de départ.

7 • Avec x_0 seule non nulle, on a cette fois :

$$x(t) = x_0 + 3x_0(1 - \cos\Omega t) \text{ et } y(t) = -6x_0\Omega t - 6x_0 \sin\Omega t.$$

À un mouvement périodique se superpose ici un effet de dérive parallèlement à l'axe (Oy) : le cosmonaute dérive inexorablement loin de son vaisseau. Le câble d'amarrage est tout à fait nécessaire.

Remarque : On peut se demander si l'attraction gravitationnelle exercée par le vaisseau sur le cosmonaute peut éviter cette catastrophe : à 10 mètres d'un vaisseau de 40 tonnes, la force de gravitation est de l'ordre de $2,7 \cdot 10^{-8} \text{ N}$ par kg de cosmonaute, alors qu'avec $x_0 = 10 \text{ m}$, on a $\Omega^2 x_0$ de l'ordre de $7,6 \cdot 10^{-6} \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$, nettement supérieure.

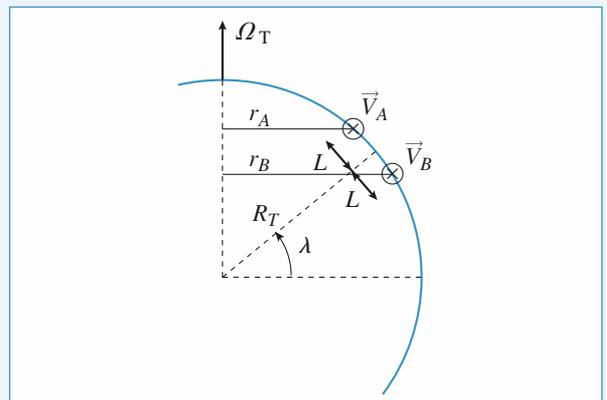
7 « Visualisation » de la rotation du pendule de Foucault

1 • A décrit un cercle de rayon $r_A = R_T \cos \lambda - L \sin \lambda$ à vitesse angulaire $\vec{\Omega}_T$ autour de l'axe des pôles, donc :

$$\vec{v}_A = (R_T \cos \lambda - L \sin \lambda) \Omega_T \vec{e}_x.$$

De même, on a :

$$\vec{v}_B = (R_T \cos \lambda + L \sin \lambda) \Omega_T \vec{e}_x.$$

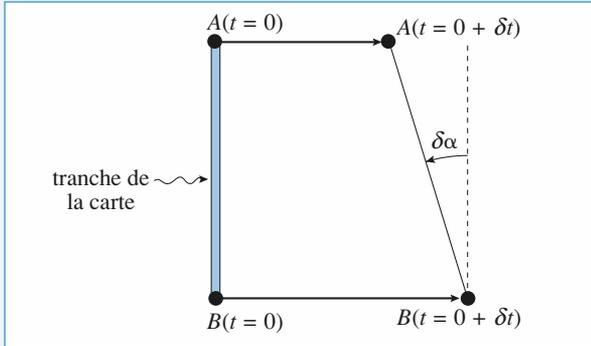


2 • Sous la carte, le segment AB semble tourner d'un angle $\delta\alpha$ pendant l'intervalle de temps élémentaire δt , et on a :

$$\delta\alpha = (v_B - v_A) \frac{\delta t}{2L}$$

ce qui correspond à la vitesse de rotation apparente :

$$\vec{\omega} = \frac{\delta\alpha}{\delta t} \vec{e}_z = \Omega_T \sin \lambda \vec{e}_z.$$



3 • En général, ω diffère de Ω_T , sauf au pôle (résultat intuitivement évident).

À la latitude $-\lambda$, le sens de rotation est inversé.

Le segment CD reste perpendiculaire à AB , de même que la carte sombre reste perpendiculaire à la carte claire, le résultat est donc le même.

4 • Imaginons que le pendule de Foucault a été lancé dans un plan d'oscillation [nord-sud] vertical, par exemple.

En l'absence de force de Coriolis (cas du référentiel géocentrique en particulier), il doit garder comme plan d'oscillation celui de la carte claire. Par rapport au sol (lié à AB), il semble donc tourner à vitesse angulaire $-\vec{\omega}$ dans un plan vertical.

8 Distances extrêmes pour le pendule de Foucault

1 • L'équation du mouvement est :

$$m\vec{a}(\mathbf{M})_{\mathcal{R}_T} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}(\mathbf{M})_{\mathcal{R}_T}$$

avec, dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{g} = -g\vec{e}_z \text{ et } \vec{\Omega}_T = \Omega_T(\cos \lambda \vec{e}_y + \sin \lambda \vec{e}_z)$$

et, pour de faibles inclinaisons :

$$T_z \approx T, \quad T_x \approx -T \frac{x}{L}, \quad T_y \approx -T \frac{y}{L}.$$

On obtient ainsi :

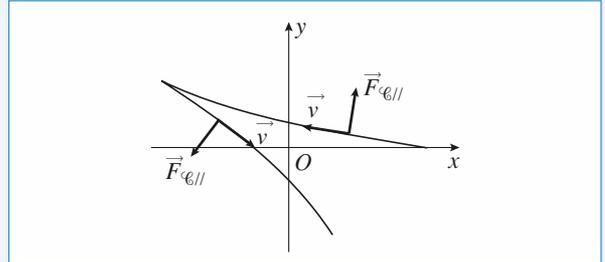
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -T \frac{x}{L} + 2m\Omega_T \sin \lambda \dot{y} - 2m\Omega_T \cos \lambda \dot{z} \\ m\ddot{y} = -T \frac{y}{L} - 2m\Omega_T \sin \lambda \dot{x} \\ m\ddot{z} = -mg + T + 2m\Omega_T \cos \lambda \dot{x} \end{cases}$$

où les termes en Ω_T sont correctifs, comme la force de Coriolis dans la relation fondamentale de la dynamique.

De plus, z ne varie pas (à un ordre 2 près de l'angle d'inclinaison du pendule par rapport à la verticale), ce qui permet de reporter $T \approx mg$ dans les deux premières équations pour obtenir :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\Omega \dot{y} + \omega_0^2 x = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ et } \Omega = \Omega_T \sin \lambda \\ \ddot{y} + 2\Omega \dot{x} + \omega_0^2 y = 0 \end{cases}$$

2 • En oubliant la force de Coriolis, le pendule devrait simplement osciller en $+x_0$ et $-x_0$ le long de l'axe (Ox) pour les conditions initiales proposées.



La force de Coriolis projetée dans le plan (x, y) , notée $\vec{F}_{c//}$, est, avec $\dot{z} = 0$:

$$\vec{F}_{c//} = 2m\Omega(\dot{y}\vec{e}_x - \dot{x}\vec{e}_y).$$

Au début de la première oscillation, par exemple, $\dot{y} \approx 0$ et $\dot{x} < 0$, de sorte que le pendule est dévié vers les y croissants... et rate le point O . La simulation illustre ce phénomène, répété à chaque oscillation, ce qui justifie la rotation du plan d'oscillation (le cours a montré que pour $\Omega \ll \omega_0$, cette rotation s'effectue à vitesse angulaire $-\Omega$).

La simulation, prolongée plus longtemps, montre bien que la distance au point O évolue entre deux valeurs extrêmes r_{\min} et $r_{\max} = x_0$.

3 • a) On reprend les équations du mouvement dans le plan (xOy) en utilisant les coordonnées polaires.

Sachant que, d'après la question 1) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{mg}{L} \vec{r} - 2m\Omega \vec{e}_z \wedge \vec{v}$$

on obtient les équations du mouvement radiale et orthoradiale :

$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\omega_0^2 r + 2\Omega r\dot{\theta} \\ r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = -2\Omega \dot{r} \end{cases}$$

b) La composante verticale du mouvement cinétique au point O est : $L_z = (m\vec{r} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{e}_z = mr^2\dot{\theta}$.

La tension \vec{T} (qui passe par l'axe (Oz) et le poids (parallèle à (Oz)) n'ayant pas de moment par rapport à l'axe (Oz) , on en déduit que :

$$\frac{dL_z}{dt} = (r\vec{e}_r \wedge (-2m\vec{\Omega}_T \wedge \vec{v})) \cdot \vec{e}_z = -2m\Omega r\dot{r}$$

ce qui correspond naturellement à l'équation du mouvement orthoradiale obtenue en 3) a) :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = -2\Omega r\dot{r}$$

dont l'intégrale première est, compte tenu des conditions

initiales :

$$r^2 \dot{\theta} = \Omega(x_0^2 - r^2).$$

c) On peut maintenant éliminer $\dot{\theta}$ dans l'équation radiale, ce qui donne :

$$\ddot{r} + r\omega_0^2 - \Omega^2 \frac{x_0^4 - r^4}{r^3} = 0.$$

En multipliant par \dot{r} , on l'intègre en :

$$\dot{r}^2 + \omega_0^2(r^2 - x_0^2) + \Omega^2 \left(\frac{x_0^4}{r^2} + r^2 - 2x_0^2 \right) = 0.$$

Les valeurs extrêmes de r , indiquées par $\dot{r} = 0$, sont solutions de :

$$(x_0^2 - r^2) \left(\omega_0^2 + \Omega^2 - \Omega^2 \frac{x_0^2}{r^2} \right) = 0$$

ce qui donne :

$$r_{\max} = x_0 \quad \text{et} \quad r_{\min} = x_0 \sqrt{\frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \omega_0^2}}.$$

d) Pour le pendule de Foucault, long d'environ 70 m, $\omega_0 \approx 0,37 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ est très supérieure à Ω , au plus égale à $\Omega_T = 7,5 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$: $\Omega \ll \frac{\omega_0}{10}$, ce qui n'est pas le cas simulé !

Dans ces conditions, la rotation du plan d'oscillation est lente, et l'écart au passage par le point O imperceptible.

À Paris, le plan d'oscillation d'un pendule de Foucault fait un tour complet en environ 34 heures.

9 Terme des marées, marées de vives-eaux et marées de mortes-eaux

1 • Pour le point P , fixe dans le référentiel terrestre, on écrit la relation fondamentale de la dynamique sous la forme :

$$m\vec{a}(P) = \vec{O} = \vec{F} + m(\vec{G}_T(P) + \vec{G}_L(P) + \vec{G}_S(P)) - m\vec{a}_e(P)$$

où l'accélération d'entraînement est :

$$\begin{aligned} \vec{a}_e(P) &= -\omega^2 \vec{HP} + \vec{a}_e(R \text{ géocentrique}) \\ &= -\omega^2 \vec{HP} + \vec{G}_L(C) + \vec{G}_S(C) \end{aligned}$$

soit finalement :

$$\begin{aligned} \vec{O} &= \vec{F} + m(\vec{G}_T(P) + \omega^2 \vec{HP}) \\ &\quad + m(\vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(C) + \vec{G}_S(P) - \vec{G}_S(C)). \end{aligned}$$

• Le terme $m\vec{G}_T(P) + m\omega^2 \vec{HP}$ représente le poids du point P , il est noté $m\vec{g}_0$.

• Le terme $m(\vec{G}_L(P) - \vec{G}_L(C))$ est le terme de marées dû à la Lune, on le note $m\Delta\vec{g}_L$.

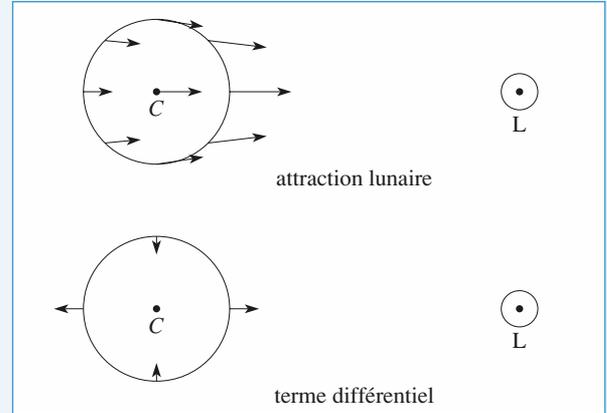
• Le terme $m(\vec{G}_S(P) - \vec{G}_S(C))$ est le terme de marées dû au Soleil, on le note $m\Delta\vec{g}_S$.

$$2 \bullet \Delta\vec{g}_L = GM_L \left[\frac{\vec{PL}}{PL^3} - \frac{\vec{CL}}{R_{CL}^3} \right].$$

Sur le premier schéma ci-dessous, on a représenté par des

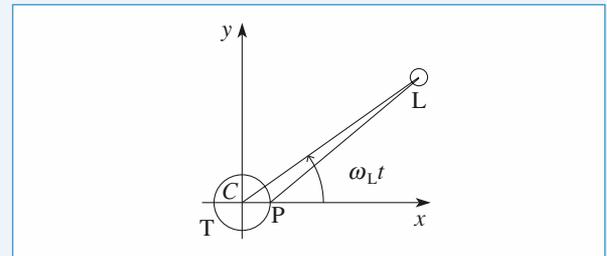
flèches le terme $\frac{\vec{PL}}{PL^3}$ en plusieurs points de la surface terrestre

ainsi que le terme $\frac{\vec{CL}}{R_{CL}^3}$.



Sur le second schéma, on a simplement représenté $\Delta\vec{g}_L$. Pour une position donnée de la Lune, les effets sont maximaux (et égaux en module) pour les deux points diamétralement opposés le long de la droite CL . Si on ne tient compte que de la rotation de la Terre, un même lieu sur Terre se trouvera dans la position où les effets de marées sont maximaux deux fois par jour : il y donc deux marées hautes (et deux marées basses) par jour. Cependant, la Lune a un mouvement circulaire autour de la Terre de période légèrement supérieure : les heures de marées hautes pour deux jours consécutifs seront décalées.

$$\begin{aligned} 3 \bullet \text{a) } \|\vec{PL}\|^2 &= \|\vec{PC}\|^2 + \|\vec{CL}\|^2 + 2\vec{PC} \cdot \vec{CL} \\ &= R_T^2 + R_{CL}^2 - 2R_T R_{CL} \cos(\omega_L t). \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{1}{PL^3} &= \frac{1}{R_{CL}^3} \left(1 - 2 \frac{R_T}{R_{CL}} \cos(\omega_L t) + \frac{R_T^2}{R_{CL}^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &\approx \frac{1}{R_{CL}^3} \left(1 + 3 \frac{R_T}{R_{CL}} \cos(\omega_L t) \right) \quad \text{au premier ordre en } \frac{R_T}{R_{CL}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{PL} &= \vec{PC} + \vec{CL}, \quad \text{avec } \vec{PC} = -R_T \vec{u}_x; \\ \vec{CL} &= R_{CL} (\cos(\omega_L t) \vec{u}_x + \sin(\omega_L t) \vec{u}_y). \end{aligned}$$

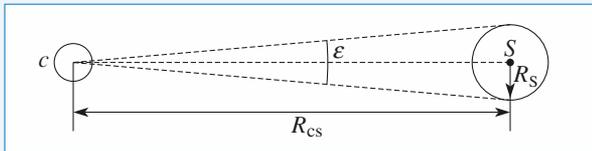
On reporte ces relations dans l'expression de $\Delta\vec{g}_L$; on obtient, en ne conservant que les termes d'ordre 1 en $\frac{R_T}{R_{CL}}$:

$$\Delta \vec{g}_L = \frac{GM_L}{R_{CL}^2} \left(\frac{R_T}{R_{CL}} \right) \left((3 \cos^2(\omega_L t) - 1) \vec{u}_x + (3 \cos(\omega_L t) \sin(\omega_L t)) \vec{u}_y \right).$$

De même :

$$\Delta \vec{g}_S = \frac{GM_S}{R_{CS}^2} \left(\frac{R_T}{R_{CS}} \right) \left((3 \cos^2(\omega_S t) - 1) \vec{u}_x + (3 \cos(\omega_S t) \sin(\omega_S t)) \vec{u}_y \right).$$

b) Le diamètre apparent ε sous lequel on voit le Soleil ou la Lune depuis P vérifie $\sin \varepsilon \approx \varepsilon = \frac{2R_L}{R_{CL}} = \frac{2R_S}{R_{CS}}$, où R_L et R_S sont les rayons respectifs de la Lune et du Soleil.



À $t = 0$:

$$\frac{|\Delta \vec{g}_L|}{|\Delta \vec{g}_S|} \approx \frac{\frac{M_L}{R_{CL}^3}}{\frac{M_S}{R_{CS}^3}} = \frac{\mu_L \left(\frac{R_L}{R_{CL}} \right)^3}{\mu_S \left(\frac{R_S}{R_{CS}} \right)^3} = \frac{\mu_L}{\mu_S} = 2,4.$$

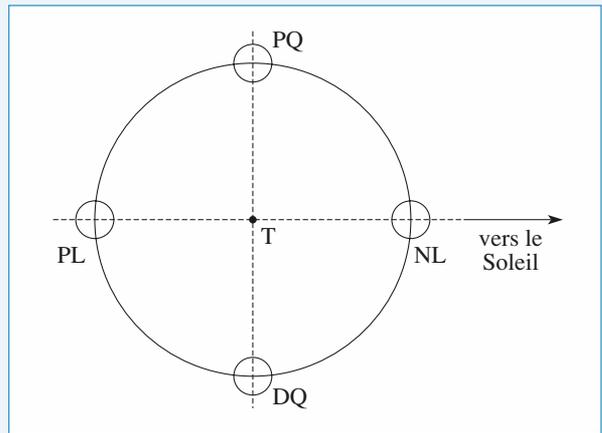
La contribution du Soleil aux marées est loin d'être négligeable : elle est simplement environ deux fois moins importante que celle de la Lune (le Soleil est beaucoup plus éloigné de la Terre que la Lune mais il a une masse beaucoup plus grande).

c) La composante sur Cx du terme des marées est proportionnelle à $3 \cos^2(\omega_i t) - 1$ donc à $\frac{(3 \cos(2\omega_i t) + 1)}{2}$ (avec $\omega_i = \omega_L$ ou ω_S).

Les effets de la Lune et du Soleil s'additionnent quand :

$$\cos(2\omega_L t) = \cos(2\omega_S t) = 1,$$

c'est-à-dire quand la Terre, la Lune et le Soleil seront alignés (pleine lune (PL) et nouvelle lune (NL)) ; ils se retranchent quand $\cos(2\omega_L t) = -1$ et $\cos(2\omega_S t) = 1$ (ou le contraire), c'est-à-dire quand les axes CL et CS sont à 90° l'un de l'autre (premier quartier (PQ) et dernier quartier (DQ)). Dans le premier cas, les amplitudes des marées sont importantes (marées de vives-eaux), dans le second, elles sont faibles (marées de mortes-eaux).



10 Étude dynamique des anneaux de Saturne

D'après ENSTIM 2008.

1. Les anneaux de Saturne ne sont pas des solides

1 • Dans le référentiel saturnien, supposé galiléen, le théorème de la résultante cinétique appliqué au doublet de masse $2m$ s'écrit :

$$2m\vec{a}_G = -\Gamma \frac{mm_S}{O_S M_1^3} \overrightarrow{O_S M_1} - \Gamma \frac{mm_S}{O_S M_2^3} \overrightarrow{O_S M_2}$$

$$\text{Soit } -2m\omega^2 r \vec{u}_r = -\Gamma mm_S \left(\frac{1}{(r-a)^2} + \frac{1}{(r+a)^2} \right) \vec{u}_r$$

$$2\omega^2 r = 2\Gamma m_S \frac{r^2 + a^2}{(r^2 - a^2)^2}.$$

Au premier ordre en $\frac{a}{r}$, on obtient :

$$\frac{\Gamma m_S}{r^2} = \omega^2 r.$$

2 • Dans \mathcal{R}_{sd} , M_1 est soumis :

$$- \text{à l'attraction de Saturne : } -\frac{\Gamma mm_S}{(r-a)^2} \vec{u}_r$$

$$- \text{à l'attraction de } M_2 : + \frac{\Gamma m^2}{(2a)^2} \vec{u}_r$$

$$- \text{à la force d'inertie d'entraînement : } + m\omega^2(r-a) \vec{u}_r,$$

M_1 étant immobile dans \mathcal{R}_{sd} , la force d'inertie de Coriolis est nulle.

$$\text{Soit } \Sigma \vec{f} = -\frac{\Gamma mm_S}{(r-a)^2} \vec{u}_r + \frac{\Gamma m^2}{4a^2} \vec{u}_r + m\omega^2(r-a) \vec{u}_r.$$

$$f(a, r) = -\frac{\Gamma mm_S}{(r-a)^2} + \frac{\Gamma m^2}{4a^2} + m\omega^2(r-a).$$

$$f(a, r) = -\frac{\Gamma mm_S}{(r-a)^2} + \frac{\Gamma m^2}{4a^2} + \Gamma \frac{mm_S}{r^3} (r-a).$$

Au premier ordre en $\frac{a}{r}$, $(r-a)^{-2} = r^{-2} \left(1 + \frac{2a}{r}\right)$.

$$f(a, r) = \frac{\Gamma m^2}{4a^2} - \frac{3\Gamma m m_S a}{r^3}.$$

$$\begin{aligned} 3 \bullet f(a, r) < 0 &\Leftrightarrow \frac{m}{4a^2} < \frac{3m_S a}{r^3} \\ &r^3 < \frac{12m_S}{\mu}. \end{aligned}$$

Soit $r < r_0$ avec $r_0 = \left(\frac{12m_S}{\mu}\right)^{\frac{1}{3}}$.

A.N. : $r_0 = 2,15 \cdot 10^8$ m.

On obtient le bon ordre de grandeur pour les anneaux.

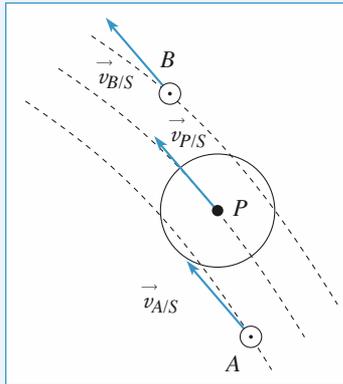
2. Divisions des anneaux

1 • Pour un mouvement circulaire de rayon r ,

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{Gmm_S}{r^2} \quad v^2 = \frac{Gm_S}{r}.$$

Donc plus r augmente et plus v est faible.

2 •



Dans \mathcal{R}_S
 $v_A > v_P > v_B$.

3 • Dans \mathcal{R}_{SP} , $\vec{v}_{A/SP} = \vec{v}_{A/S} - \vec{v}_{e(A)}$ $\vec{v}_{e(A)} = r_A \omega_P \vec{u}_{\theta_A}$.

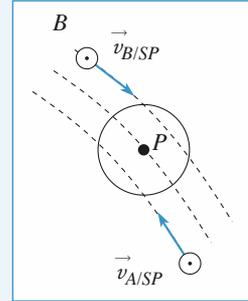
$$\text{Or } m_P \omega_P^2 r_P = G \frac{m_P m_S}{r_P^2} \quad \omega_P = \left(\frac{Gm_S}{r_P^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{De même } \omega_A = \left(\frac{Gm_S}{r_A^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc $\vec{v}_{A/SP} = r_A (\omega_A - \omega_P) \vec{u}_{\theta_A}$ $r_A < r_P \Rightarrow \omega_A > \omega_P$.

De même $\vec{v}_{B/SP} = r_B (\omega_B - \omega_P) \vec{u}_{\theta_B}$ avec $\omega_B < \omega_P$.

Dans \mathcal{R}_{SP} on obtient :



4 • On constate que A et B vont entrer en collision avec P et être éjectés de leur orbite.

LES OBJECTIFS

- Mettre en évidence les grands principes d'étude des systèmes de plusieurs points matériels.
- Introduire les théorèmes de Kœnig.

LES PRÉREQUIS

- Théorèmes généraux de la mécanique du point.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Calculs vectoriels.
- Développement limités.

ESSENTIEL

• Définitions

• Barycentre

Le barycentre des deux points matériels M_1 et M_2 , de masse m_1 et m_2 , est défini par :

$$m_1 \overrightarrow{GM}_1 + m_2 \overrightarrow{GM}_2 = \vec{0}, \text{ ou encore : } \overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM}_1 + m_2 \overrightarrow{OM}_2}{m_1 + m_2}.$$

• Mouvement du système

Décrite en termes de position barycentrique $\vec{r}_G = \overrightarrow{OG}$ et position relative $\vec{r} = \overrightarrow{M_1 M_2}$, la cinématique du système fait apparaître :

- une translation d'ensemble associée au mouvement du point G ;
- une évolution de l'orientation de la position relative \vec{r} : le système tourbillonne autour de son barycentre ;
- une évolution de la distance $r = \|\vec{r}\|$: le système peut se dilater (ou se contracter).

• Éléments cinétiques du système des deux points matériels

Quantité de mouvement : La quantité de mouvement est : $\vec{p} = M \vec{v}_G$, où M est la masse totale $M = m_1 + m_2$.

Moment cinétique

- Le moment cinétique en un point O , est : $\vec{L}_O = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{p}_1 + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{p}_2$.
- Le moment cinétique par rapport à un axe $\Delta = (O, \vec{e}_\Delta)$ est : $L_\Delta = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_\Delta$.

• Les moments cinétiques en deux points O et O' sont liés par la relation : $\vec{L}_{O'} = \vec{L}_O + \vec{p} \wedge \overrightarrow{OO'}$.

Énergie cinétique : L'énergie cinétique du système est : $\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$.

• Référentiel barycentrique

\mathcal{R} étant le référentiel d'étude, le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* est le référentiel *en translation* par rapport à \mathcal{R} dans lequel la résultante cinétique du système est nulle : $\vec{p}_{/\mathcal{R}^*} = \vec{p}^* = \vec{0}$: il est en translation à vitesse \vec{v}_G par rapport au référentiel d'étude \mathcal{R} . Le référentiel \mathcal{R}^* est encore appelé *référentiel du centre de masse*.

Dans ce référentiel \mathcal{R}^* :

- le moment cinétique du système est le même en tout point : $\vec{L}_O^* = \vec{L}_{O'}^* = \vec{L}^*$;
- le moment cinétique du système au point G est égal à son moment cinétique barycentrique : $\vec{L}_G = \vec{L}^*$.

• Utilisation du mobile fictif

Le moment cinétique et l'énergie cinétique barycentriques du système s'identifient à ceux qu'aurait le mobile fictif de masse μ , placé en M tel que $\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ en mouvement dans le référentiel barycentrique :

$$\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2, \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}, \quad \text{ou encore} \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

• Théorèmes de Kœnig

Le moment cinétique en O du système S est la somme du moment cinétique barycentrique et du moment cinétique en O du point G affecté de toute la masse :

$$\vec{L}_O = \vec{L}^* + \overrightarrow{OG} \wedge M \vec{v}_G = \vec{L}^* + \overrightarrow{OG} \wedge \vec{p}.$$

L'énergie cinétique du système S est la somme de son énergie cinétique barycentrique et de l'énergie cinétique du point G affecté de toute la masse :

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K^* + \frac{1}{2} M v_G^2.$$

Évolutions du système de deux points matériels

• Actions exercées sur le système

La résultante des actions mécaniques subies par le système est égale à la somme des forces extérieures subies par ses points :

$$\vec{R} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i} = \vec{R}_{\text{ext}} \quad (\vec{R}_{\text{int}} = \vec{0}).$$

Le moment, en un point O , résultant des actions mécaniques subies par le système est égal à la somme des moments en O des forces extérieures subies par ses points :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_O = \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_i} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{O_{\text{ext}}} \quad (\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O_{\text{int}}} = \vec{0}).$$

Les moments d'un ensemble de forces de résultante \vec{R} en deux points O et O' sont liés par la relation :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{O'} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_O + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OO'}.$$

La puissance des forces intérieures au système est $\mathcal{P} = F_{1 \rightarrow 2} \frac{dr}{dt}$, et ne dépend pas du référentiel.

Elle est en général non nulle si le système est déformable. Elle est nulle pour un système rigide : $r = \text{cte}$.

• Dynamique d'ensemble

Le mouvement du barycentre est identique à celui d'un point matériel de masse M soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{R}_{\text{ext}}.$$

$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \overline{M}_{O_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique en un point O fixe.

L'égalité $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \overline{M}_{G_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique barycentrique.

L'égalité $\frac{dL_\Delta}{dt} = M_{\Delta_{\text{ext}}}$ traduit le théorème du moment cinétique, en projection sur un axe fixe

$$\Delta = (O, \vec{e}_\Delta).$$

Dans un référentiel non galiléen, les résultats précédents sont applicables, à condition de comptabiliser les forces d'inertie agissant sur les points matériels comme des forces extérieures supplémentaires.

• Étude énergétique

Le théorème de la puissance cinétique s'écrit $\frac{d\mathcal{E}_K}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$.

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit $\Delta\mathcal{E}_K = \mathcal{T}_{\text{ext}} + \mathcal{T}_{\text{int}}$ et fait intervenir le travail de toutes les forces entre l'état initial et l'état final du système.

L'énergie mécanique du système est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_P = \mathcal{E}_K + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}.$$

Le théorème de l'énergie s'écrit alors $\Delta\mathcal{E}_M = \mathcal{T}_{\text{NC}}$, travail des actions non conservatives.

Pour un système conservatif, l'énergie mécanique est une constante du mouvement.

• Système de deux points matériels isolé

• Généralités

La résultante et le moment des actions extérieures sont nuls.

La quantité de mouvement totale $\vec{p} = M\vec{v}_G$ et le moment cinétique barycentrique \vec{L}^* sont des constantes du mouvement.

Le moment cinétique \vec{L}_O en un point fixe du référentiel galiléen est lui aussi conservé.

• Utilisation du mobile fictif

L'étude du mouvement relatif, en référentiel galiléen, du système à deux corps *isolé* se ramène à l'étude du mouvement du mobile fictif soumis à la force *centrale* $\vec{F}_{1 \rightarrow 2}$:

$$\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = F_{1 \rightarrow 2} \vec{e}_r, \text{ avec } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Le moment cinétique du mobile fictif $\vec{L}^* = \mu \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}$, est conservé. Le mouvement du mobile fictif est plan, et satisfait la loi des aires.

La conservation de l'énergie mécanique du système isolé, lorsque la force intérieure est conservative, est traduite par la conservation de l'énergie mécanique du mobile fictif :

$$\mathcal{E}_M^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}}, \text{ qui est l'énergie mécanique barycentrique du système.}$$

• Système de deux points matériels soumis à un champ de gravitation externe uniforme

Lorsque le système est soumis à un champ de gravitation externe uniforme :

- le mouvement du barycentre G est un mouvement de chute libre dans ce champ de gravitation ;
- le mouvement relatif n'est pas affecté par le champ extérieur.

Conseils et pièges à éviter

- Bien connaître « l'origine » de toutes les formules données dans ce rappel de cours.
- L'interaction entre les deux points est quelconque : un fil tendu, un ressort, une interaction newtonienne, ...

1 Une fusée en morceaux

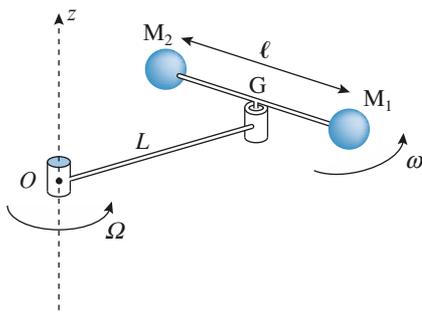
Une fusée, lancée depuis le sol, effectue un mouvement parabolique. Elle se sépare en deux parties de masses égales au moment où elle atteint le sommet de sa trajectoire. La première partie retombe à la verticale de ce sommet sur le sol, à la distance D de son point de lancement. Où atterrit l'autre partie ? On supposera que \vec{g} est uniforme.

Conseil Appliquer le théorème de la quantité de mouvement à l'ensemble des deux morceaux de la fusée après la séparation. Quelle est alors la trajectoire du centre de masse ?

2 Mouvements de rotation et théorème de Kœnig

On considère un mobile constitué de deux billes M_1 et M_2 , de masses m_1 et m_2 , reliées par une tige rigide de longueur ℓ et de masse négligeable. Le centre de masse G du système est, quant à lui, relié à un point fixe O par l'intermédiaire d'une autre tige de longueur L et de masse négligeable également. L'ensemble se déplace sans frottements sur un plan horizontal. G tourne autour de O à la vitesse angulaire Ω et les deux billes tournent autour de G à la vitesse angulaire ω , les deux rotations ayant lieu dans le même sens.

Déterminer l'énergie cinétique et le moment cinétique en O du système des deux billes dans le référentiel fixe lié à O .



Conseil Appliquer les théorèmes de Kœnig. Comment s'expriment la vitesse et le moment cinétique d'un point matériel décrivant un mouvement circulaire ?

3 * Plate-forme sur des rails

1 • Une grande plate-forme de masse M est posée sur un rail rectiligne, de direction (Ox) , sur lequel elle glisse sans frottement. À une extrémité de la plate-forme se trou-

vent N personnes de même masse m . Elles quittent la plate-forme de deux façons :

a) les N personnes courent ensemble jusqu'à l'autre extrémité de la plate-forme et sautent en même temps avec la vitesse $\vec{v} = -v\vec{e}_x$ par rapport à la plate-forme après le saut ($v > 0$) ;

b) les N personnes courent et sautent les unes après les autres (avec la même vitesse \vec{v} que précédemment, elles démarrent dès que la personne précédente a sauté).

Déterminer, dans les deux cas, la vitesse finale \vec{v}_f de la plate-forme. Laquelle de ces deux façons de la quitter lui donnera la vitesse la plus élevée ?

2 • Que deviennent ces résultats si la vitesse \vec{v} est définie par rapport à la plate-forme avant le saut ?

Conseils Appliquer le théorème de la quantité de mouvement au système {plate-forme + passagers}.

Comment est dirigée la résultante de forces extérieures ? Qu'en résulte-t-il pour la quantité de mouvement de ce système ?

4 Patinage

1 • Deux patineurs A_1 et A_2 se déplacent sur une patinoire horizontale, le long de deux droites parallèles distantes de d_0 , leur vitesse étant respectivement v_1 et v_2 , leur masse m_1 et m_2 . Arrivés au même niveau, ils s'accrochent rigidement. En assimilant chaque patineur à un point matériel, étudier le mouvement ultérieur de l'ensemble des deux patineurs (vitesse de leur centre de masse G , vitesse de rotation de l'ensemble autour de G). Commenter.

2 • Les deux patineurs se tirent alors l'un vers l'autre, leur distance mutuelle à l'instant t est alors $d(t)$. Déterminer l'évolution de leur vitesse de rotation et le travail qu'ils effectuent, en fonction de $d(t)$, d_0 , v_1 et v_2 .

Conseils 1) Appliquer le théorème de la quantité de mouvement au système des deux patineurs.

Comment est dirigée la résultante des forces extérieures ? Qu'en résulte-t-il pour la vitesse du centre de masse de ce système ?

Pour étudier le mouvement des deux patineurs autour de leur centre de masse, on se base sur les lois de conservation (moment cinétique, énergie cinétique). On peut travailler dans le référentiel barycentrique ou dans le référentiel fixe.

2) Quelle loi de conservation est encore vérifiée ? Que représente le travail des forces intérieures ?

5 Interaction noyau-proton. Distance minimale d'approche

On étudie l'interaction entre un proton P de masse m et un noyau N de masse M et de charge Ze se déplaçant tous les deux sur l'axe (Ox) . Dans l'état initial, le noyau est au repos et le proton est infiniment éloigné du noyau et a une vitesse $\vec{v}_0 = +v_0\vec{e}_x$.



- Déterminer la distance minimale d'approche du proton.
- Quelle est la vitesse du proton, dans le référentiel fixe, quand il est le plus proche du noyau ?

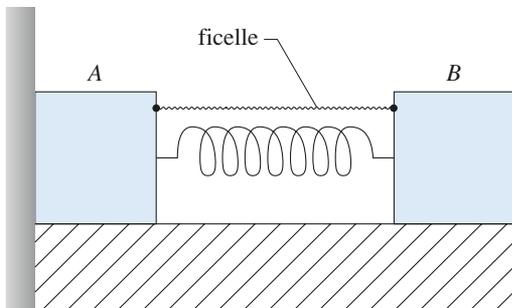
Remarque : Les deux particules exercent l'une sur l'autre une force d'interaction répulsive de module $f = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, où r est leur distance mutuelle.

Conseil

Utiliser la conservation de l'énergie du système {proton + noyau} dans le référentiel barycentrique. Ne pas oublier que le problème est unidimensionnel.

6 * Mouvements de blocs reliés par un ressort

Deux blocs A et B , de masse m , assimilables à des points matériels, sont reliés entre eux par un ressort de raideur k , de longueur à vide ℓ_v , et reposent sur une surface horizontale. Le ressort est comprimé par l'intermédiaire d'une ficelle reliant A et B (son allongement est $-\Delta\ell_0 < 0$). Initialement, A se trouve contre un mur vertical. À l'instant $t = 0$, la ficelle casse. Les mouvements de A et de B ont lieu sans frottements.



- Déterminer la réaction du mur sur le bloc A à l'instant t , puis à l'instant t_1 pour lequel A se met en mouvement.
- Déterminer la quantité de mouvement totale et la vitesse de G pour $t > t_1$.

3 • Étudier le mouvement du système pour $t > t_1$. Déterminer en particulier la période des oscillations de l'ensemble autour du centre de masse.

4 • Le point A viendra-t-il retoucher le mur ?

Conseils

1) Analyser brièvement ce qui se passe à l'instant où la ficelle casse. Que peut-on en déduire pour le point A ? Appliquer la relation fondamentale de la dynamique à B à l'instant $t = 0^+$ pour déterminer son accélération. En déduire celle du centre de masse, puis la réaction \vec{R} du mur sur A .

Pour déterminer t_1 , chercher l'instant pour lequel \vec{R} s'annule pour la première fois.

2) Appliquer la théorème de la quantité de mouvement à l'ensemble.

3) Le mouvement de G se déduit de la question précédente. Pour étudier le mouvement de A et B autour de G , appliquer la relation fondamentale de la dynamique à chacun des deux points séparément et soustraire les deux équations obtenues.

7 Détermination du rapport des masses de la Terre et du Soleil à l'aide de la troisième loi de Kepler

1 • Calculer la période de révolution d'un objet quasi ponctuel P de masse m gravitant à une distance r (sur une orbite circulaire) du centre d'un astre de masse $M \gg m$.

Exprimer le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ en fonction de G et de M .

Calculer le rapport $\frac{M_T}{M_S}$ des masses de la Terre et du

Soleil. On donne :

- distance moyenne du Soleil à la Terre :

$$D_1 = 150 \cdot 10^6 \text{ km ;}$$

- distance moyenne de la Terre à la Lune :

$$D_2 = 384 \cdot 10^3 \text{ km ;}$$

- durée d'une révolution sidérale de la Lune :

$$T_2 = 27,25 \text{ jours.}$$

2 • Reprendre le calcul précédent du rapport $\frac{T^2}{r^3}$ en ne

négligeant plus m devant M . Donner la nouvelle valeur

de $\frac{M_T}{M_S}$. Évaluer l'écart relatif que représente cette valeur

par rapport à celle obtenue à la question 1).

Donnée : $M_T = 81 M_L$.

Conseils

1) Projeter la relation fondamentale de la dynamique appliquée au point P sur la normale au mouvement circulaire. En déduire la troisième loi de Kepler et l'appliquer au mouvement de la Terre autour du Soleil, puis à celui de la Lune autour de la Terre pour éliminer les grandeurs inconnues.

2) Reprendre la démarche précédente en étudiant maintenant le mouvement du mobile réduit.

8 *** Points de Lagrange

On étudie le mouvement d'une masse ponctuelle M , très inférieure à M_T et M_L , soumise à l'influence de la Terre et de la Lune. On cherche à déterminer les points où il faut la placer pour qu'elle reste immobile par rapport à ces derniers. On considérera le système Terre–Lune comme un système isolé en interaction gravitationnelle, à la distance $D = TL$.

1 • La particule se trouve hors de la droite définie par les centres de la Terre et de la Lune (notés T et L). Montrer que si L , T et M forment un triangle équilatéral, M est effectivement immobile par rapport au système Terre–Lune. Les deux points définis ainsi sont notés L_1 et L_2 .

2 • La particule est placée maintenant sur la droite TL . Montrer qu'il existe trois points L_3 , L_4 et L_5 pour lesquels la condition voulue est satisfaite.

3 • Quel est l'intérêt de ces positions d'équilibre ? On peut montrer que les points L_1 et L_2 sont des positions d'équilibre stable pour une masse ponctuelle évoluant sous l'action de deux astres de masse m_1 et m_2 si

$\frac{m_1}{m_2}$ (ou $\frac{m_2}{m_1}$) est supérieur à une constante de l'ordre de 25.

Citer des illustrations de ces résultats.

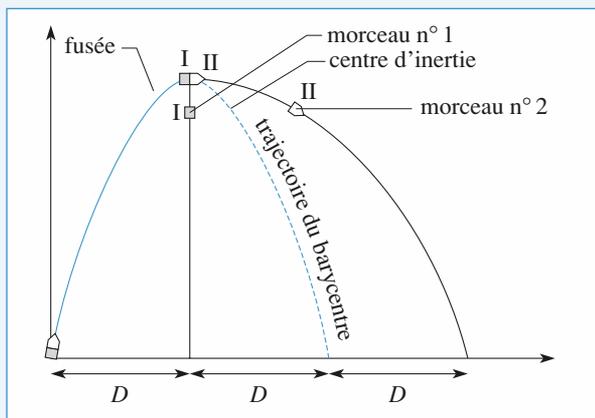
Conseils

1) Déterminer la vitesse de rotation ω_0 du système Terre–Lune, considéré comme un système isolé, autour de son centre de masse, par rapport au référentiel héliocentrique \mathcal{R}_S . Écrire ensuite la condition d'équilibre du point M dans le référentiel \mathcal{R} tournant à la vitesse angulaire ω_0 par rapport à \mathcal{R}_S . Pour cela, on pourra effectuer un bilan des forces appliquées à M dans \mathcal{R} et vérifier que, quand L , T et M forment un triangle équilatéral, le point M est immobile par rapport au système Terre–Lune. On pourra aussi raisonner à partir de l'énergie potentielle de M dans le référentiel \mathcal{R} . Il faut alors exprimer l'énergie potentielle \mathcal{E}_p uniquement en fonction des distances TM et LM .

2) Exprimer \mathcal{E}_p en fonction de $x = GM$, où G est le centre de masse du système Terre–Lune.

1 Une fusée en morceaux

Le système, constitué des deux morceaux de la fusée, est soumis à son seul poids. Le mouvement du centre de masse de l'ensemble prolonge la trajectoire parabolique de la fusée. Le centre de masse « retombe » donc à la distance $2D$ du point de départ. Il se trouve au milieu des deux morceaux de la fusée : le second morceau atterrit à la distance $3D$ du point de départ. Les trajectoires de la fusée et de ses morceaux sont représentées ci-dessous :



2 Mouvements de rotation et théorème de Kœnig

D'après le deuxième théorème de Kœnig :

$$\mathcal{E}_K = \mathcal{E}_K^* + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_G^2.$$

Le mouvement de G dans le référentiel lié à O est un mouvement de rotation autour d'un axe fixe : $v_G = L\Omega$.

L'énergie cinétique barycentrique peut être calculée directement (le faire éventuellement), c'est aussi celle du mobile fictif en rotation sur un cercle de rayon ℓ autour de G à vitesse angulaire ω , soit :

$$\mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2}\mu(l\omega)^2 \quad (\text{avec } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}),$$

d'où, finalement :

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2}\mu(l\omega)^2 + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)(L\Omega)^2.$$

D'après le premier théorème de Kœnig,

$$\vec{L}_O = \vec{L}^* + (m_1 + m_2)\vec{OG} \wedge \vec{v}_G.$$

Comme pour l'énergie cinétique, le moment cinétique barycentrique peut être calculé pour M_1 et M_2 , ou bien écrit directement comme étant celui du mobile fictif :

$$\vec{L}^* = \mu\ell^2\omega\vec{e}_z.$$

$$\text{Finalement : } \vec{L}_O = (\mu\ell^2\omega + (m_1 + m_2)L^2\Omega)\vec{e}_z.$$

Remarque

L'énergie cinétique et le moment cinétique barycentriques s'expriment respectivement comme l'énergie cinétique et le moment cinétique en G d'un point matériel P de masse

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \text{ tel que } \vec{GP} = \vec{M}_1 \vec{M}_2.$$

3 Plate-forme sur des rails

1 • Toutes les forces extérieures appliquées au système {plate-forme + passagers} sont verticales (le poids et la réaction du rail) : la composante selon (Ox) de la quantité de mouvement de l'ensemble se conserve.

a) Avant le saut : $\vec{p} = \vec{0}$. Après le saut :

$$\vec{p} = M\vec{v}_f + Nm(\vec{v} + \vec{v}_f) = ((M + Nm)v_f - Nm\vec{v})\vec{e}_x,$$

$$\text{d'où : } \vec{v}_f = \frac{-Nm}{M + Nm}v\vec{e}_x.$$

b) Avant le premier saut : $\vec{p}_1 = \vec{0}$. Après le premier saut :

$$\vec{p}_1 = (M + (N - 1)m)\vec{v}_1 + m(\vec{v} + \vec{v}_1)$$

(\vec{v}_1 est la vitesse de la plate-forme après le premier saut),

$$\text{d'où : } \vec{v}_1 = -\frac{m}{M + Nm}\vec{v} = \frac{m}{M + Nm}v\vec{e}_x.$$

Le système considéré ensuite est constitué de la plate-forme et des passagers qui restent.

$$\text{Avant le deuxième saut : } \vec{p}_2 = (M + (N - 1)m)\vec{v}_1.$$

Après le deuxième saut :

$$\vec{p}_2 = (M + (N - 2)m)\vec{v}_2 + m(\vec{v} + \vec{v}_2),$$

$$\text{d'où : } \vec{v}_2 = \vec{v}_1 - \frac{m}{M + (N - 1)m}\vec{v}.$$

De même, avant le k^{e} saut (on considère comme système la plate-forme et les $N - (k - 1)$ passagers qui restent) :

$$\vec{p}_k = (M - (N - (k - 1))m)\vec{v}_{k-1}.$$

Après le k^{e} saut :

$$\vec{p}_k = (M - (N - k)m)\vec{v}_k + m(\vec{v} + \vec{v}_k),$$

$$\text{d'où : } \vec{v}_k = \vec{v}_{k-1} - \frac{m}{M + (N - (k - 1))m}\vec{v}.$$

Pour le dernier saut, on obtient :

$$\vec{v}_N = \vec{v}_{N-1} - \frac{m}{M + m}\vec{v} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{mv}{M + (N - k)m}\vec{e}_x = \vec{v}_f.$$

Chacun des N termes de la somme étant supérieur à $\frac{mv}{M + Nm}$, la vitesse finale de la plate-forme est ici plus grande que si les N personnes sautent en même temps.

2 • Le raisonnement est le même, seule change l'expression de la quantité de mouvement de la personne qui saute. Si elles sautent toutes en même temps, la conservation de la composante horizontale de la quantité de mouvement s'écrit $\vec{0} = M\vec{v}_f + Nm\vec{v}$ (la plate-forme est initialement immobile),

$$\text{d'où : } \vec{v}_f = -\frac{Nm}{M}\vec{v} = \frac{Nm}{M}v\vec{e}_x.$$

Si elles sautent les unes après les autres :

• premier saut : $\vec{0} = (M + (N - 1)m)\vec{v}_1 + m\vec{v}$;

• deuxième saut :

$$(M + (N - 1)m)\vec{v}_1 = (M + (N - 2)m)\vec{v}_2 + m(\vec{v} + \vec{v}_1) ;$$

• k^e saut :

$$(M + (N - (k - 1)m)\vec{v}_{k-1} = (M + (N - k)m)\vec{v}_k + m(\vec{v} + \vec{v}_{k-1}) ;$$

• dernier saut : $(M + m)\vec{v}_{N-1} = M\vec{v}_N + m(\vec{v} + \vec{v}_{N-1})$.

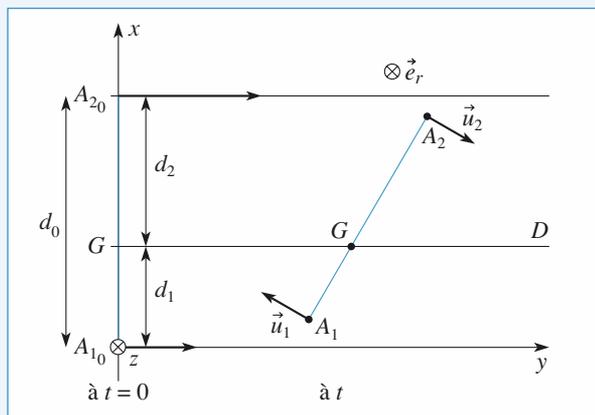
On en déduit l'expression de la vitesse finale de la plate-forme :

$$\vec{v}_N = \sum_{k=1}^N \frac{mv}{(M + (N - k)m)} \vec{e}_x = \vec{v}_f.$$

Dans ce cas, chaque terme de la somme est inférieur à $\frac{mv}{M}$,

la vitesse finale de la plate-forme est plus grande quand les N personnes sautent en même temps.

4 Patinage



1 • Il n'y a pas de frottements, donc toutes les forces extérieures appliquées au système des deux patineurs sont verticales, le mouvement a lieu dans un plan horizontal : la vitesse du centre de masse G est constante et vaut simplement :

$$\vec{v}_G = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Sur le schéma, G se déplace à vitesse constante le long de la

droite d'équation $x_G = d_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d_0$.

Une fois accrochés, les deux patineurs restent à distance d_0 l'un de l'autre. La conservation du moment cinétique barycentrique :

$$\vec{L}^* = \overrightarrow{A_1A_2} \wedge \mu(\vec{V}_{A_2} - \vec{V}_{A_1}) = \mu d^2(t) \omega \vec{e}_z$$

où $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$ est la masse du mobile fictif nous indique

que la vitesse de rotation ω de l'axe A_1A_2 est conservée. On peut la calculer à l'instant où les patineurs s'accrochent :

$$\omega = \omega_0 = \frac{v_2 - v_1}{d_0}.$$

Remarque

Cette valeur permet de vérifier la conservation de l'énergie, donc ici de l'énergie cinétique ($d = A_1A_2$ restant constante).

2 • Le système étant maintenant déformable, les forces intérieures travaillent. Le moment résultant des forces extérieures en G est toujours nul, et le moment cinétique barycentrique reste constant :

$$\vec{L}^* = \mu d^2(t) \omega(t) \vec{e}_z.$$

Donc : $d(t)^2 \omega(t) = d_0^2 \omega_0 = d_0(v_2 - v_1)$,

soit $\omega(t) = \frac{d_0(v_2 - v_1)}{d(t)^2}$. $\omega(t)$ augmente quand $d(t)$ diminue.

Le travail effectué par les deux patineurs est le travail des forces intérieures τ_{int} , d'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\tau_{\text{int}} = \Delta \mathcal{E}_K = \Delta \mathcal{E}_K^* = \frac{1}{2} \mu d^2(t) \omega^2(t) - \frac{1}{2} \mu d_0^2 \omega_0^2$$

En éliminant $\omega(t)$, on obtient :

$$\tau_{\text{int}} = \frac{1}{2} \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} (v_2 - v_1)^2 \left(\left(\frac{d_0}{d(t)} \right)^2 - 1 \right).$$

5 Interaction noyau-proton. Distance minimale d'approche

1 • L'énergie mécanique du système {proton + noyau}

dans le référentiel barycentrique s'écrit : $\mathcal{E}_M = \frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 x}$,

où μ est la masse réduite du système, égale à $\frac{mM}{m + M}$ et $x = \overline{PN}$.

À l'instant initial, $\mathcal{E} = \frac{1}{2} \mu v_0^2$.

On en déduit $\frac{1}{2} \mu \dot{x}^2 + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 x} = \frac{1}{2} \mu v_0^2$.

La distance minimale entre les deux particules est donc :

$$x_{\text{min}} = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0 \mu v_0^2} \quad (\text{quand } \dot{x} \text{ est minimale, } \dot{x} = 0).$$

2 • La formule de composition des vitesses (vitesse \vec{v}_p dans le référentiel fixe et vitesse \vec{v}_p^* dans le référentiel barycentrique) pour le proton donne $\vec{v}_p = \vec{v}_p^* + \vec{v}_G$. On sait par ailleurs que la quantité de mouvement du proton dans le référentiel barycentrique est $\vec{p}_p^* = -\mu \dot{x} \vec{e}_x$, elle est donc nulle quand le proton est le plus proche du noyau, il en est alors de même pour \vec{v}_p^* .

Le système étant isolé, la vitesse de son centre de masse reste constante, et égale à sa valeur initiale, c'est-à-dire :

$$\frac{m}{m+M} \vec{v}_0.$$

Quand le proton est le plus proche du noyau, sa vitesse est

$$\text{donc : } \vec{v}_p = \frac{m}{m+M} \vec{v}_0.$$

Remarque

À ce moment-là, la vitesse du noyau est égale à celle du proton, car $v_p - v_N = \dot{x} = 0$. On aurait pu utiliser cet argument pour calculer \vec{v}_p .

6 Mouvements de blocs reliés par un ressort

1 • Lorsque A aura décollé du mur, le centre d'inertie G du système glissera à vitesse constante, et les masses oscilleront autour de ce centre d'inertie.

Tant que A n'a pas décollé, les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} m \ddot{x}_A = k \Delta \ell(t) + R \text{ avec } \dot{x}_A = 0 \\ m \ddot{x}_B = -k \Delta \ell(t) \end{cases}$$

Soit : ($\ddot{x}_A = 0$) :

$$\Delta \ell(t) = -\Delta \ell_0 + x_B - x_{B_0} = -\frac{R}{k},$$

ce qui donne pour B :

$$m \ddot{x}_B = -k(x_B - x_{B_0} - \Delta \ell_0).$$

À vitesse initiale nulle, on a donc :

$$x_B = x_{B_0} + \Delta \ell_0(1 - \cos \omega t) = \ell_v - \Delta \ell_0 \cos \omega t$$

$$\text{avec } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

La réaction du mur est enfin :

$$R = -k \Delta \ell(t) = k \Delta \ell_0 \cos \omega t.$$

Elle s'annule (et A décolle du mur) à l'instant :

$$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

2 • Le mouvement de G est rectiligne et uniforme pour $t > t_1$, avec :

$$\vec{v}_G = \vec{v}_G(t_1) = \frac{m \vec{0} + m \vec{v}_B(t_1)}{2m} = v_G \vec{e}_x$$

$$\text{soit : } v_G = \frac{\omega \Delta \ell_0}{2} \sin \omega t_1 = \frac{\omega \Delta \ell_0}{2}.$$

3 • À $t > t_1$, R est nulle, et la soustraction des équations des mouvements de A et B donne l'évolution de la position relative $x_B - x_A$:

$$m(\ddot{x}_B - \ddot{x}_A) = -2k \Delta \ell(t) = -2k(x_B - x_A - \ell_v)$$

soit, avec $\Omega = \sqrt{2} \omega$:

$$\begin{aligned} x_B - x_A &= \ell_v + (x_B(t_1) - \ell_v) \cos \Omega(t - t_1) + \frac{v_B(t_1)}{\Omega} \sin \Omega(t - t_1) \\ &= \ell_v + \Delta \ell_0 \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega(t - t_1). \end{aligned}$$

Au mouvement d'ensemble à vitesse \vec{v}_G uniforme se superpose un mouvement relatif d'oscillations à pulsation Ω , de

$$\text{période } T : 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}}.$$

4 • La position de A est :

$$\begin{aligned} x_A(t) &= \frac{x_A + x_B}{2} + \frac{x_A - x_B}{2} = x_G + \frac{1}{2}(x_A - x_B) \\ &= \left[\frac{x_B(t_1)}{2} + \frac{v_B(t_1)}{2}(t - t_1) \right] - \frac{1}{2} [\ell_v + \Delta \ell_0 \frac{\omega}{\Omega} \sin \Omega(t - t_1)] \\ &= \frac{\omega}{\Omega} \frac{\Delta \ell_0}{2} [\Omega(t - t_1) - \sin \Omega(t - t_1)] \end{aligned}$$

reste positif à $t > t_1$: le point A ne revient pas heurter le mur.

7 Détermination du rapport des masses de la Terre et du Soleil à l'aide de la troisième loi de Kepler

1 • L'astre, très massif, est considéré comme immobile au centre O de champ de force centrale gravitationnelle :

$$\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r \text{ dans lequel évolue le satellite de masse } m.$$

Pour le mouvement circulaire (uniforme), on a :

$$m \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}, \text{ soit } v = \sqrt{\frac{GM}{r}}, \text{ c'est-à-dire :}$$

$$T = 2\pi \frac{r}{v} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}. \text{ On en déduit } \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

$$\text{Pour la Terre (autour du Soleil) : } \frac{T_1^2}{D_1^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S};$$

$$\text{pour la Lune (autour de la Terre) : } \frac{T_2^2}{D_2^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}.$$

Le rapport de ces deux expressions est :

$$\frac{M_T}{M_S} = \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^3 = 3,01 \cdot 10^{-6}.$$

2 • Si on ne néglige plus m devant M , le mobile réduit n'est plus confondu avec P . Le mouvement du mobile réduit obéit à l'équation :

$$\mu \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r, \text{ soit, en projection sur } \vec{e}_r :$$

$$\mu \frac{v^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2}, \text{ ou encore } v = \sqrt{\frac{G(M+m)}{r}}.$$

On en déduit $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}$. En suivant la même démarche qu'à la question précédente, on obtient :

$$\frac{M_T + M_L}{M_S + M_T} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3.$$

Au premier ordre en $\frac{M_T}{M_S}$ cette équation devient :

$$\frac{M_T}{M_S} \left(1 + \frac{M_L}{M_T}\right) = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3,$$

$$\text{d'où : } \frac{M_T}{M_S} = \frac{1}{1 + \frac{M_L}{M_T}} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 \left(\frac{D_2}{D_1}\right)^3 = 2,97 \cdot 10^{-6}.$$

L'écart relatif entre les deux valeurs est :

$$\frac{M_L}{M_L + M_T} = 1,22 \text{ \%}.$$

8 Points de Lagrange

1 • On considère le système Terre–Lune comme un système isolé, la distance Terre–Lune restant constante. La Terre et la Lune décrivent des cercles autour de leur centre de masse, de rayons respectifs :

$$r_T = \frac{m_L}{m_T + m_L} D \text{ et } r_L = \frac{m_T}{m_T + m_L} D.$$

Le point matériel M sera immobile par rapport au système Terre–Lune s'il est immobile dans le référentiel tournant avec ce système (par rapport au référentiel héliocentrique, par exemple). Il faut donc déterminer la vitesse angulaire de rotation ω_0 du système Terre–Lune autour de son centre de masse. Pour cela, on applique la relation fondamentale de la dynamique à la Terre et à la Lune séparément (dans le référentiel héliocentrique), chacune n'étant soumise qu'à l'attraction gravitationnelle de l'autre :

$$m_T \omega_0^2 r_T = \frac{G m_L m_T}{D^2} \text{ et } m_L \omega_0^2 r_L = \frac{G m_L m_T}{D^2}.$$

On additionne ces deux équations après les avoir simplifiées respectivement par m_T et par m_L , on obtient l'expression de

$$\omega_0 : \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{D^3}}.$$

Remarque : Cette expression nous est fournie directement par la troisième loi de Kepler en remarquant que $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

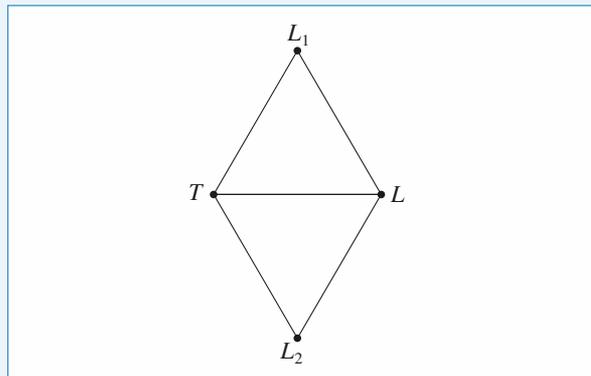
Dans le référentiel tournant, le point M est soumis aux forces d'attraction gravitationnelle de la Terre et de la Lune et aux forces d'inertie. Quand il est en équilibre, la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$$\vec{0} = -G m m_T \frac{\overline{TM}}{TM^3} - G m m_L \frac{\overline{LM}}{LM^3} + m \omega_0^2 \overline{GM},$$

G étant le centre de masse du système Terre–Lune. En remplaçant ω_0 par son expression, cette équation devient :

$$m_T \frac{\overline{TM}}{TM^3} + m_L \frac{\overline{LM}}{LM^3} = (m_T + m_L) \frac{\overline{GM}}{D^3}.$$

Si les points T , L et M forment un triangle équilatéral, $\overline{TM} = \overline{LM} = \overline{D}$, les dénominateurs se simplifient et il reste $m_T \overline{TM} + m_L \overline{LM} = (m_T + m_L) \overline{GM}$, ce qui est la définition de G : le point M est alors immobile par rapport au système Terre–Lune. On définit ainsi deux points L_1 et L_2 .



Autre méthode

On peut aussi raisonner avec l'énergie potentielle. Dans le référentiel tournant, l'énergie potentielle du point M est :

$$\mathcal{E}_P = -Gm \left(\frac{m_T}{TM} + \frac{m_L}{LM} \right) + \mathcal{E}_{P_{ic}} \text{ avec } \mathcal{E}_{P_{ic}} = -\frac{1}{2} m \omega_0^2 GM^2.$$

Pour étudier l'énergie potentielle, il vaut mieux l'exprimer en fonction de TM et LM uniquement.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{P_{ic}} &= -\frac{1}{2} m \frac{G}{D^3} (m_T + m_L) \overline{GM} \cdot \overline{GM} \\ &= -\frac{1}{2} m \frac{G}{D^3} ((m_T \overline{TM} \cdot \overline{GT} + \overline{TM}) + m_L \overline{LM} \cdot \overline{GL} + \overline{LM}) \\ &\quad (\text{car } m_T \overline{GT} + m_L \overline{GL} = \vec{0}) \\ &= -\frac{1}{2} m \frac{G}{D^3} (m_T TM^2 + m_L LM^2 + m_T \overline{TM} \cdot \overline{GT} + m_L \overline{LM} \cdot \overline{GL}). \\ &= -\frac{1}{2} m \frac{G}{D^3} (m_T TM^2 + m_L LM^2 + m_T \overline{GT} \cdot \overline{TL}). \\ &\quad (\text{car à nouveau } m_L \overline{GL} = -m_L \overline{GT}) \end{aligned}$$

On peut alors écrire :

$$\mathcal{E}_p = -Gm \left(\frac{m_T}{TM} + \frac{m_L}{LM} + m_T \frac{TM^2}{2D^3} + m_L \frac{LM^2}{2D^3} \right) + \text{cte.}$$

Le point sera en équilibre si \mathcal{E}_p est extrémale. Si le point M n'est pas sur la droite TM , les variables TM et LM sont indépendantes, la fonction \mathcal{E}_p est extrémale quand :

$$\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial(TM)} = \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial(LM)} = 0,$$

ce qui donne $LM = TM = D$: c'est bien le résultat attendu.

2 • Si M est sur la droite TL , sa position ne dépend plus que d'un paramètre, par exemple $x = GM$.

On a alors $TM = |r_T + x|$ et $LM = |r_L - x|$.

L'énergie potentielle de M dans le référentiel tournant est :

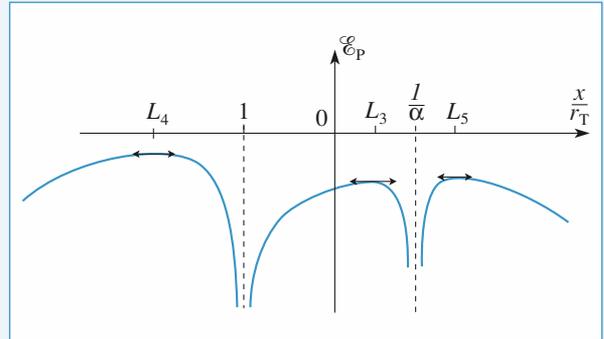
$$\mathcal{E}_p = -Gm \left(\frac{m_T}{|r_T + x|} + \frac{m_L}{|r_L - x|} + \frac{1}{2} (m_T + m_L) \frac{x^2}{D^3} \right)$$

$$\mathcal{E}_p = -\frac{Gmm_T}{r_T} \left(\frac{1}{\left| 1 + \frac{x}{r_T} \right|} + \frac{\alpha}{\left| \frac{1}{\alpha} - \frac{x}{r_T} \right|} + \frac{1}{2} \frac{\alpha^3}{(1+\alpha)^2} \left(\frac{x}{r_T} \right)^2 \right)$$

avec $\alpha = \frac{m_L}{m_T}$.

L'allure de la courbe $\frac{\mathcal{E}_p r_T}{Gmm_T}$ en fonction de $\frac{x}{r_T}$ est donnée

ci-dessous :



Il y a donc trois positions d'équilibre sur la droite TL : L_3 entre T et L , L_4 et L_5 à l'extérieur (l'un du côté de T , l'autre du côté de L).

3 • En considérant de la même façon le système Soleil–Jupiter (la condition de stabilité des points L_1 et L_2 est largement vérifiée), on a observé la présence d'astéroïdes aux points L_1 et L_2 (planètes troyennes). Le point L_3 du système Terre–Soleil peut d'autre part constituer un point privilégié d'observation de l'espace interplanétaire.

1 ■ Les bases de l'optique géométrique – Réflexion et réfraction ...	125
2 ■ Formation d'images	134
3 ■ Miroirs et lentilles	142
4 ■ Instruments d'observation	164
5 ■ Focométrie	181
6 ■ Le prisme, utilisation en spectroscopie	190

1

Les bases de l'optique géométrique – Réflexion et réfraction

LES OBJECTIFS

- Tracés élémentaires de rayons lumineux.
- Utilisation des lois de réflexion et réfraction des rayons lumineux.

LES PRÉREQUIS

- Indices, longueur d'onde, lois de Descartes.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Trigonométrie élémentaire.

ESSENTIEL

La lumière

• La lumière résulte en général de la superposition d'ondes électromagnétiques de différentes longueurs d'onde. Une lumière monochromatique correspond à une onde sinusoïdale de fréquence bien déterminée.

• Dans le vide, la lumière se propage dans toutes les directions de l'espace à la vitesse :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ soit environ } 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

• La longueur d'onde λ dans le vide, la fréquence ν et la période T sont liées par $\lambda = cT = \frac{c}{\nu}$.

• Le domaine de la lumière visible par l'œil humain correspond aux longueurs d'onde comprises entre $0,4 \mu\text{m}$ et $0,8 \mu\text{m}$ (400 nm et 800 nm).

• Dans les milieux transparents, la lumière se propage à la vitesse $v = \frac{c}{n}$ où n est l'indice optique du milieu.

Si n dépend de la fréquence (ou de la longueur d'onde), le milieu est dit dispersif.

• La plupart des milieux transparents ont un indice qui vérifie assez bien la formule simplifiée de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} \text{ avec } A \text{ et } B \text{ positifs.}$$

On a alors $n_{\text{bleu}} > n_{\text{jaune}} > n_{\text{rouge}}$.

• Quelques ordres de grandeurs d'indices :

air : $n \approx 1$; eau : $n = 1,33$; verres : n variant de $1,5$ à $1,8$ environ.

couleur	longueur d'onde
limite de l'ultraviolet	400 nm
violet	420 nm
bleu	470 nm
vert	530 nm
jaune	580 nm
orange	600 nm
rouge	650 nm
limite de l'infrarouge	780 nm

Rayons lumineux

- Les constructions de l'optique géométrique sont basées sur le tracé de rayons lumineux, indépendamment les uns des autres. On les construit en utilisant les lois de Snell-Descartes.
- Dans un milieu homogène et isotrope, la lumière se propage en ligne droite ; les rayons lumineux sont des droites.
- Dans un milieu d'indice variable, le rayon lumineux se courbe et tourne sa concavité vers les zones d'indice croissant (sens du gradient d'indice).

Lois de Snell-Descartes

- À l'interface de deux milieux d'indices optiques différents (dioptre), un rayon lumineux donne en général naissance à un rayon réfléchi et à un rayon transmis (réfracté), situés dans le plan d'incidence défini par le rayon incident et la normale locale au dioptre.

Réflexion

Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale à l'interface : $i'_1 = i_1$.

Réfraction

L'angle de réfraction i_2 est lié à l'angle d'incidence i_1 par : $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.

Si $n_1 < n_2$, le rayon réfracté existe toujours. Il s'approche de la normale.

Si $n_1 > n_2$, il y a réflexion totale lorsque l'angle d'incidence i_1 est plus grand que l'angle de réfraction limite i_L , tel que :

$$\sin i_L = \frac{n_2}{n_1}.$$

Cette propriété est utilisée dans les fibres optiques, les prismes à réflexion totale...

Si le rayon réfracté existe, il s'écarte de la normale.

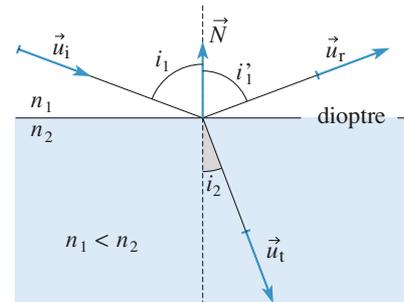


Figure réalisée avec $n_1 < n_2$.

- Les lois de Descartes obéissent au principe de retour inverse de la lumière : tout trajet suivi par la lumière dans un sens peut l'être dans le sens opposé.

Conseils et pièges à éviter

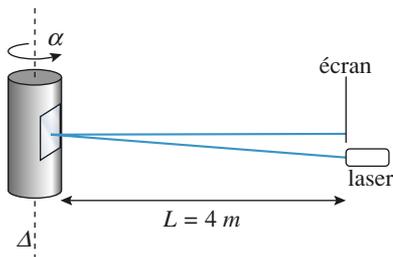
- Faire le plus souvent des schémas clairs et relativement précis.
- Attention à la définition du plan d'incidence.

1 Détection d'une faible torsion

Sur un dispositif susceptible de tourner d'un petit angle α autour de l'axe vertical Δ , on a fixé un petit miroir plan. Un faisceau laser est réfléchi sur le miroir et forme une tache sur l'écran d'observation à distance L .

Cette tache a un diamètre de 5 mm.

Quel est l'ordre de grandeur des angles de rotation détectables à l'aide de ce système? Si la tache se déplace de 5 cm, quel est l'angle de rotation mesuré?



Conseil Faire un schéma pour déterminer la direction du rayon réfléchi.

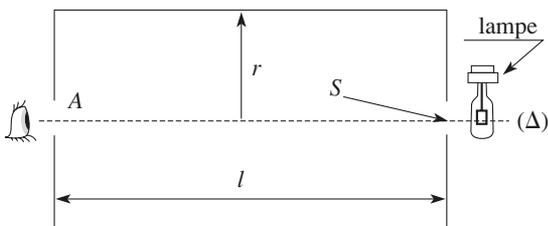
2 Incidence de Brewster

On considère l'interface air (indice $n_a = 1$) – eau (indice $n = 1,33$).

Pour quel angle d'incidence i_{1B} le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté?

Conseil Faire un schéma dans le plan d'incidence.

3 Que voit l'œil ?



Un œil regarde une lampe à travers un cylindre dont les parois internes sont réfléchissantes. Les bases du cylindre de rayon r et de hauteur ℓ sont percées de deux petits trous.

Que voit l'œil ?

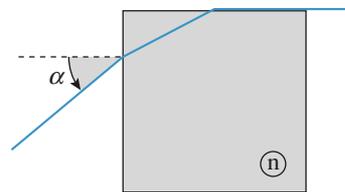
Conseil Quels sont les trajets possibles menant d'un trou à l'autre ?

4 Émergence rasante

Le plan de figure est le plan d'incidence.

Le rayon arrive à l'incidence $\alpha = 40^\circ$, et émerge en rasant la face adjacente.

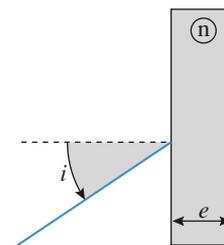
- Quel est l'indice du cube de verre ?
- Que se passe-t-il pour $\alpha > 40^\circ$ et pour $\alpha < 40^\circ$?



Conseil Une émergence rasante correspond à la limite de réflexion totale...

5 Décalage par une lame à faces parallèles

Pourquoi le rayon lumineux sera-t-il « décalé » par la lame de verre ? Quel est ce décalage si $e = 3$ cm, pour un indice $n = 1,5$, l'incidence étant fixée à 50° ?



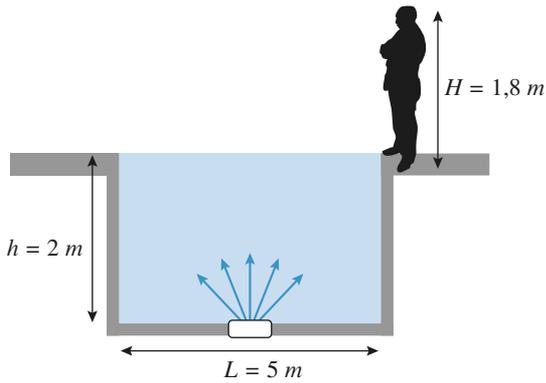
Conseil Faire la construction du trajet de retour et repérer les angles pertinents.

6 Éclairage d'une fontaine

Une fontaine est éclairée par un projecteur, orienté verticalement et encastré dans son fond.

Le fond du bassin est-il éclairé ? Pourquoi ? Définir une zone de pénombre au fond du bassin, et préciser sa dimension. Peut-on voir le luminaire du bord du bassin ?

Les valeurs numériques utiles sont indiquées sur le schéma. L'indice de l'eau est $n = 1,33$.



Conseil

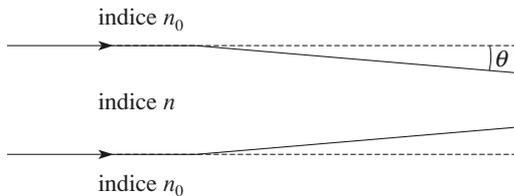
Peut-il y avoir réflexion totale à l'interface eau-air ?

7 Autofocalisation d'un rayon laser

Un faisceau laser de forte puissance P , de section cylindrique s et de rayon a traverse un milieu dont l'indice n dépend de la puissance P et de la section s du laser suivant la loi :

$$n - n_0 = \alpha \frac{P}{s}$$

(n_0 et α désignent des constantes positives).



Montrer que cette propriété a tendance à faire converger le faisceau laser initialement parallèle. Évaluer un ordre de grandeur de l'angle de convergence de ce faisceau.

Données : $P = 1 \text{ kW}$; $a = 0,3 \text{ mm}$;
 $\alpha = 2 \cdot 10^{-22} \text{ m}^2 \cdot \text{W}^{-1}$; $n_0 = 1,5$; $s = 0,3 \text{ mm}^2$.

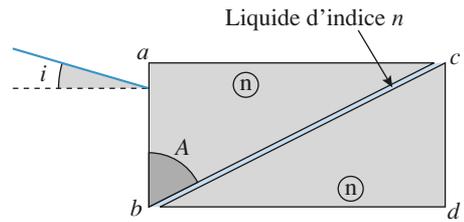
Conseils

Considérer un rayon limite du faisceau laser et appliquer la loi de Descartes pour la réfraction entre un milieu d'indice n_0 et un milieu d'indice n .

8 Réfractomètre d'Abbe

Un réfractomètre d'Abbe comprend deux prismes identiques, d'indice $N = 1,732$, à base en forme de triangle rectangle dont le deuxième angle est noté A (cf. schéma).

Entre ces prismes est intercalé un film de liquide d'indice n que l'on cherche à déterminer.



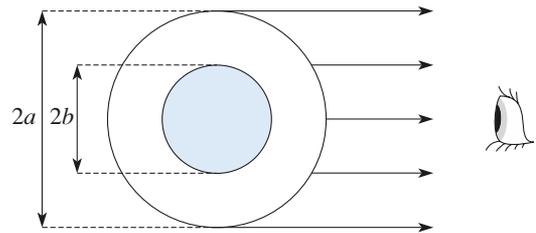
- Quelle est la direction du rayon entrant par la face ab à l'incidence i , s'il émerge du dispositif par la face cd ?
- Que vaut l'indice n si on observe une disparition du rayon transmis pour une incidence $i = 18^\circ$?
- Quels sont les indices mesurables avec ce dispositif ?

Conseil

Faire un schéma, avec les angles associés. Peut-il y avoir réflexion totale ? Où ?

9 Observation d'un tube barométrique

Un tube de verre cylindrique d'indice n , de rayon extérieur a et de rayon intérieur b est rempli de mercure. Un observateur très éloigné du tube regarde le tube dans une direction normale à l'axe du tube (on suppose donc que les rayons lumineux provenant du tube éclairé forment un faisceau de lumière cylindrique arrivant vers l'œil de l'observateur).



Expliquer ce que voit l'observateur suivant les valeurs du rapport $\frac{b}{a}$.

Conseil

Considérer le rayon limite tangent au cylindre intérieur et étudier la condition pour laquelle il sort du tube de verre.

10 Fibre à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice est formée d'une âme de rayon r et d'indice n_1 , entourée d'une gaine d'indice n_2 .

1 • Les indices des matériaux disponibles valent 1,50 et 1,65. Expliquer le principe du guidage, et indiquer le matériau à choisir pour l'âme de la fibre.

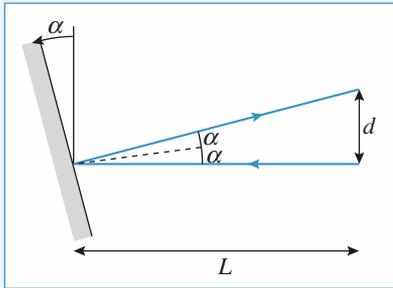
2 • Pour une impulsion lumineuse guidée dans la fibre de longueur L , pourquoi y a-t-il un décalage temporel, noté τ , entre les différents rayons qui lui sont associés et guidés

au cœur de la fibre ? Quelle fréquence de transmission peut-on envisager pour cette fibre ? Existe-t-il une solution technique réduisant cet inconvénient ?

Conseils

Le confinement est assuré par réflexion totale. Examiner alors le trajet total du rayon.

1 Détection d'une faible torsion



L'angle α étant petit, le rayon réfléchi revient à distance $d \approx 2\alpha L$, d'après la construction.

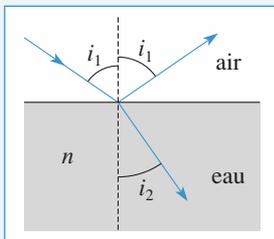
On peut estimer que ce décalage est décelable si $d > 5 \text{ mm}$, soit $\alpha > 6,25 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \approx 2'$, ce qui est comparable au pouvoir séparateur de l'œil (de l'ordre de $3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$).

Pour $d = 5 \text{ cm}$, on obtient $\alpha = 20'$.

2 Incidence de Brewster

On a $\sin i_1 = n \sin i_2$ avec $i_{1B} + i_{2B} = \frac{\pi}{2}$;

d'où $\tan i_{1B} = n$, ce qui donne $i_{1B} = 53^\circ$.

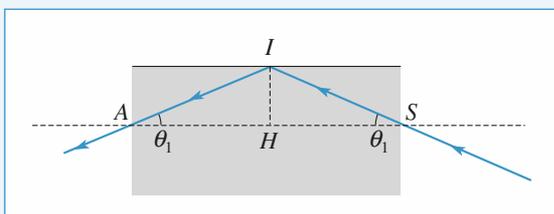


i_{1B} est appelée incidence de Brewster ; elle est bien connue des photographes qui utilisent, au bord de la mer ou sur une montagne enneigée, des filtres polarisants pour diminuer les reflets parasites à cette incidence (cf. cours de 2^e année).

3 Que voit l'œil ?

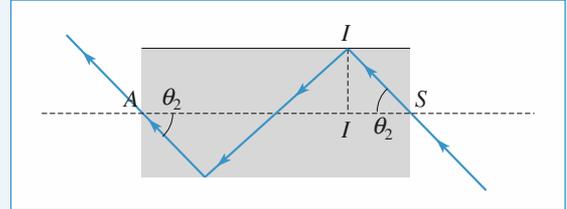
Les trous étant de petite dimension, un rayon entré en S doit ressortir en A après des réflexions éventuelles sur les parois.

• Cas d'une réflexion (doc. ci-dessous).



On a $\tan \theta_1 = \frac{IH}{SH}$ avec $SH = \frac{\ell}{2}$, soit $\tan \theta_1 = \frac{2r}{\ell}$.

• Cas de deux réflexions (doc. ci-dessous).



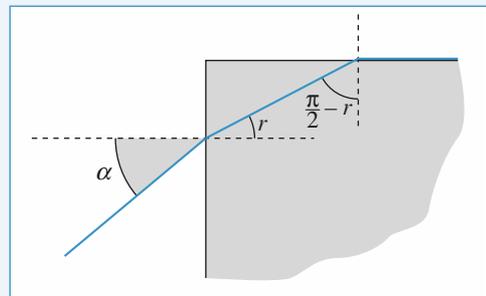
On a $\tan \theta_2 = \frac{IH}{SH}$ avec $SH = \frac{\ell}{4}$, soit $\tan \theta_2 = \frac{4r}{\ell}$.

Dans le cas de k réflexions, on trouve facilement que :

$$\tan \theta_k = \frac{2kr}{\ell}$$

Par raison de symétrie autour de la direction SA , le rayon dessiné peut tourner autour de SA . L'œil reçoit donc un cône de rayons sortant sous l'angle θ_k . L'œil verra un cercle pour chaque valeur de θ_k . Remarquons que pour $k = 0$, on obtient un point central.

4 Émergence rasante



1 • À l'entrée, $\sin \alpha = n \sin r$.

Et pour avoir un rayon émergent rasant, il faut avoir :

$$n \sin \left(\frac{\pi}{2} - r \right) = 1$$

On en déduit successivement : $\cos r = \frac{1}{n}$, $\sin r = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$,

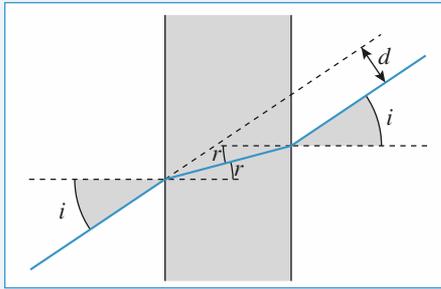
$\sin \alpha = \sqrt{n^2 - 1}$, et enfin : $n = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha} = 1,19$.

2 • Pour $\alpha > 40^\circ$, r est plus grand, et $\frac{\pi}{2} - r$ plus petit : la

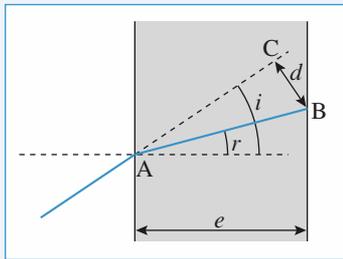
lumière émerge partiellement par la face supérieure.

Pour $\alpha < 40^\circ$, il y a réflexion totale sur la face supérieure.

5 Décalage par une lame à faces parallèles



La construction montre que le rayon sort de la lame sans avoir été dévié, mais décalé de la distance d .

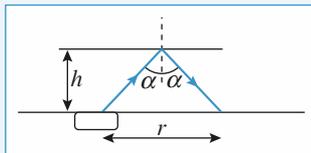


Sur le schéma, on peut identifier :

$$d = CB = AB \sin(i - r) = e \frac{\sin(i - r)}{\cos r}$$

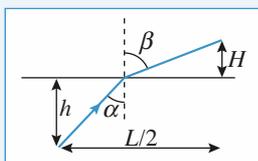
Pour $i = 50^\circ$, on obtient $r \approx 30,7^\circ$, puis $d \approx 1,15$ cm.

6 Éclairage d'une fontaine



Pour $\alpha = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$, on est à la limite de réflexion totale à la surface de l'eau. La transmission vers l'air a lieu pour des angles α plus faibles, et on peut estimer qu'il existe une zone de pénombre de rayon $r = 2h \tan \alpha$, soit : $r = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 4,6$ m.

Pour une fontaine de demi-largeur égale à 2,5 m, le fond sera donc assez sombre (si la surface de l'eau est peu agitée).



Pour que l'observateur puisse voir le projecteur, il faut trouver un angle α , avant la réflexion totale, tel que :

$$\frac{L}{2} = h \tan \alpha + H \tan \beta, \text{ avec } \sin \beta = n \sin \alpha.$$

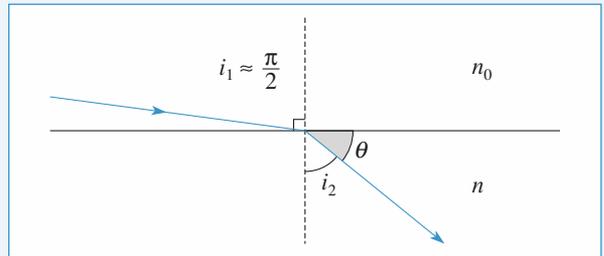
En posant $x = \sin \alpha$, il vient :

$$\frac{L}{2} = h \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + H \frac{nx}{\sqrt{1-n^2 x^2}}$$

La résolution numérique conduit à un angle $\alpha \approx 28^\circ$: l'observateur peut apercevoir le projecteur.

7 Autofocalisation d'un rayon laser

Selon les lois de Descartes, les rayons du faisceau laser ont tendance à être déviés vers la région de fort indice, donc vers l'axe du faisceau (puisque $n > n_0$).



Il vient $n_0 = n \sin i_2 = n \cos \theta = \left(n_0 + \alpha \frac{P}{s}\right) \cos \theta$.

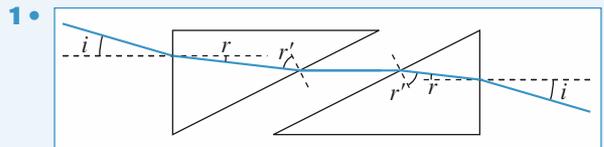
n restant voisin de n_0 car $\left(\alpha \frac{P}{s} \approx 7 \cdot 10^{-13}\right)$, θ est très

petit ; on peut donc prendre $\cos \theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, d'où :

$$\theta \approx \sqrt{\frac{2\alpha P}{sn_0}} \approx 10^{-6} \text{ rad.}$$

Si le faisceau laser converge effectivement vers l'axe (autofocalisation), cette convergence reste très faible, voire négligeable dans le cadre de l'application numérique proposée.

8 Réfractomètre d'Abbe



Si les faces des prismes en regard sont parallèles, le schéma montre que le rayon sort sans déviation.

2 • Une réflexion totale bloque l'émergence si

$$r' > \arcsin\left(\frac{n}{N}\right).$$

La somme des angles d'un triangle valant π , on peut lire sur

le schéma : $\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + A = \pi$, soit $r + r' = A$.

La réflexion totale a donc lieu lorsque :

$$\sin i = N \sin \left[A - \arcsin \left(\frac{n}{N} \right) \right]$$

ce qui donne une mesure de l'indice du liquide :

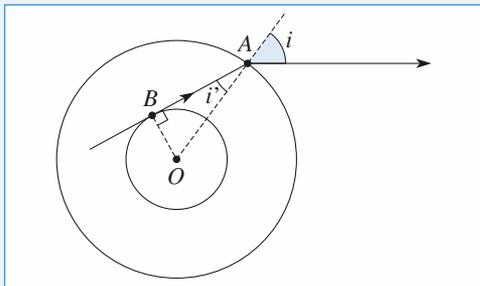
$$n = N \sin \left[A - \arcsin \left(\frac{\sin i}{N} \right) \right]$$

On obtient numériquement : $n \approx 1,321$.

3 • La réflexion totale est envisageable tant que $n < N$.

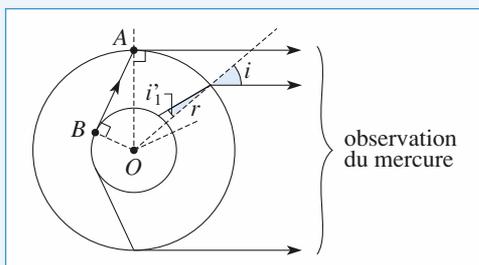
9 Observation d'un tube barométrique

Le rayon tangent au cylindre intérieur arrive sur le cylindre extérieur avec l'incidence i' ; après réfraction (si elle existe), le rayon sortant fait un angle i avec la normale tel que : $n \sin i' = \sin i$.



Sur le schéma précédent, on constate que :

$$\sin i' = \frac{OB}{OA} = \frac{b}{a}, \text{ d'où } b = \frac{a}{n} \sin i.$$



$$\text{Cas où } b = \frac{a}{n}$$

On peut donc envisager le cas limite où $b = \frac{a}{n}$.

Sur le schéma ci-dessus, i' prend la valeur limite i'_1 définie par $\sin i'_1 = \frac{1}{n}$.

Tous les rayons sortant du tube passent, avant réfraction sur le cylindre extérieur, à une distance $r = \frac{a}{n} \sin i < b$ et

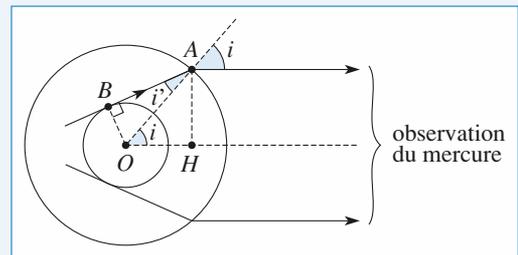
proviennent nécessairement du mercure. L'observateur a donc l'impression de voir le tube complètement rempli de mercure (il ne voit pas le verre).

Il en sera évidemment de même si $b \geq \frac{a}{n}$.

En revanche, si $b < \frac{a}{n}$, l'observateur voit le tube de verre de diamètre $2a$ dans lequel le mercure occupe un cylindre apparent de diamètre :

$$2HA = 2a \sin i = 2nb \left(\text{puisque } b = \frac{a}{n} \sin i \right).$$

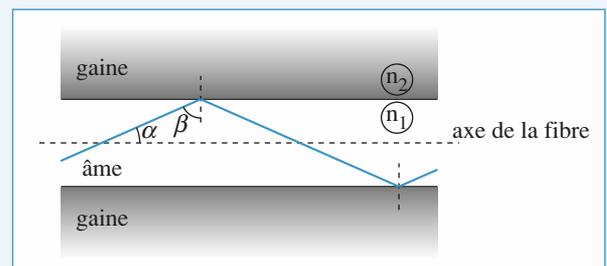
Pour l'observateur, le mercure paraît donc occuper un volume plus important qu'il ne le fait en réalité (cylindre de diamètre $2nb$ au lieu de $2b$).



$$\text{Cas où } b \leq \frac{a}{n}$$

10 Fibre à saut d'indice

1 • Le guidage sera réalisé si on obtient une réflexion totale interne du rayon lumineux : la gaine doit correspondre au milieu d'indice le moins élevé, donc $n_1 = 1,65$ et $n_2 = 1,50$. Pour un rayon situé dans un plan méridien, on obtient un schéma de la forme :



Le guidage est assuré si $\beta > \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$, avec $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$,

soit pour $\alpha < \arccos \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$. Pour un rayon non méridien,

incliné de α par rapport à l'axe de la fibre, l'incidence β sera plus élevée, l'inégalité obtenue est donc une condition suffisante au guidage.

2 • À une impulsion lumineuse sont associés des rayons dont l'inclinaison varie entre 0 et α pour qu'ils restent confinés dans la fibre.

Le trajet parcouru à vitesse $\frac{c}{n_1}$ varie donc de L (inclinaison nulle) à $\frac{L}{\cos \alpha} = \frac{n_1 L}{n_2}$ (inclinaison maximale), et le temps du trajet de $\frac{n_1 L}{c}$ à $\frac{n_1^2 L}{n_2 c}$. Une impulsion subit donc un élar-

gissement temporel de valeur $\tau = \frac{n_1 L}{c} \left(\frac{n_1}{n_2} - 1 \right)$. On peut envoyer les impulsions à une fréquence supérieure à $1/\tau$ sans risquer une perte d'information. En pratique les fibres optiques sont des fibres à gradient d'indice (et non à saut d'indice), ce qui diminue cette difficulté.

LES OBJECTIFS

- Utiliser, observer, discuter le stigmatisme de quelques systèmes optiques simples.

LES PRÉREQUIS

- Stigmatisme, aplanétisme.
- Conditions de Gauss pour un système centré.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Trigonométrie.

ESSENTIEL

◀ Stigmatisme

Un système optique réalise le **stigmatisme** pour un point objet A et son point image A' si tout rayon issu de A passe par A' après avoir été traité par le système optique : ces points sont **conjugés** par le système optique.

◀ Aplanétisme

Un système centré est un système optique possédant la symétrie de révolution autour d'un axe, appelée axe optique.

Un système centré est aplanétique pour un couple de points A et A' s'il est stigmatique pour le couple de points A et A' , et s'il conserve cette propriété en conjuguant des points B et B' , voisins de A et A' respectivement, et situés dans les mêmes plans de front, perpendiculaires à l'axe optique.

◀ Conditions de Gauss

Un système centré est utilisé dans les conditions de Gauss si les rayons sont paraxiaux : proches de l'axe optique, et peu inclinés. Les miroirs ou dioptries sont utilisés au voisinage de leur sommet.

Les conditions de Gauss assurent aux systèmes centrés un stigmatisme (conjugaison point à point), et un aplanétisme (conjugaison plan à plan) approchés.

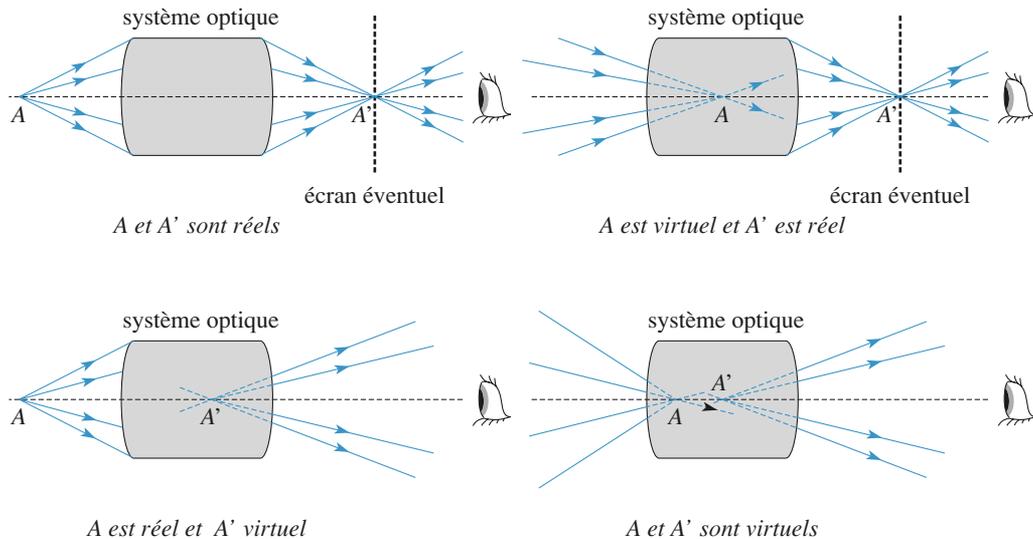
Le stigmatisme permet d'associer à un point de l'axe une image sur l'axe : une relation de conjugaison caractéristique traduit cette propriété.

Le foyer principal objet F a son image à l'infini dans la direction de l'axe optique. Le plan focal objet est le plan de front contenant F .

Le foyer principal image F' est l'image d'un point objet à l'infini dans la direction de l'axe optique. Le plan focal image est le plan de front contenant F' .

Dans les conditions de Gauss, la connaissance de points particuliers comme les foyers, centres ou sommets des miroirs ou dioptries permet une construction graphique des images en quelques traits.

Les rayons construits sont situés dans un plan contenant l'axe optique, et toutes les figures réalisées sont un tel *plan méridien*.



Conseils et pièges à éviter

- Attention à une erreur fréquente due aux notations :

un objet A a pour image A'

Mais l'image de F n'est pas F' :

- { un objet en F a son image à l'infini dans la direction de l'axe optique.
- { un objet à l'infini dans la direction de l'axe optique a pour image F' .

Exercices

1 Le miroir

Deux personnes mesurent respectivement 1,62 m et 1,85 m. Leur visage a environ 25 cm de hauteur, les yeux étant à 10 cm du sommet du crâne. Elles veulent toutes deux voir leur visage dans un miroir.

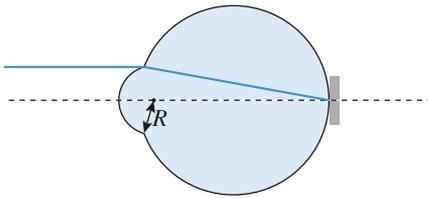
À quelle distance du sol doit-il être placé, et quelle est sa hauteur minimale ?

Conseil Il faut mettre en évidence les rayons limites arrivant sur le miroir.

2 Stigmatisme de l'œil

L'œil est assimilé à un dioptre sphérique air-eau ($n = 1,33$) de rayon $R = 6$ mm au repos.

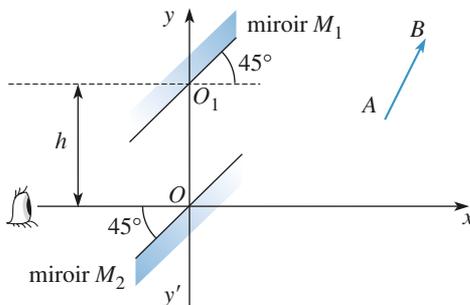
Quelle doit être la distance entre ce dioptre et la rétine, sachant que l'œil emmétrope au repos vise à l'infini ?



Conseil Faire apparaître les angles, et traduire la position du point de convergence, si ceux-ci sont petits.

3 Étude d'un périscope

Soit un périscope schématisé sur la figure suivante.



On désire observer l'image A' de $A(x, y)$ donnée par les deux miroirs M_1 et M_2 .

- Où est l'image A' de A ?
- Quelle est l'image d'un vecteur \vec{AB} ? Conclusions ?

Conseil

Où est l'image d'un point par un miroir plan ?

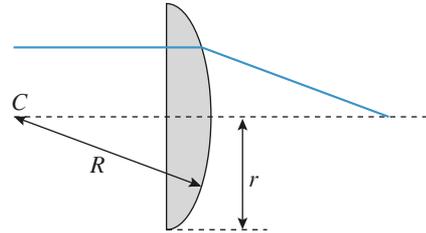
4 Lentille mince plan convexe

Une lentille plan convexe résulte de l'association d'un dioptre plan air-verre et d'un dioptre sphérique de rayon de courbure $R = 10$ cm.

En considérant un rayon analogue à celui représenté sur le schéma :

1 • Discuter les valeurs utiles du rayon d'ouverture r de la lentille. En utilisant la limite associée, préciser l'épaisseur maximale e de la lentille. Pour une lentille *mince*, cette limite peut-elle être contraignante ?

2 • Déterminer la focale de la lentille dans l'approximation de Gauss. Connaissant l'indice d'un verre « standard », commenter ce résultat. Qu'obtiendrait-on pour une lentille équiconvexe ?



Conseil

Y a-t-il émergence assurée du rayon ? Déterminer le foyer F' dans l'approximation des petits angles.

5 Principe d'un télémètre élémentaire

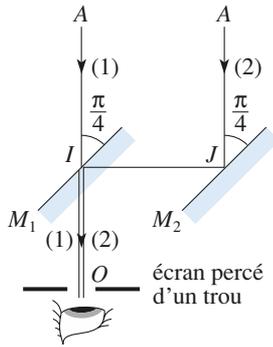
Un télémètre est un instrument optique destiné à mesurer les distances. Celui que l'on se propose d'étudier est constitué :

- d'une lame plane semi-réfléchissante M_1 ;
- d'un miroir plan M_2 .

Sur le schéma ci-après, l'appareil vise un objet ponctuel A situé à l'infini ; M_1 et M_2 sont parallèles et inclinés à 45° des rayons incidents.

L'œil, placé en O , voit ainsi l'objet A directement à travers M_1 (trajet 1) d'une part, par réflexion sur M_2 puis sur M_1 (trajet 2) d'autre part.

On donne $a = IJ = 5$ cm et $b = OI = 4$ cm.



1 • Montrer que si l'objet A se trouve à une distance finie $d = AO$ (M_1 et M_2 restant parallèles et M_1 étant incliné à 45° sur le rayon incident AIO correspondant au trajet 1), l'œil voit deux images distinctes dont on déterminera la distance angulaire α en fonction de d et a . Faire l'application numérique pour $d = 1,2$ m.

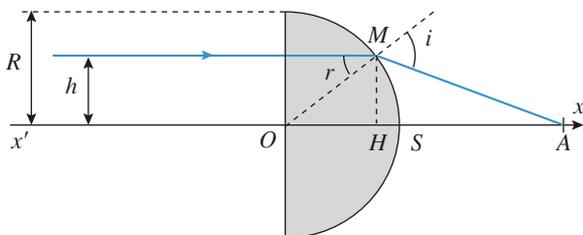
2 • Pour évaluer la distance d , on fait tourner le miroir M_2 autour de J d'un angle θ de manière à amener les directions des deux images en coïncidence. Déterminer θ en fonction de a , b et d .

3 • L'œil possède un pouvoir séparateur angulaire de 1 minute (l'œil ne distingue pas deux rayons faisant entre eux un angle inférieur à 1 minute) ; calculer l'incertitude Δd commise sur la mesure de la distance d .

Conseil Utiliser les propriétés du miroir plan lors d'un déplacement de celui-ci.

6 Lentille demi-boule

Soit le système lentille demi-boule plan convexe éclairé en lumière parallèle ; on se propose d'estimer les limites quantitatives permettant d'avoir un « bon » stigmatisme.



Soit un rayon arrivant à l'axe optique, à une distance h de cet axe.

Étudier la relation liant \overline{SA} à h . À l'aide d'un calcul numérique, estimer les limites du stigmatisme approché.

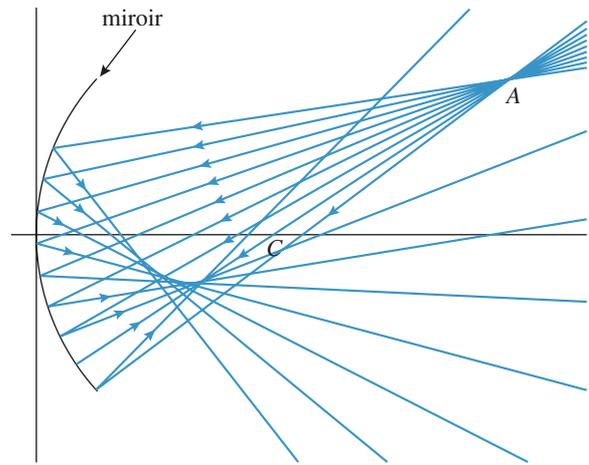
Données : $R = 100$ mm, $n = 1,5$ et $n = 1,6$,

Conseil

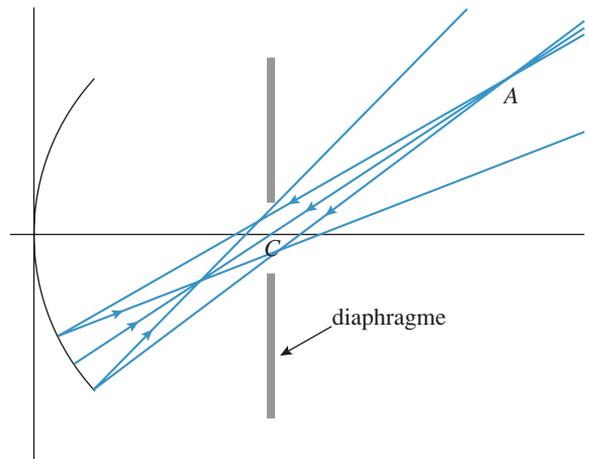
Il faut utiliser les lois de Snell-Descartes et des relations trigonométriques simples.

7 Stigmatisme du miroir sphérique

1 • Quelles remarques peut-on faire au sujet de la simulation donnant le tracé de quelques rayons lumineux issus de A qui se réfléchissent sur le miroir ?



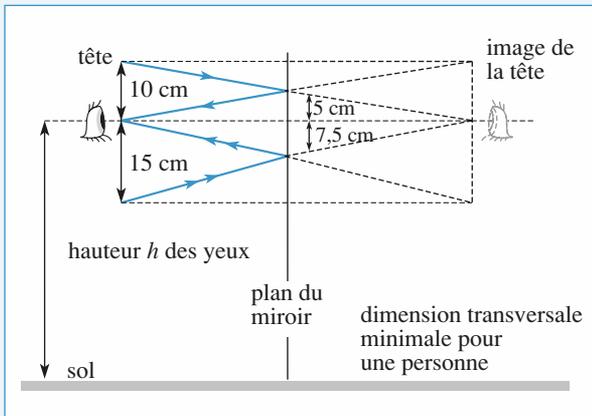
2 • Pour limiter l'extension du faisceau lumineux issu de A et réfléchi par le miroir, un diaphragme est placé sur l'axe optique, son centre coïncidant avec celui du miroir. Que peut-on dire du résultat de la nouvelle simulation ?



3 • Définir un point A' image de A et déterminer sa position à l'aide de l'angle θ que fait le segment CA avec l'axe du miroir. Caractériser le lieu des points A' des points A situé sur le plan source. A-t-on réalisé un système aplanétique ?

4 • Pourrait-on envisager une position particulière du plan objet permettant de réaliser la propriété d'aplanétisme ? Commenter.

1 Le miroir



La tête et son image sont équidistantes par rapport au miroir. Pour voir le haut de la tête, il faudra donc 5 cm de miroir au-dessus des yeux, tandis que pour voir le bas, il faudra 7,5 cm. La distance au sol doit être calculée pour la personne la plus petite, soit :

$$d = 162 - 10 - 7,5 = 144,5 \text{ cm.}$$

La hauteur du miroir doit permettre aux deux personnes de se voir.

C'est la personne la plus grande qui donne sa valeur minimale, soit :

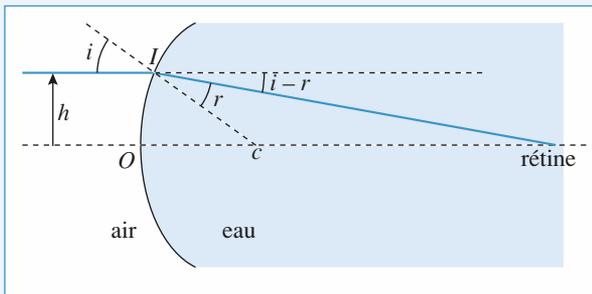
$$L = d' - d \text{ avec } d' = 185 - 10 + 5 = 180 \text{ cm.}$$

$$L = 35,5 \text{ cm.}$$

En conclusion, un miroir de 40 cm placé à 1,42 m du sol conviendra très bien.

2 Stigmatisme de l'œil

Un rayon paraxial parallèle à l'axe optique doit couper ce dernier sur la rétine car l'œil emmétrope au repos vise à l'infini.



Sur le schéma, où les angles sont petits, on peut lire :

$$x_R = x_1 + h \cotan(i - r)$$

$$= R \left[(1 - \cos i) + \frac{\sin i}{\tan(i - r)} \right]$$

$$\approx R \cdot \left[0 + \frac{i}{i \left(1 - \frac{1}{n}\right)} \right]$$

$$= R \frac{n}{n - 1}.$$

Pour $n = 1,33$ et $R = 6 \text{ mm}$, la rétine se situe donc à 24 mm derrière le dioptre sphérique d'entrée.

3 Étude d'un périscope

1 • Soit A_1 l'image de A donnée par M_1 .

$\overline{O_1 A_1}$ doit être le symétrique de $\overline{O_1 A}$ par rapport à M_1 .

$\overline{O_1 A}(x, y - h)$ donc $\overline{O_1 A_1}(y - h, x)$, puisque M_1 est incliné de 45° .

On en déduit les coordonnées de A_1 :

$$\overline{O A_1} = \overline{O O_1} + \overline{O_1 A_1} = (y - h, x + h).$$

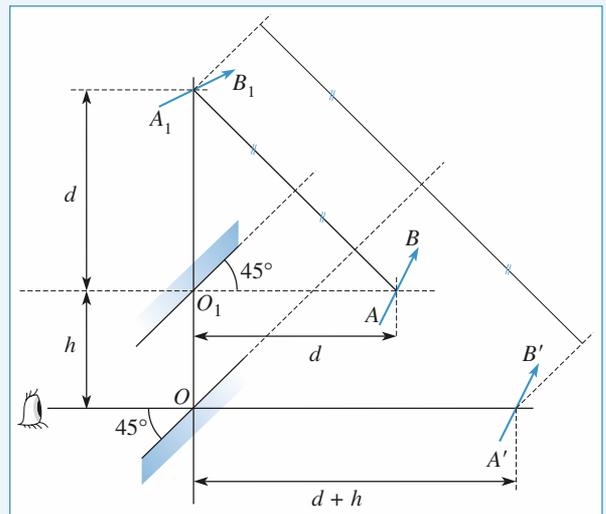
A' est l'image de A_1 donnée par M_2 . $\overline{O A'}$ est le symétrique de $\overline{O A_1}$ par rapport à M_2 . Donc :

$$\overline{O A'}(x + h, y - h).$$

Le point A' est donc visible par l'œil.

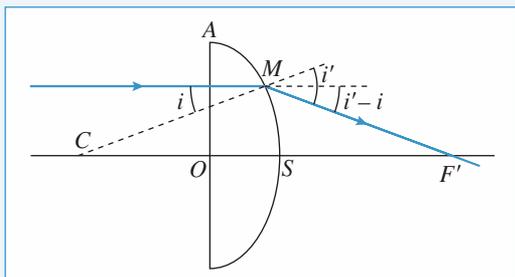
2 • Le vecteur \overline{AB} est transformé en $\overline{A'B'}$, avec $\overline{A'B'} = \overline{AB}$ (voir figure ci-dessous).

Ce système permet de visualiser un objet dans le cas où un obstacle existe devant l'œil. Les miroirs étant stigmatiques, l'image est nette.



4 Lentille mince plan convexe

1 •



Une réflexion totale a lieu au point M si $i > \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$,

soit $y = R \tan i > r = \frac{R}{\sqrt{n^2 - 1}}$, ce qui définit le rayon maximal utile d'ouverture de la lentille.

L'équation de la face bombée est $x^2 + y^2 = R^2$, en prenant l'origine en C .

On a donc : $x_S = R$, et $x_A = \sqrt{R^2 - r^2} = R \sqrt{\frac{n^2 - 2}{n^2 - 1}}$.

L'épaisseur maximale vaut alors : $e = x_S - x_A \approx 0,55R$ pour $n \approx 1,5$.

Pour une lentille mince, $e \ll R$, donc $y_A < r$, et cette limite n'intervient pas.

2 • Le point F' est à l'intersection du rayon émergent et de l'axe Ox , soit : $x_{F'} = x_M + y \cotan(i' - i)$.

Dans l'approximation de Gauss :

$$x_O \approx x_M \approx x_S = R, \quad i \approx \frac{y}{R}, \quad i' \approx \frac{ny}{R},$$

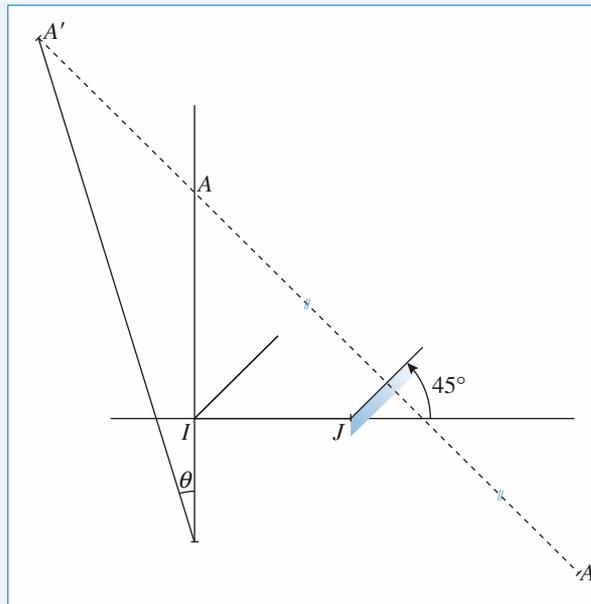
de sorte que $f' = \overline{OF'} = \frac{R}{n-1} \approx 2R$ pour $n = 1,5$.

Pour une lentille équiconvexe, juxtaposition de deux lentilles plan convexe, il suffit d'additionner les vergences, donc :

$$f' = \frac{R}{2(n-1)} = R \text{ si } n = 1,5.$$

5 Principe d'un télémètre élémentaire

1 •



On note A_2 l'image de A par M_2 : $\vec{JA} = \begin{pmatrix} -a \\ d-b \end{pmatrix}$,

donc $\vec{JA}_2 = \begin{pmatrix} d-b \\ -a \end{pmatrix}$ puisque M_2 est pour le moment à 45° .

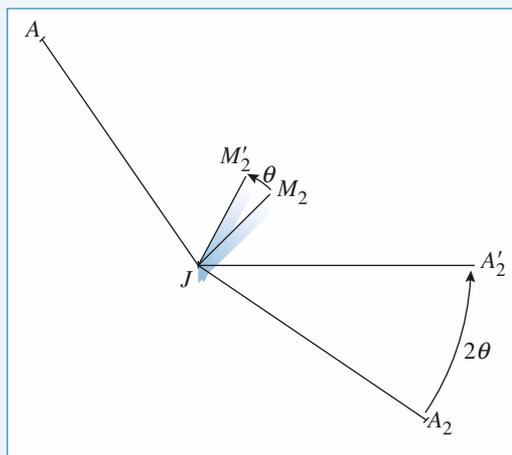
Par le miroir M_1 , A_2 a pour image A' : $\vec{IA}_2 = \begin{pmatrix} d-b+a \\ -a \end{pmatrix}$,

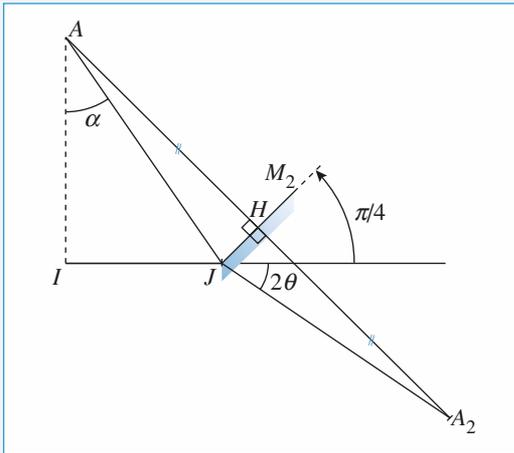
donc $\vec{IA} = \begin{pmatrix} -a \\ d-b+a \end{pmatrix}$.

On en déduit $\vec{OA'} = \begin{pmatrix} -a \\ d+a \end{pmatrix}$,

soit : $\tan \theta = \frac{a}{a+d} \approx 0,04 \text{ rad} \approx 2^\circ 17'$.

2 •





Lorsque M_2 passe en M'_2 par rotation de θ , A_2 passe en A'_2 par rotation de 2θ autour de J dans le plan de figure. Pour que l'image A' vienne sur l'axe OI , il faut que A'_2 soit sur l'axe IJ horizontal, comme sur la figure.

On cherche la position de A , donc la valeur de l'angle α .

On remarque que $\widehat{JAH} = \widehat{JA_2H} = \frac{\pi}{4} - \alpha$.

Dans le triangle JA_2H , la somme des angles donne :

$$\pi = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{4} + 2\theta\right) + \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

car $\widehat{JHA_2} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{HJA_2} = \frac{\pi}{4} + 2\theta$. On en tire : $\alpha = 2\theta$.

Comme $AI = d - b$ et $IJ = a$, il vient :

$$\tan 2\theta = \tan \alpha = \frac{a}{d-b}.$$

Numériquement : $\theta \approx 0,02 \text{ rad} \approx 1^\circ 14'$.

3 • L'angle θ est petit, $\tan 2\theta \approx 2\theta = \frac{a}{d-b}$.

L'erreur sur l'angle 2θ est de $1'$ d'arc.

$$\Delta(2\theta) = \frac{a\Delta d}{(d-b)^2}; \quad 1' = \frac{1}{60} \times \frac{\pi}{180} \text{ rad.}$$

$$\text{D'où :} \quad \Delta d = \frac{(d-b)^2}{a} \Delta(2\theta).$$

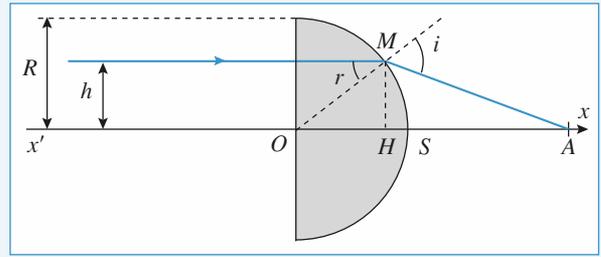
A.N. : $\Delta d = 0,8 \text{ cm}$.

Ce télémètre est d'autant plus précis qu'il est utilisé pour de courtes distances.

6 Lentille demi-boule

Soit M le point où le rayon émerge de la lentille : $OM = R$.

De plus : $\sin i = n \sin r$, avec $\sin r = \frac{h}{R}$.



Dans le triangle rectangle OHM , on a :

$$OM^2 = OH^2 + HM^2, \text{ soit } \overline{OH} = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

Dans le triangle HMA , l'angle en M vaut :

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - r\right) - i = \frac{\pi}{2} + r - i.$$

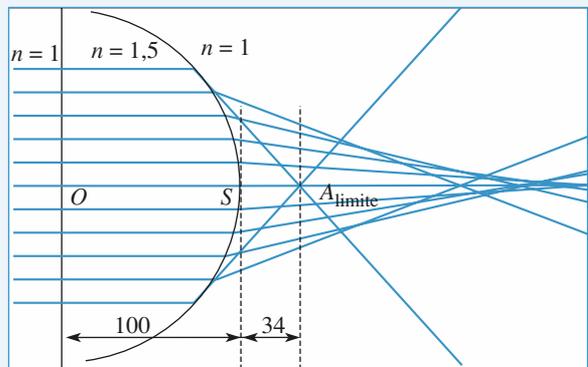
On en déduit $\tan(i - r) = \frac{h}{HA}$

$$\overline{SA} = \overline{SO} + \overline{OH} + \overline{HA} = -R + \sqrt{R^2 - h^2} + \frac{h}{\tan(i - r)}.$$

Le rayon émergent existe si $\sin r \leq \frac{1}{n}$, soit :

$$h \leq \frac{B}{n} = 66,7 \text{ mm.}$$

$n = 1500$			
h (mm)	r (°)	i (°)	\overline{SA}
0	0	0	200
7	4	6	199
13	8	12	196
20	12	17	191
27	15	24	183
33	19	30	174
40	24	37	161
47	28	44	145
53	32	53	124
60	37	64	96
67	42	90	34



Lorsque h est petite devant R , on a un stigmatisme approché. On essaie de donner un ordre de grandeur du h maximal admissible :

$$\sin r \approx r, \sin i \approx i, \tan(i - r) \approx i - r \text{ et } r \approx \frac{h}{R}.$$

$\sin i = n \sin r$ conduit à $i = nr$:

$$\overline{SA} \approx -R + \sqrt{R^2 - h^2} + \frac{h}{i - r}.$$

$$\overline{SA} \approx -R + \sqrt{R^2 - h^2} + \frac{R}{n - 1}.$$

si $h \rightarrow 0$, $\overline{SA} \rightarrow \overline{SF}' = \frac{R}{n - 1}$.

• Avec $n = 1,5$, $\overline{SF}' = 2R = 200$ mm.

Si on accepte une erreur de 5% sur \overline{SF}' , soit $\overline{SA} \geq 190$ mm, il faudra prendre $h \leq 20$ mm.

• Avec $n = 1,6$, $\overline{SF}' = \frac{R}{0,6} = 167$ mm. Le calcul montre que

pour la même erreur, il faudra prendre $h \leq 25$ mm.

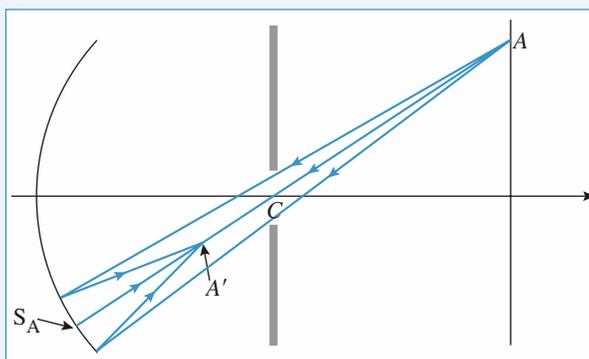
On remarque que h_{\max} dépend de R et de l'indice optique, donc de la longueur d'onde.

7 Stigmatisme du miroir sphérique

1 • Les rayons issus de A ne se coupent pas en un endroit précis, et nous ne pouvons pas définir une image A' du point A . En utilisant des rayons trop inclinés, nous n'avons pas de stigmatisme réalisé par le miroir sphérique.

2 • Lorsque le faisceau est diaphragmé au voisinage de C , les rayons utilisés constituent un pinceau de faible ouverture. Nous constatons qu'ils se coupent en un point A' assez bien défini : le stigmatisme, approché, est réalisé, malgré une inclinaison assez importante du pinceau lumineux par rapport à l'axe du miroir.

Nous pouvons le comprendre en envisageant l'axe $S_A C A$, obtenu par rotation d'angle θ autour du point C , dans le plan de figure. Le faisceau de rayons lumineux issus de A , diaphragmé, permet de se retrouver dans le cas d'un miroir sphérique effectif de centre C , d'axe $S_A C A$, utilisé dans les conditions de Gauss pour former l'image A' de A . D'où le stigmatisme observé sur la simulation...



3 • Nous pouvons alors construire le point A' en utilisant la relation de conjugaison du miroir d'axe $S_A C A$, avec origine

au centre : $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS_A} = \frac{2}{R}$.

$$\text{Or } \overline{CA} = \frac{d}{\cos \theta}, \text{ donc : } \overline{CA'} = \frac{-\frac{R}{2}}{1 + \frac{R}{2d} \cos \theta}.$$

Nous reconnaissons l'équation, en coordonnées polaires d'origine C qui constitue l'un de ses foyers, d'une conique d'excentricité $e = \frac{R}{2d}$ (ellipsoïde si $e < 1$, paraboloides si $e > 1$).

Les images A' sont réparties sur cette surface, qui n'est pas un plan de front perpendiculaire à l'axe optique : le système réalisé est stigmatique (stigmatisme approché), mais pas aplanétique.

4 • La surface précédente est plane si son excentricité devient infinie, donc, à R donné, lorsque d tend vers zéro. Cela signifie que le miroir sphérique réalise un stigmatisme et un aplanétisme approchés, au voisinage de son centre, même en dehors des conditions de Gauss.

3

Miroirs et lentilles

LES OBJECTIFS

- Mettre en œuvre le stigmatisme des miroirs et lentilles dans les conditions de Gauss, et étudier quelques associations.

LES PRÉREQUIS

- Constructions, conjugaison, grandissement des lentilles et miroirs utilisés dans les conditions de Gauss.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- À peu près rien, comme d'habitude.

ESSENTIEL

« Constructions graphiques

Les conditions de Gauss assurant stigmatisme et aplanétisme approchés, une construction d'image à l'aide de deux traits lumineux permet une étude rapide des systèmes centrés.

Il est utile de mettre à profit les propriétés très simples de quelques points remarquables du système optique.

Les représentations simplifiées des miroirs et dioptrés sphériques par leurs plans tangents sur l'axe optique sont effectuées sur des schémas où les dimensions transverses sont dilatées.

Sur les schémas, les axes sont orientés : les positions et tailles des objets sont repérées par des valeurs algébriques.

« Conjugaison et grandissement

Le stigmatisme est traduit par une relation de conjugaison liant les abscisses des points A et A' conjugués sur l'axe par le système.

La linéarité entre la taille de l'objet et celle de l'image est traduite par le *grandissement transverse*

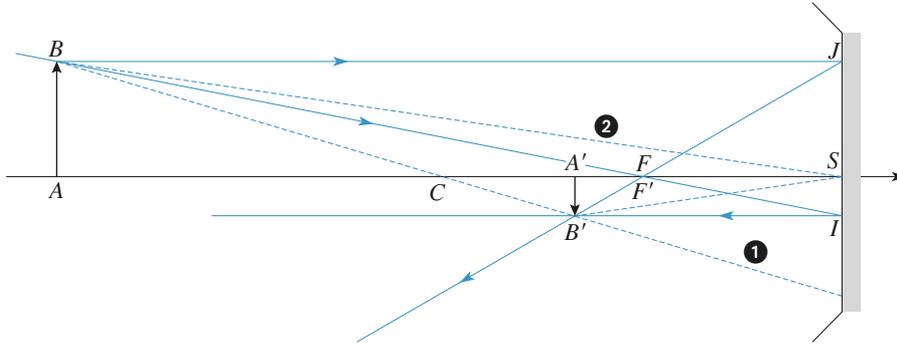
$\gamma = \frac{A'B'}{AB}$. C'est une grandeur algébrique, qui dépend de la position de l'objet et des caractéristiques du système centré.

◀ Miroirs sphériques

Le miroir est défini par son centre C et son sommet S . On note $R = \overline{SC}$ son rayon de courbure, positif pour un miroir convexe (divergent), négatif pour un miroir concave (convergent).

Les foyers du miroir sont confondus : $F = F'$, et au milieu du segment CS : $f = \overline{SF} = \overline{FC} = \frac{R}{2}$.

La distance focale du miroir est : $f = \overline{SF} = \frac{R}{2}$, sa vergence est : $V = \frac{1}{f}$, exprimée en dioptries.



Construction de l'image formée par un miroir sphérique.

La construction de base permet de retrouver rapidement les relations de conjugaison de Newton :

$\overline{FA} \cdot \overline{FA'} = \overline{FS}^2 = \frac{R^2}{4}$, ou Descartes : $\frac{1}{CA} + \frac{1}{CA'} = \frac{2}{CS}$ ou $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC}$, ainsi que les

expressions du grandissement transverse $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SF}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{SF}}$.

En particulier : C est son propre conjugué, et $\gamma_c = -1$; S est son propre conjugué, et $\gamma_s = +1$.

◀ Lentilles minces sphériques

La lentille mince sphérique a les mêmes effets sur lumière lorsqu'on la retourne face pour face.

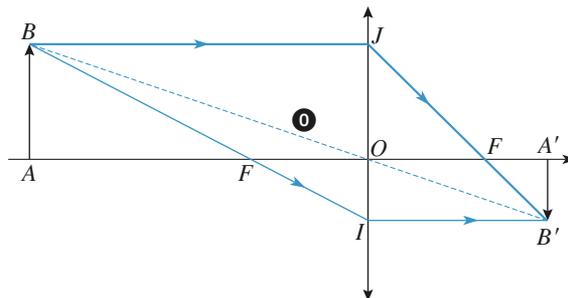
Les foyers objet F et image F' , sur l'axe optique, sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre O de la lentille.

La lentille est définie par son centre O et sa focale.

La focale d'une lentille est $f' = \overline{OF'} = -\overline{OF} = -f$ (ou sa vergence $V = \frac{1}{f'}$).

Les lentilles minces sphériques à bords minces sont convergentes, leurs foyers objet et image sont réels. Celles à bords épais sont divergentes et leurs foyers sont virtuels.

Un rayon passant par O n'est pas modifié par la traversée de lentille.



Construction de l'image formée par une lentille mince.

La construction permet de retrouver rapidement les relations de conjugaison de Newton :

$$\overline{FAF'A'} = \overline{OFOF'} = ff' = -f'^2, \text{ ou Descartes : } \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} \text{ ou } \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = V, \text{ ainsi}$$

$$\text{que les expressions du grandissement transverse } \gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = \frac{p'}{p} = \frac{FO}{FA} = \frac{F'O}{F'A'}.$$

En particulier : le « plan » de la lentille, contenant O , est son propre conjugué, et $\gamma_0 = +1$.

Associations de systèmes centrés

Les éléments associés sur un même axe optique dans un système composé réalisant un stigmatisme et un aplanétisme au moins approchés, ces propriétés se retrouvent dans l'instrument global.

Les constructions et relations de conjugaison peuvent être utilisées de proche en proche dans le système composé. Le grandissement obtenu est le produit des grandissements successifs.

En général, une association de deux lentilles (ou plus) n'est pas assimilable à une unique lentille équivalente. Mais lorsque deux lentilles sont accolées, elles forment un système équivalent à une seule lentille, de même centre, et de vergence obtenue par addition des deux vergences (théorème des vergences).

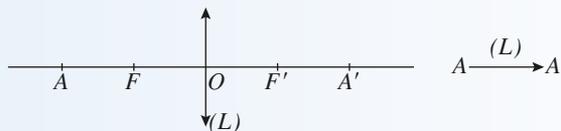
Deux lentilles minces accolées forment un système équivalent à une lentille mince.

Un système catadioptrique composé peut se ramener à un miroir « équivalent ».

Conseils et pièges à éviter

- Toujours prendre des rayons de propriété connue (passage par F , O , C , S , ... parallèle à l'axe, ...) pour faire des constructions d'image.
- Deux rayons suffisent, mais un troisième permet de vérifier une construction.
- Attention au sens de la lumière pour écrire les relations de conjugaison de Descartes.

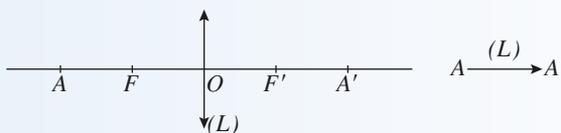
① sens de la lumière \rightarrow



$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{OF'} = -\frac{1}{OF}$$

②

sens de la lumière \leftarrow



$$\frac{1}{OA} - \frac{1}{OA'} = \frac{1}{OF'} = -\frac{1}{OF}$$

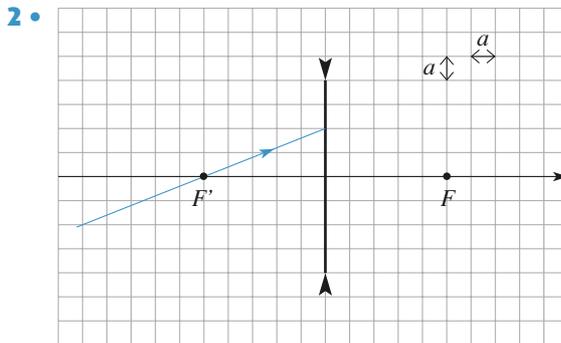
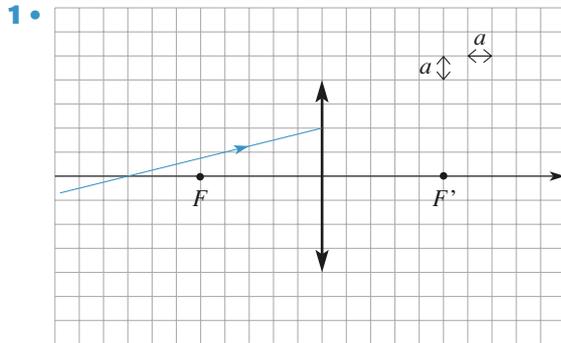
En invoquant le retour inverse de la lumière, on retrouve bien que A' a pour image A .

Dans les situations précédentes, les relations de Newton s'écrivent :

- cas ① $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f^2$
 ② $\overline{FA'} \cdot \overline{F'A} = -f^2$.

1 Traversée d'une lentille

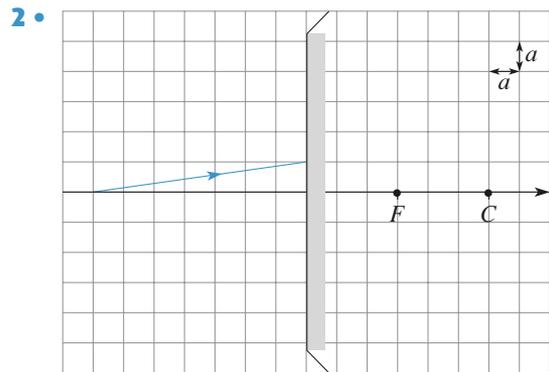
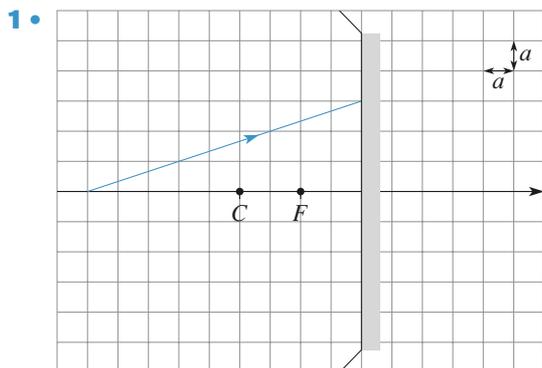
Déterminer, par une construction géométrique, le rayon émergent issu du rayon incident représenté, dans les deux cas ci-dessous :



Conseils Trois rayons ont un comportement évident... Le rayon passant par O n'est pas dévié, le rayon passant par F sort parallèle à l'axe, le rayon parallèle à l'axe sort par F' . Il s'agit d'en mettre au moins un à profit.

2 Réflexion sur un miroir

Déterminer, par une construction géométrique, le rayon après réflexion sur le miroir dans les deux cas suivants :

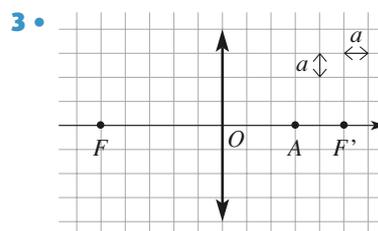
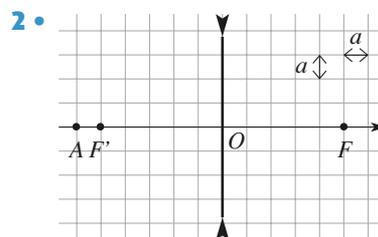
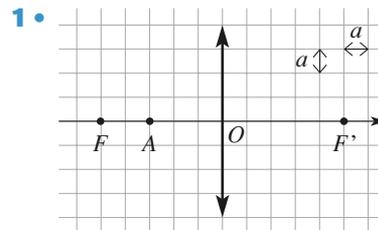


Conseils

Pour réaliser ce type de construction, il faut utiliser les propriétés du plan focal et du centre du miroir. On rappelle que tout faisceau incident de rayons parallèles converge vers un point du plan focal après réflexion. Comment détermine-t-on ce point ? De même, tous les rayons passant par un point du plan focal sont réfléchis en formant un faisceau parallèle. Comment obtient-on la direction de ce faisceau ?

3 Construction d'une image

Déterminer, par une construction géométrique, la position de l'image A' d'un point objet A , dans les cas suivants :



On vérifiera le résultat au moyen des relations de conjugaison de Descartes et de Newton.

On précisera la nature (réelle ou virtuelle) de l'objet et de l'image.

Conseils

Pour construire l'image d'un objet appartenant à l'axe optique, on utilise la propriété d'*aplanétisme*. Soit B un point objet tel que AB soit normal à l'axe, et B' son image. Où se situe l'image A' de A ?

Pour construire l'image B' de B , on utilise les rayons remarquables. Rappeler la construction du rayon émergent lorsque le rayon incident :

- passe par le centre optique ;
- passe par le foyer objet ;
- est parallèle à l'axe optique.

Combien y-a-t-il de rayons remarquables nécessaires pour construire l'image B' ?

4 Objet virtuel

Construire l'image $A'B'$ d'un objet virtuel AB , perpendiculaire à l'axe optique, par un miroir :

a) concave ; b) convexe.

Conseils

Il faut se rappeler la construction du rayon réfléchi lorsque le rayon incident passe par S , F ou C .

Combien de rayons remarquables sont nécessaires ?

5 Concentration du flux solaire

Sur son île déserte, un naufragé dépourvu d'allumettes tente d'allumer un feu avec une loupe trouvée dans les débris du navire. Celle-ci est une lentille convergente de diamètre $D = 2$ cm et de distance focale image $f' = 10$ cm.

Vu de la surface terrestre, le Soleil a un diamètre angulaire α de l'ordre de 10^{-2} rad, et envoie par rayonnement sur une surface S une puissance (ou **flux**) $\mathcal{P} = \mathcal{D}_0 S \varphi_0$, *flux surfacique* solaire, de l'ordre de $1 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$.

Le naufragé fait l'image du Soleil sur une feuille sèche et il attend qu'elle s'enflamme.

- Quel est le diamètre d de l'image du Soleil par la lentille ?
- Quelle est la valeur φ du flux surfacique au niveau de cette image ?
- On admet que, lorsque l'équilibre thermique est atteint et en dehors de toute conduction thermique, la température absolue T d'un corps absorbant soumis à un rayonnement caractérisé par un flux surfacique φ est donnée par la loi de Stefan :

$$\varphi = \sigma T^4 \text{ avec } \sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}.$$

Déterminer l'ordre de grandeur de la température atteinte au niveau de l'image du Soleil. Discuter la vraisemblance du résultat.

Conseils

Le Soleil étant à l'infini, dans quel plan se trouve son image ?

À chaque direction de rayons solaires correspond un point du plan focal image. Comment construire simplement ce point ?

L'image du Soleil reçoit tous les rayons incidents sur la lentille, donc toute la puissance qui traverse la lentille.

6 Plans conjugués

Un objet lumineux AB et un écran sont normaux à l'axe optique d'une lentille mince convergente de distance focale image f' . La distance de l'objet à l'écran est égale à d .

1 • À quelle distance de l'écran doit-on placer la lentille pour faire une image nette de l'objet AB sur l'écran ? Ce problème a-t-il toujours une solution ?

2 • Déterminer le grandissement pour chacune des deux solutions quand elles existent.

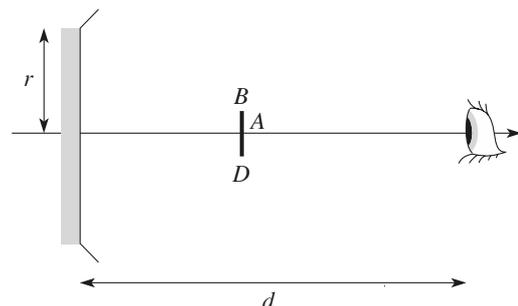
Conseils

Il s'agit ici d'exprimer que le point A' (intersection de l'écran et de l'axe optique) est conjugué du point A . On dispose pour cela de deux relations de conjugaison équivalentes, celle de Descartes et celle de Newton.

Pour le calcul du grandissement γ , il faut faire un schéma représentant l'objet, l'image, la lentille et un rayon remarquable reliant l'objet B à son image B' ; l'expression de γ se trouve alors simplement en considérant des triangles homothétiques.

7 Observation d'un miroir éclairé

Une source, modélisée par un disque lumineux de centre A et de diamètre $BD = 2$ cm, est placée devant un miroir sphérique concave de rayon de courbure $R = 30$ cm, de rayon d'ouverture $r = 6$ cm, de centre C , de sommet S et de foyer F .



- La source est placée au milieu de FC . Construire, puis préciser la position et la taille de l'image de la source donnée par le miroir sphérique.
- Un observateur, dont l'œil est placé sur l'axe optique à distance d du miroir, regarde celui-ci. Comment le disque argenté du miroir apparaît-il éclairé ?
- Reprendre cette étude dans le cas où la source est placée au milieu de SF .
- Que deviennent ces résultats lorsque la source est dans le plan focal du miroir ?

Conseils

Utiliser les propriétés du foyer et du centre d'un miroir sphérique.

Pour qu'un point du miroir paraisse éclairé, il faut qu'un rayon partant de la source et réfléchi en ce point parvienne à l'œil.

8 Profondeur de champ d'un objectif photographique

L'objectif d'un appareil photographique à mise au point fixe est constitué d'une seule lentille, de distance focale $f' = 50$ mm, limitée par une monture de rayon R . Son nombre d'ouverture, également fixe, est :

$$N = \frac{f'}{2R} = 11.$$

La position de la pellicule est telle que l'image d'un objet, de hauteur $h = 2$ m et situé à une distance d_0 du foyer objet, soit nette et longue de $h' = 35$ mm.

- Déterminer la valeur de d_0 ainsi que la distance d'_0 entre la pellicule et le foyer image.
- Un objet ponctuel est situé sur l'axe optique, à une distance d (différente de d_0) du foyer objet. Déterminer le rayon r de la tache image obtenue sur la pellicule. On supposera que d reste grand devant f' .
- On considère que la netteté de l'image est acceptable si, après un agrandissement de rapport 25, le rayon de la tache image d'un objet ponctuel n'excède pas 1 mm. L'image d'un objet à l'infini est-elle « nette » ? Déterminer la profondeur de champ, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de d pour lesquelles l'image est considérée comme nette.

Conseils

Les points sont repérés par leurs distances aux foyers. Quels rayons remarquables faut-il tracer pour construire l'image ?

La relation entre le grandissement et la position des points conjugués se détermine comme toujours en considérant des triangles homothétiques.

Quelle relation de conjugaison (Descartes ou Newton) faut-il utiliser ?

Pour déterminer le rayon de la tache image, on construit le faisceau qui converge vers l'image du point objet ; l'intersection de ce faisceau avec la pellicule détermine la tache image.

9 Rétroviseur

Un rétroviseur de véhicule est assimilé à un miroir sphérique de rayon de courbure R .

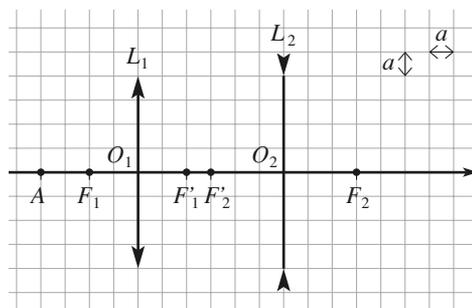
- Un objet situé à 20 m apparaît par réflexion avec une taille 5 fois plus petite que l'original. Préciser les caractéristiques du miroir.
- Le conducteur est à 1 m du rétroviseur. Quelle taille faut-il donner au miroir pour percevoir, à une distance de 100 m, un champ de largeur 30 m ? Ces conditions d'utilisation semblent-elles bien compatibles avec l'approximation de Gauss ?

Conseil

Comment perçoit-on un objet éloigné par réflexion sur un miroir concave ou convexe ? Quel est le trajet associé à un rayon réfléchi au bord du miroir ?

10 Doublet

- Déterminer, par une construction géométrique, la position de l'image A' de l'objet A à travers le système de deux lentilles L_1 et L_2 . On précisera la position de l'image intermédiaire A_1 (image de A par L_1) ainsi que sa nature (réelle ou virtuelle).



- Vérifier le résultat en utilisant les relations de conjugaison.
- Tracer un faisceau de rayons issu de A .

Conseils

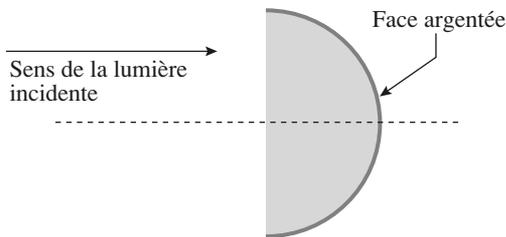
Pour une association de lentilles, on détermine les images successives de A :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

Pour déterminer A_1 à partir de A , puis pour déterminer A' à partir de A_1 , on utilise les méthodes de construction et formules de conjugaison usuelles.

11 Lentille demi-boule à face argentée

Déterminer les caractéristiques du miroir équivalent, dans l'approximation de Gauss, à une lentille demi-boule dont la face bombée a été rendue réfléchissante.



Conseils

Pour ce système catadioptrique, il faut rechercher le centre et le sommet du miroir équivalent, dans les conditions de Gauss.

Revoir l'Essentiel si besoin. Attention, la lentille demi-boule n'est pas une lentille mince !

12 Association de miroirs

Par définition, un miroir sphérique est constitué par une surface réfléchissante en forme de calotte sphérique. L'axe de symétrie de cette calotte est appelé axe optique principal. Cet axe passe par le centre C du miroir et « perce » celui-ci en son sommet S .

On donne la relation de conjugaison entre un point objet A et son image A' sur l'axe principal, pour un miroir sphérique de sommet S et de centre C , suivant les conditions de Gauss :

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SA} = \frac{2}{SC}$$

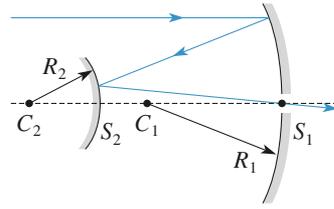
1 • a) En déduire les distances focales objet \overline{SF} et image $\overline{SF'}$ d'un tel miroir sphérique.

b) Faire les schémas de miroirs concaves et convexes avec leurs foyers.

c) Un miroir concave est-il convergent ou divergent ? Et un miroir convexe ? Faire les schémas correspondants.

2 • On réalise un système optique constitué par l'association de deux miroirs sphériques M_1 (concave, sommet

S_1 , centre C_1) et M_2 (convexe, sommet S_2 , centre C_2) de même axe optique principal, disposés comme sur la figure ci dessous.



Le miroir M_1 est percé en son sommet S_1 d'un petit trou permettant à la lumière de passer, mais ne modifiant pas ses propriétés.

Les distances focales f_1 et f_2 des deux miroirs M_1 et M_2 sont telles que $|f_1| = 3,0$ m et $|f_2| = 2,0$ m.

a) On note $d = S_2S_1$.

Déterminer d pour que tout rayon incident parallèle à l'axe optique et réfléchi par les deux miroirs passe par S_1 . Vérifier le calcul par un graphique à l'échelle de 2 cm pour 1 m. Dans la suite, on conservera cette valeur de d .

b) Déterminer la position des foyers F et F' de ce système optique.

c) Vérifier graphiquement que ce système optique est équivalent à une lentille mince dont on donnera les caractéristiques.

d) Quel(s) avantage(s) ou inconvénient(s) possède(nt) ce montage par rapport à la lentille équivalente ?

Conseils

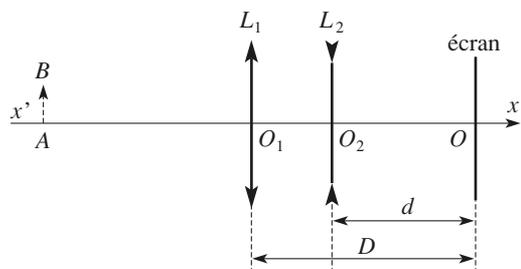
Relire l'Essentiel. Quelle est la définition d'un foyer ?

Utiliser le tracé des rayons lumineux pour résoudre la deuxième question.

13 Mise au point

Sur le schéma, la distance D est fixe ; le réglage du système est réalisé en jouant sur la distance d .

Données : $f_1' = 4$ cm et $f_2' = -6$ cm.



1 • Mise au point à l'infini

a) Le système est réglé de façon à ce que les objets à l'infini donnent une image nette sur l'écran. Quel est nécessairement le signe de $D - f_1'$ pour que ceci soit possible ?

- b) Lorsque cette condition est réalisée, quelle est la valeur de d , notée d_∞ , correspondant à ce réglage ?
 c) Faire un schéma du système et construire l'image d'un objet AB à l'infini vu sous l'angle α , pour $D = 5$ cm .
 d) Calculer la taille de l'image en fonction de α .

2 • Modification du système

- a) Lorsque l'on veut mettre au point sur un objet à distance finie, dans quel sens faut-il déplacer la lentille divergente ?
 b) On souhaite réaliser un système tel que d_∞ corresponde à la valeur D . Calculer la nouvelle longueur de D à donner au système. Interpréter cette valeur.

3 • Latitude de mise au point

- a) Dans le cas précédent, indiquer la profondeur de mise au point du système, c'est-à-dire le domaine des positions de l'objet AB susceptibles de donner une image nette sur l'écran lorsque l'on donne à d une valeur adaptée.
 b) Faire une construction soignée à l'échelle 1/2 permettant de déterminer la position de A .
 Retrouver le résultat par le calcul.

Donnée : $d = 6$ cm .

Conseils

Soit A_1B_1 l'image de AB par L_1 , et $A'B'$ l'image finale par L_2 . Comment sont placés les points O_2 , A_1 et A' sur l'axe ?

Quelle est donc la valeur minimale de D ?

Pour calculer d_∞ , il suffit d'écrire que F'_1 et O sont conjugués par L_2 .

Quand l'objet est à distance finie, où se trouve son image par L_1 , avant ou après F'_1 ? Quand on approche une lentille divergente d'un objet virtuel, l'image, quand elle est réelle, s'approche-t-elle ou s'écarte-t-elle de l'objet ?

14 Doublet achromatique

L'indice d'un verre dépend de la longueur d'onde de la lumière. Pour caractériser sa dispersion, on utilise trois raies spectrales de référence :

- raie D : 589 nm ; raie F : 486 nm (bleu) ;
- raie C : 656 nm (rouge) .

Sa *constringence* est alors définie par :

$$v = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} \quad (v > 0).$$

De plus, la vergence V d'une lentille mince est proportionnelle à $(n - 1)$:

$V = (n - 1)A$, où A est un facteur géométrique qui dépend de la courbure des dioptries.

- 1 • Deux lentilles minces, de vergences V_1 et V_2 sont accolées : elles ont même axe, et on considère que les centres

optiques sont confondus. Montrer que ce *doublet* est équivalent à une lentille unique dont on calculera la vergence.

- 2 • Une lentille, de distance focale image $f'_D = 150$ mm pour la raie D, est taillée dans un verre de constringence $v = 40$.

Déterminer l'écart entre les distances focales f'_F et f'_C . Quelle est la conséquence pratique de cette dispersion ?

- 3 • On accole deux lentilles, de vergences moyennes (vergence pour la raie D) égales à V_1 et V_2 , taillées dans deux verres de constringences v_1 et v_2 .

a) À quelle condition les distances focales f'_F et f'_C sont-elles confondues pour le doublet ?

b) Ce doublet est-il rigoureusement achromatique ? (Autrement dit, f' est-elle rigoureusement indépendante de la longueur d'onde ?)

c) Application

On veut construire un doublet approximativement achromatique de focale $f' = 500$ mm avec un *flint* pour lequel $v_1 = 30$ et un *crown* pour lequel $v_2 = 60$.

Calculer les focales des deux lentilles accolées.

Conseils

Pour étudier un système de deux lentilles L_1 et L_2 , il faut considérer une image intermédiaire.

Si A est un point quelconque de l'axe, alors :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A'$$

La position de A_1 puis celle de A' sont déterminées par les relations de conjugaison.

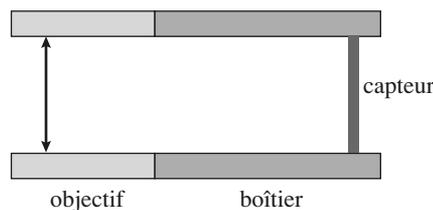
Un système optique (ici le doublet) est assimilable à une lentille mince si la relation de conjugaison qui relie les positions de deux points conjugués peut s'identifier à celle d'une lentille mince.

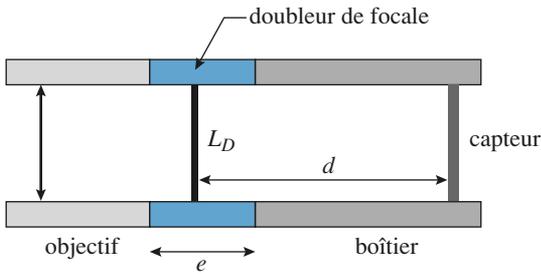
En général, un système de plusieurs lentilles n'est pas équivalent à une lentille mince unique.

Quelle relation de conjugaison (Descartes ou Newton) est ici la plus appropriée ?

Quelle est la signification du signe de la vergence d'une lentille ?

15 Doubleur de focale





Un appareil photographique est modélisé par une focale $f'_1 = 60 \text{ mm}$ qui peut être déplacée par rapport à un plan de mise au point dans lequel est placé le capteur d'image : la distance d est ajustable.

1 • L'objet photographié est loin (à 200 m), et mesure 20 m. Quelle est la taille de l'image sur le capteur ? Quelle focale faudrait-il employer pour doubler cette taille ? Commenter.

2 • On envisage de réaliser ce doublement à l'aide d'un dispositif « doubleur de focale », d'épaisseur e contenant une lentille mince divergente de focale f'_2 .

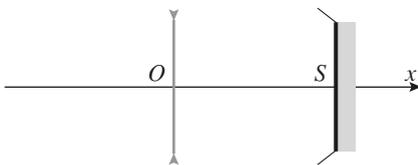
Le réglage de la première lentille étant inchangé, déterminer e et f'_2 permettant de réaliser cet agrandissement d'image. Que penser de l'encombrement de l'appareil ?

3 • Que deviennent les résultats précédents si l'objet photographié est à distance finie ?

16 Une association lentille-miroir

On considère un système catadioptrique constitué par une lentille divergente de focale image f' et centre O , placée devant un miroir concave de rayon R et sommet S , à distance $OS = -f'$.

Pour les constructions et calculs, on prendra $f' = -2R$.



1 • On repère un point A de l'axe optique, et son image A' par ce système catadioptrique, par les abscisses $x = OA$ et $x' = OA'$. Établir la relation de conjugaison :

$$6xx' - 5xR - 5x'R + 4R^2 = 0.$$

2 • Justifier qualitativement, constructions graphiques à l'appui, l'équivalence du système, en termes de position des objets et images, à un miroir sphérique de sommet Σ et centre Ω .

3 • Vérifier la qualité des constructions effectuées en calculant les positions de Σ et Ω .

4 • Retrouver la relation de conjugaison en utilisant les caractéristiques du miroir équivalent.

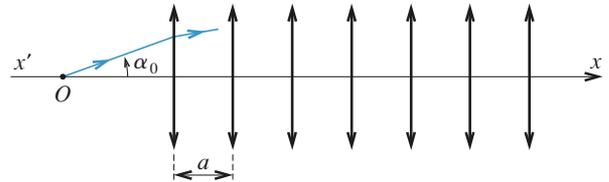
Conseils

Utiliser les constructions usuelles et les formules de conjugaison des miroirs et lentilles. Attention au sens de parcours de la lumière, qui traverse la lentille deux fois, mais dans des directions opposées !

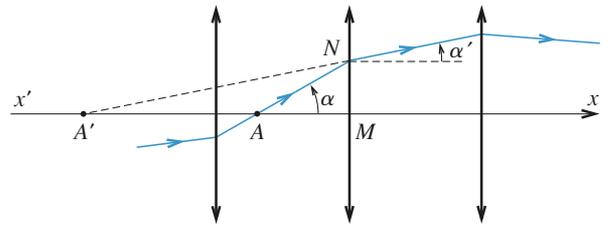
Revoir si besoin les rappels de cours pour la détermination du miroir équivalent.

17 Équation d'un rayon lumineux dans un système de lentilles

Un rayon lumineux traverse un système de N lentilles minces, identiques, convergentes, de convergence $C = \frac{1}{f'}$, parallèles et régulièrement espacées d'une distance a sur le même axe optique (Ox)



1 • Considérons l'une des ces lentilles. Le rayon lumineux y arrive avec une incidence α , en un point N d'ordonnée y ; il en ressort avec une inclinaison α' . Déterminer une relation entre α , α' , y et C .



2 • On suppose que les lentilles sont suffisamment proches l'une de l'autre ($a \ll f'$) pour pouvoir assimiler le rayon lumineux à une courbe d'équation $y = y(x)$ dont la dérivée est continue.

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction $y(x)$.

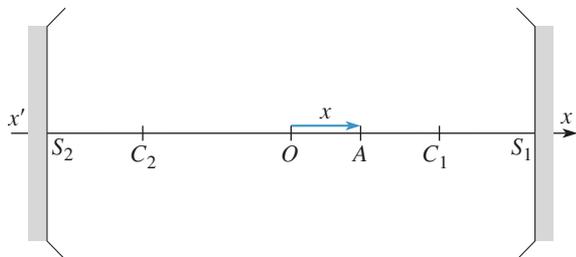
b) Résoudre cette équation en supposant que le rayon passe par O avec une incidence α_0 .

Conseil

On utilise la relation de conjugaison de Descartes pour une lentille, puis on passe à un modèle continu en écrivant que $a = dx$.

18 Cavité formée par deux miroirs confocaux

On se propose d'étudier, dans le cadre de l'approximation de Gauss, deux miroirs sphériques dont les faces réfléchissantes sont en regard, distantes de D , ont le même axe (Ox) et le même rayon R .



1 • Un point objet A sur l'axe est repéré par son abscisse $x = OA$.

- a) Quelle est la relation liant x , R et D qui assure que A est sa propre image après réflexion sur un miroir puis l'autre ?
 b) Discuter les solutions correspondantes, en précisant la forme des miroirs (concaves, convexes) et la distance D devant les séparer. Quelle particularité distingue le cas d'une cavité confocale ($F_1 = F_2$) ?

2 • On suppose désormais les miroirs sphériques confocaux $F_1 = F_2$, noté F .

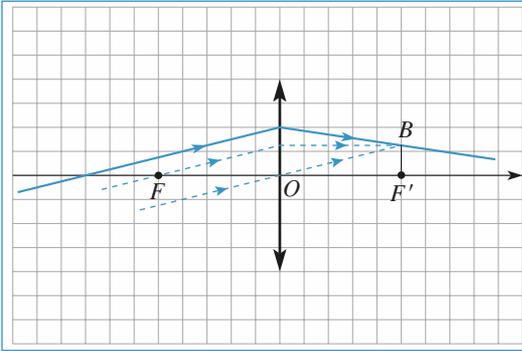
- a) Décrire l'évolution dans la cavité d'un rayon incident parallèle à l'axe, puis d'un rayon passant par F .
 b) Pour un objet A_1B_1 situé dans un plan de front, A_1 étant sur l'axe, préciser son image après $2N$ réflexions dans la cavité, ainsi que le grandissement correspondant.

Conseils

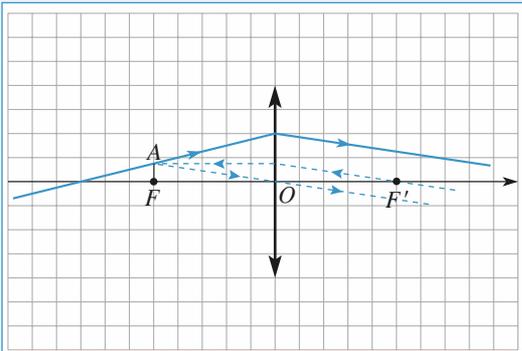
- 1) Il est préférable ici d'utiliser la relation de conjugaison de Newton.
- 2) Un schéma clair permet une discussion efficace, ce qui est souvent le cas en optique géométrique...

1 Traversée d'une lentille

1 • *Première méthode* : on utilise des rayons « évidents » parallèles à celui étudié. Ils sortent tous par le même point B du plan focal image.

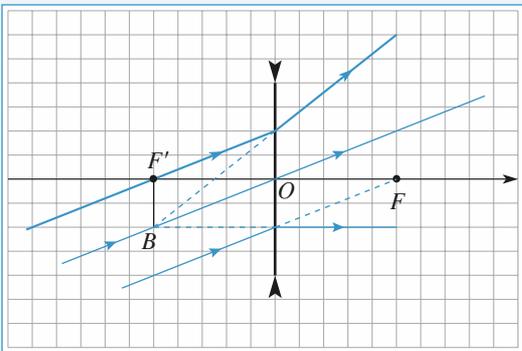


Deuxième méthode : on utilise des rayons « évidents » qui passent par le même point A du plan focal objet, et qui sortent tous parallèles à celui recherché.

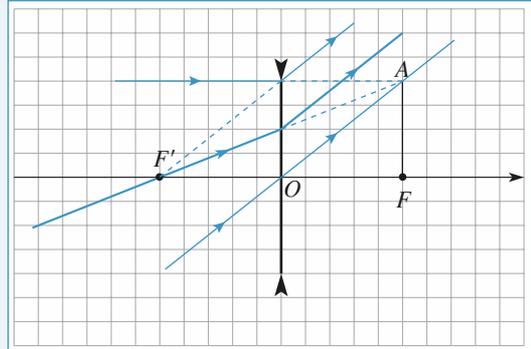


2 • On utilise le même principe, F et F' étant ici virtuels.

Méthode 1 :



Méthode 2 :



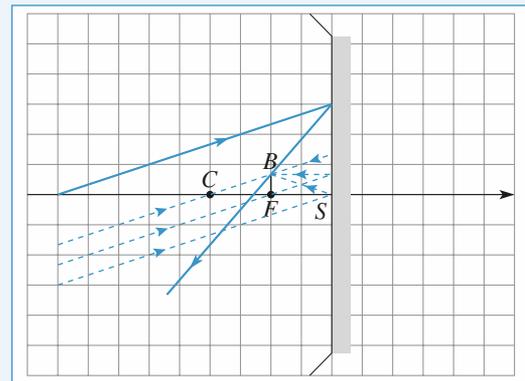
2 Réflexion sur un miroir

1 • Certains rayons ont un comportement évident à représenter :

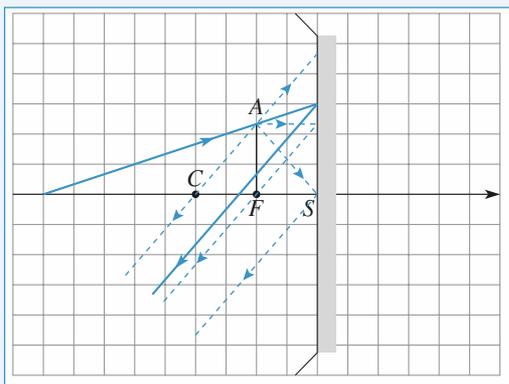
- un rayon passant par C revient sur lui-même ;
- un rayon réfléchi en S revient symétriquement par rapport à l'axe ;
- un rayon passant par F revient parallèle à l'axe ;
- un rayon parallèle à l'axe revient en passant par F .

Il suffit donc d'utiliser au moins l'un de ces rayons pour effectuer la construction.

Première méthode : Prendre au moins un rayon « évident » parallèle à celui étudié. Après réflexion, tous passent par le même point B du plan focal.

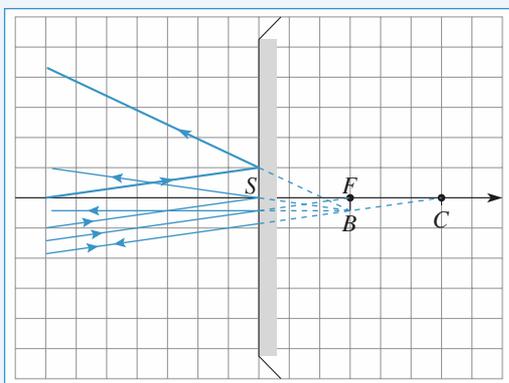


Deuxième méthode : Prendre au moins un rayon « évident » passant par le même point A du plan focal objet. Après réflexion, tous reviennent dans la même direction.

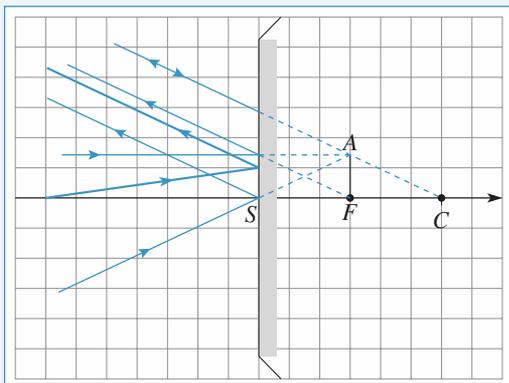


2 • C'est exactement le même principe, avec C et F virtuels.

Première méthode :



Deuxième méthode :

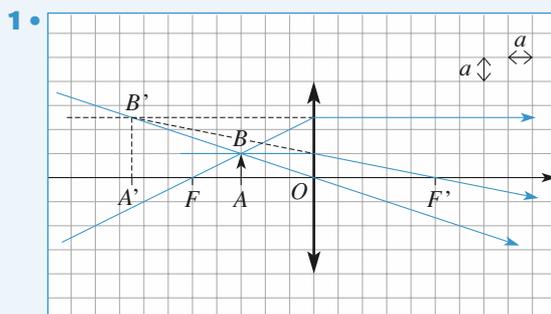


3 Construction d'une image

Pour construire l'image d'un point A de l'axe optique, on prend un point objet B tel que AB est normal à l'axe. On trace au moins deux rayons remarquables issus de B et passant respectivement par le foyer objet, par le centre optique et par le foyer image.

L'intersection de ces rayons définit l'image B' de B .

En raison de la propriété d'*aplanétisme*, l'image A' de A est déterminée par la projection orthogonale de B' sur l'axe.



$\overline{OA} = -3a$, $f' = 5a$. D'après la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{5a} - \frac{1}{3a}, \text{ d'où } \overline{OA'} = -7,5a.$$

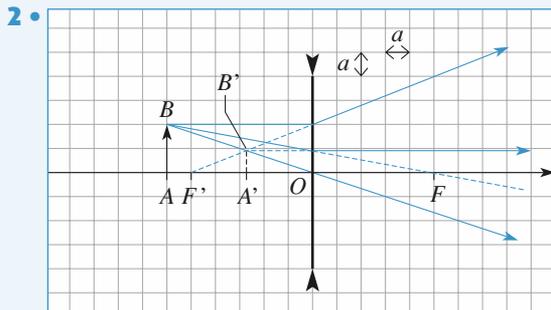
$\overline{FA} = 2a$. D'après la relation de Newton :

$$\overline{F'A'} = -\frac{25a^2}{2a}, \text{ d'où } \overline{F'A'} = -12,5a.$$

On retrouve bien :

$$\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = -7,5a.$$

A' est l'image virtuelle de l'objet réel A .



$\overline{OA} = -6a$, $f' = -5a$. D'après la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = -\frac{1}{5a} - \frac{1}{6a}, \text{ d'où } \overline{OA'} = -2,73a.$$

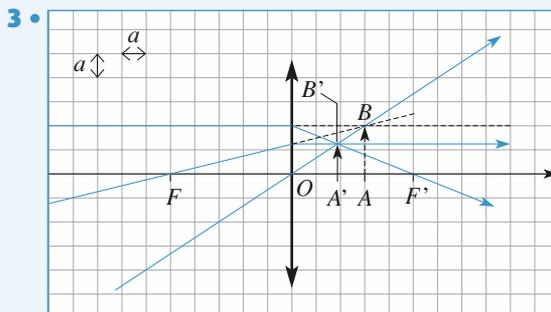
$\overline{FA} = -11a$. D'après la relation de Newton :

$$\overline{F'A'} = -\frac{25a^2}{-11a}, \text{ d'où } \overline{F'A'} = 2,27a.$$

On retrouve bien :

$$\overline{OA'} = \overline{OF'} + \overline{F'A'} = -2,73a.$$

A' est l'image virtuelle de l'objet réel A .



$\overline{OA} = 3a$, $f' = 5a$. D'après la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{5a} + \frac{1}{3a}, \text{ d'où } \overline{OA'} = 1,87 a.$$

$\overline{FA} = 8a$. D'après la relation de Newton :

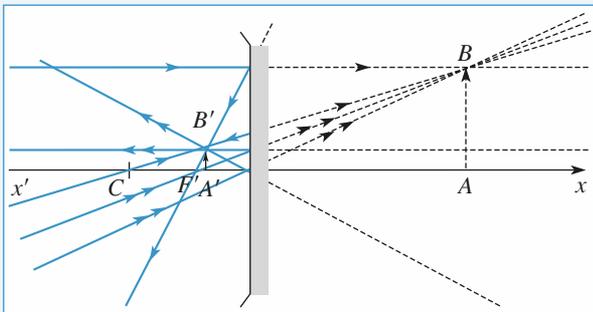
$$\overline{F'A'} = -\frac{25a^2}{8a}, \text{ d'où } \overline{F'A'} = -3,13 a.$$

On retrouve bien à nouveau OA' .

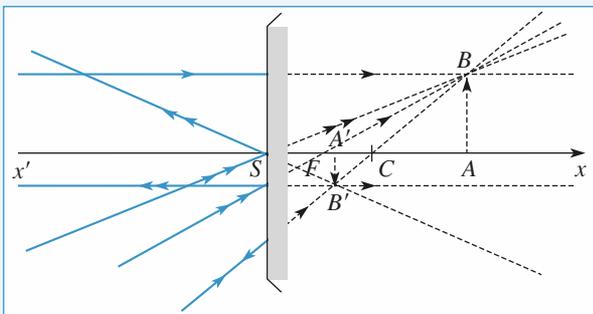
A' est l'image *réelle* de l'objet *virtuel* A : en effet, A et B ne sont pas définis par une intersection de rayons ; ce sont les points vers lesquels convergeraient les rayons d'un faisceau incident si celui-ci n'était pas intercepté par la lentille.

4 Objet virtuel

a) AB virtuel, $A'B'$ réel.



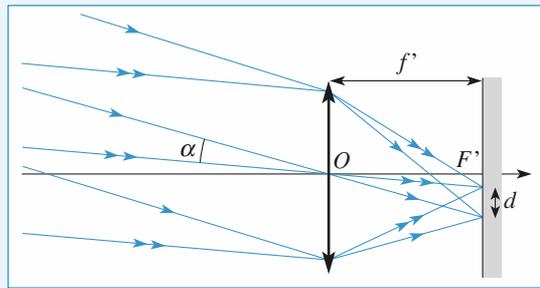
b) AB et $A'B'$ virtuels.



5 Concentration du flux solaire

1 • Il suffit de construire les rayons lumineux émis par deux points du Soleil diamétralement opposés. À chaque *direction* de rayons solaires correspond un point du plan focal image déterminé par le rayon non dévié qui passe par le centre optique O .

Avec l'approximation de Gauss, les images des deux extrémités d'un diamètre sont distantes de $d = f'\alpha$.



On obtient $d = 1 \text{ mm}$.

2 • Sur la tache, de diamètre 1 mm, se trouve concentrée toute l'énergie lumineuse entrant par la lentille.

La puissance lumineuse entrant dans la lentille s'exprime par :

$$\mathcal{P} = \varphi_0 \frac{\pi D^2}{4}.$$

La puissance lumineuse sur l'image s'exprime par :

$$\mathcal{P} = \varphi \frac{\pi d^2}{4}.$$

Ces deux puissances sont égales, et donc :

$$\varphi = \varphi_0 \left(\frac{D}{d}\right)^2, \text{ soit } \varphi = 400 \varphi_0 = 400 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}.$$

3 • D'après la loi de Stefan $T = \left(\frac{\varphi}{\sigma}\right)^{1/4}$,

soit $T \approx 1600 \text{ K}$. La température est en fait inférieure : la lentille absorbe une partie du rayonnement, et surtout, l'énergie thermique ne reste pas localisée sur l'image du Soleil, mais diffuse tout autour par conduction.

L'expérience montre cependant que, avec un peu de patience, la température devient suffisante pour provoquer l'inflammation de la feuille.

6 Plans conjugués

1 • Soit O le centre optique, A' l'image de A sur l'écran, $p = OA$ et $p' = OA'$.

• Soit on utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} \text{ en remarquant que } p = p' - d :$$

$$p'^2 - dp' + df' = 0 ;$$

• Soit on utilise la relation de conjugaison de Newton :

$\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$, avec $(p - f')(p' - f') = ff'$ ou encore $(p' - d - f')(p' - f') = ff'$ et on obtient la même équation du second degré en p' .

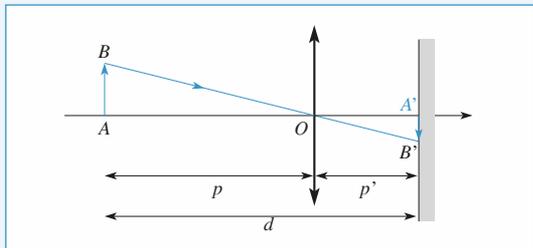
Cette équation a deux solutions si $d^2 > 4df'$, soit si $d > 4f'$.

On retrouve un résultat connu : **pour une lentille convergente, la distance minimale entre un objet réel et son image réelle est égale à $4f'$.**

Les deux solutions sont alors :

$$p_1' = \frac{d}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 4 \frac{f'}{d}} \right) \quad \text{et} \quad p_2' = \frac{d}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 4 \frac{f'}{d}} \right).$$

On remarque que $p_1' = -p_2$ et $p_2' = -p_1$; les deux positions sont équivalentes si on intervertit la source et l'écran.



2 • Le grandissement est, dans le premier cas :

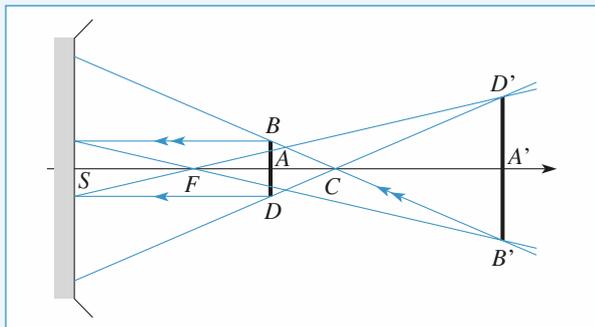
On passe d'une solution à l'autre en échangeant p' et $d - p'$, donc :

$$\gamma_1 = \frac{p_1'}{p_1} = \frac{p_1'}{p_1' - d} = \frac{p_2' - d}{p_2'} = \frac{1}{\gamma_2}$$

- Les grandissements sont donc inverses l'un de l'autre.
- Le cas limite ($d = 4f'$) est caractérisé par un grandissement égal à -1 .

7 Observation d'un miroir éclairé

1 • La construction utilisant les rayons passant par le centre et le foyer figure ci-dessous. Le disque image a pour diamètre $B'D'$.



Les triangles BCD et $B'CD'$ sont homothétiques :

$$\frac{B'D'}{BD} = \left| \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} \right|.$$

Avec $\overline{CA} = \frac{\overline{CF}}{2} = \frac{\overline{CS}}{4} = -7,5 \text{ cm}$, la formule de conjugaison

$$\frac{1}{\overline{CA'}} + \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{2}{\overline{CS}} \quad \text{donne} \quad \overline{CA'} = -\frac{\overline{CS}}{2} = 15 \text{ cm}$$

et $B'D' = 2BD = 4 \text{ cm}$.

2 • Une partie du disque apparaît lumineuse s'il existe des rayons émis par la source qui sont perçus par l'observateur après réflexion sur cette partie du miroir. Elle apparaît sombre s'il n'y en a pas.

Les rayons émis par le disque de diamètre BD ressortent par le disque image de diamètre $B'D'$.

L'œil ne reçoit donc de la lumière que si le segment joignant le point du miroir à l'œil coupe $B'D'$.

L'observateur perçoit de la lumière à l'intérieur d'un cône d'angle :

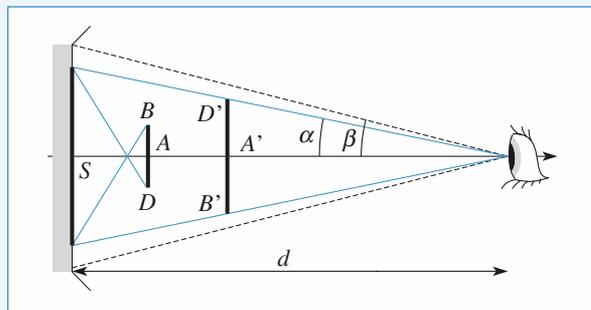
$$2\alpha = \frac{B'D'}{d - SA'}$$

limité par ce disque image.

Le miroir est vu sous l'angle :

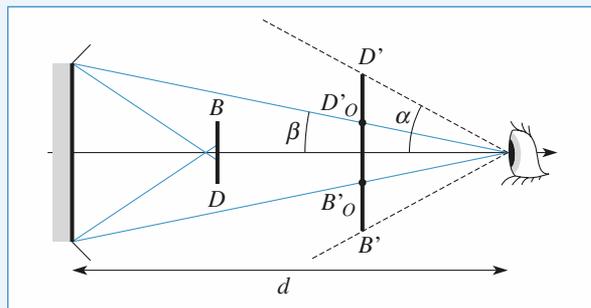
$$2\beta = \frac{2r}{d}.$$

Deux cas peuvent alors être envisagés.



Cas 1. $\alpha < \beta$,

et seule une partie du miroir apparaît lumineuse.



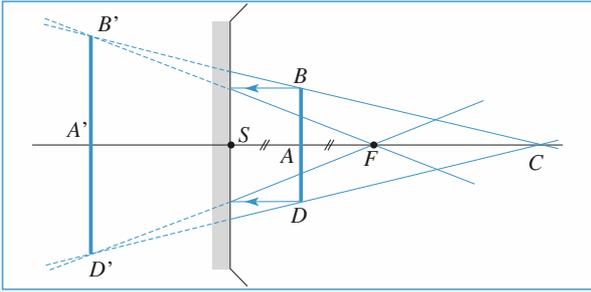
Cas 2. $\alpha > \beta$, et tout le miroir apparaît lumineux et l'œil ne peut voir que $B'_0D'_0$ par réflexion.

La distance limite, au-dessus de laquelle le miroir n'apparaît que partiellement lumineux, vaut :

$$d_0 = \frac{\overline{SA'}}{1 - \frac{\overline{B'D'}}{2r}} = 67,5 \text{ cm}.$$

Le cas étudié correspond à $SA' = \frac{3R}{2} < d_0$, donc au cas 2.

3 • L'image $B'D'$ est à présent virtuelle comme le montre le schéma ci-dessous.



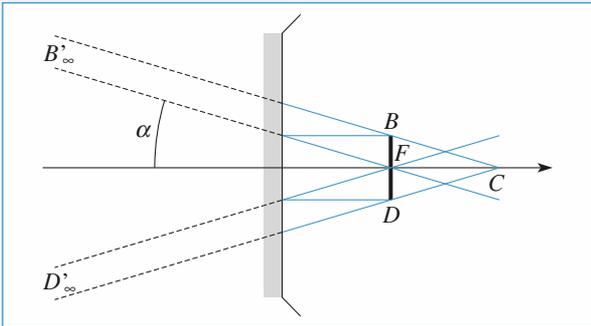
De même que pour le cas 1 : $\overline{CA} = -\frac{3R}{4}$,

$$\overline{CA'} = \frac{3R}{2} \text{ et } B'D' = 2BD = 4 \text{ cm.}$$

$B'D'$ est plus petit que $2r$: le miroir n'apparaît jamais totalement lumineux.

4 • Comme le disque est dans le plan focal, l'image $B'D'$ est maintenant à l'infini, définie par l'angle :

$$2\alpha = 2 \frac{FB}{FC}.$$

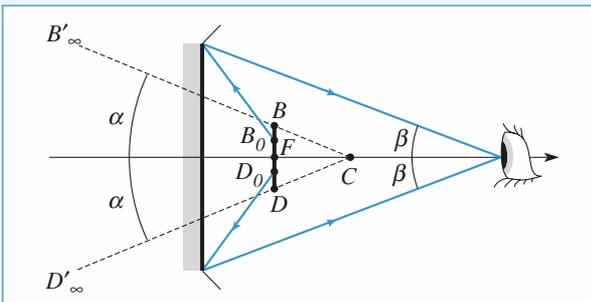


Le miroir apparaît totalement éclairé lorsque :

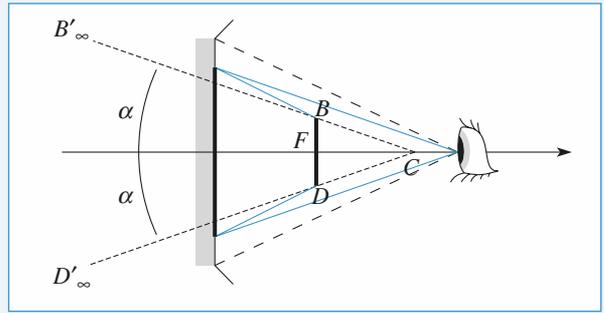
$$\beta = \frac{r}{d} < \alpha = \frac{FB}{FC} = \frac{BD}{R},$$

partiellement éclairé le cas échéant.

La distance critique est ici $d_0 = \frac{r \cdot R}{BD} = 90 \text{ cm}$.



Cas 1. Le miroir apparaît entièrement lumineux, et l'œil ne voit que la partie B_0D_0 réfléchi.



Cas 2. Le miroir est partiellement lumineux, mais B et D sont perçus par réflexion.

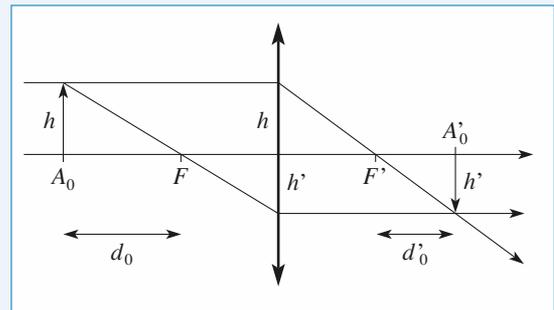
Remarque : Ces observations peuvent être extrapolées au cas d'un phare de voiture, dont le disque apparaît entièrement lumineux si on le regarde à une distance suffisante, et seulement lumineux au voisinage de son centre si on se rapproche. Dans le cas du miroir d'un phare, la forme est plutôt parabolique, et l'ampoule est positionnée au voisinage du foyer.

8 Profondeur de champ d'un objectif photographique

1 • D'après la construction géométrique représentée sur le schéma :

$$\frac{h}{h'} = \frac{f'}{d'_0} = \frac{d_0}{f'}, \text{ d'où } d_0 = f' \frac{h}{h'} = 2,86 \text{ m}$$

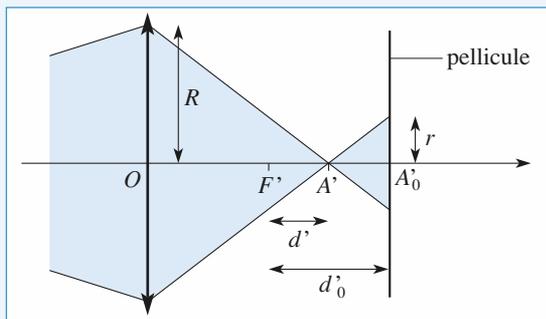
et $d'_0 = f' \frac{h'}{h} = 0,875 \text{ mm}$.



2 • D'après la relation de conjugaison de Newton, l'image de l'objet se trouve à une distance d' du foyer image telle

$$\text{que } \overline{F'A'} = d' = \frac{f'^2}{d}.$$

La représentation qui suit est faite avec $d > d_0$, donc $d' < d'_0$. Pour $d < d_0$, A' se trouve après la pellicule et donne une tache de rayon r sur celle-ci.



Pour les deux cas, le cône de rayons issu de la lentille converge vers A' et intercepte la pellicule sur un cercle de rayon :

$$r = R \frac{|d' - d_0|}{OA'}$$

Comme d est grand devant f' , A' est très proche du foyer image et :

$$r \approx R \frac{|d' - d_0|}{f'} = \frac{f'^2}{2N} \left| \frac{1}{d} - \frac{1}{d_0} \right|$$

3 • Sur la pellicule, la tache image ne doit pas dépasser une taille $r_0 = \frac{1}{25}$ mm = 40 μ m. Pour d infini, on calcule

$r_\infty = 39,7 \mu$ m, ce qui est acceptable. Donc toute valeur $d > d_0$ donne une image « nette ».

À l'inverse, pour $d > d_0$, la limite d_{\min} donnant une image encore acceptable correspond à :

$$r_0 = \frac{f'^2}{2N} \left(\frac{1}{d_{\min}} - \frac{1}{d_0} \right)$$

d'où $d_{\min} = 1,43$ m.

Avec ce critère (peu exigeant), l'image est suffisamment nette pour d compris entre d_{\min} et l'infini.

Comme on peut le constater, avec ce type d'appareil, les photographies « familiales » de personnages prises à environ 3 m de distance sont très satisfaisantes, contrairement aux paysages ou aux gros plans.

9 Rétroviseur

1 • D'un objet éloigné, un miroir concave donne une image réelle renversée : ce n'est vraiment pas souhaitable pour un rétroviseur... On considère donc un miroir convexe, qui donne ici une image virtuelle et droite (figure 1).

La conjugaison $\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{SC} = -\frac{2}{R}$,

avec un grandissement $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = -\frac{SA'}{SA} = \frac{1}{5}$,

donne : $R = 10$ m.

Le miroir du rétroviseur, convexe, a un rayon de courbure de 10 m.

2 • Pour le rayon limite réfléchi (figure 2), on perçoit le bord du champ accessible : $\ell = 15$ m (donc $2\ell = 30$ m) pour $D = 100$ m.

Sachant que $\overline{SA} = 1$ m, on obtient $\overline{SA'} = -0,83$ m.

Le rayon limite indique : $\frac{r}{A'S} = \frac{\ell}{A'I}$, soit $r \approx 12$ cm.

C'est une valeur raisonnable.

On peut discuter l'approximation de Gauss : le rayon r est largement inférieur au rayon de courbure R , donc le miroir est bien utilisé au voisinage de son sommet.

D'autre part : $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\ell}{D}$ est inférieur à 10° , donc les

rayons sont peu inclinés. Les conditions de Gauss sont satisfaites, et l'expérience montre que l'image ne subit pas de distorsion notable.

Remarque : pour élargir le champ de vision, le bord extérieur du rétroviseur peut être complété par une partie nettement plus bombée. Le champ est bien élargi, au prix d'une distorsion visible sur son bord.

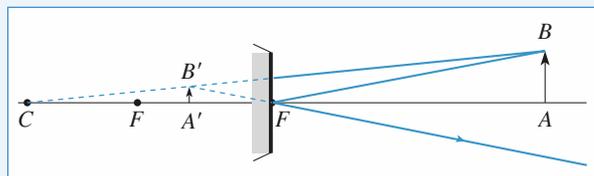


Figure 1

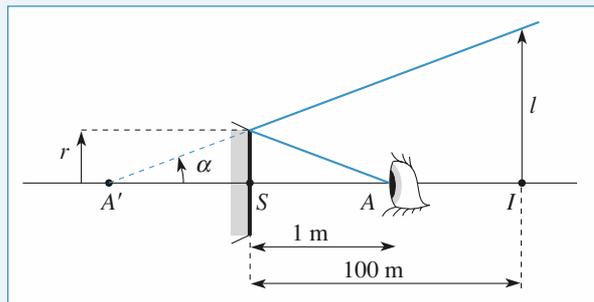
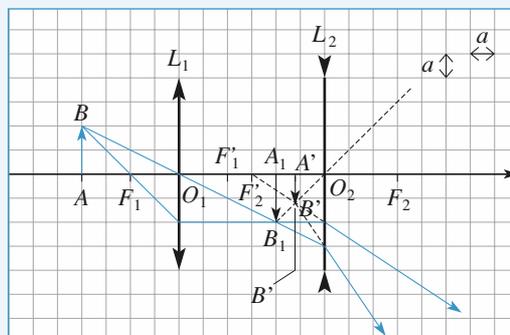


Figure 2

10 Doublet

1 •



2 • On utilise les relations de conjugaison de Newton.

• Pour l'image intermédiaire A_1 :

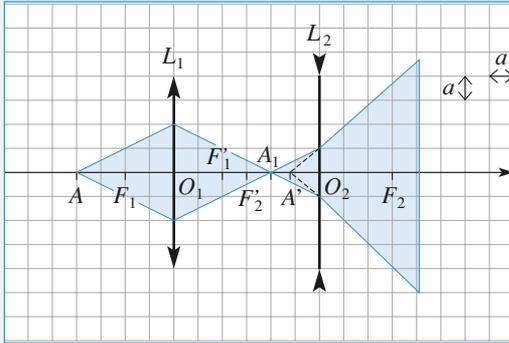
$$\overline{F_1 A_1} = -\frac{4a^2}{-2a} = 2a$$

A_1 est une image réelle, déterminée par l'intersection de rayons réels.

• Pour l'image finale A' :

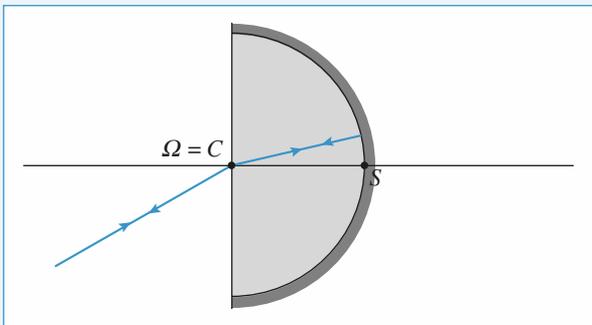
$$\overline{F_2'A'} = -\frac{9a^2}{-5a} = 1,8a \text{ ou encore } \overline{O_2A'} = -1,2a.$$

3 • A' est une image virtuelle. Les rayons émergents forment un faisceau divergent et leurs prolongements se coupent en A' .

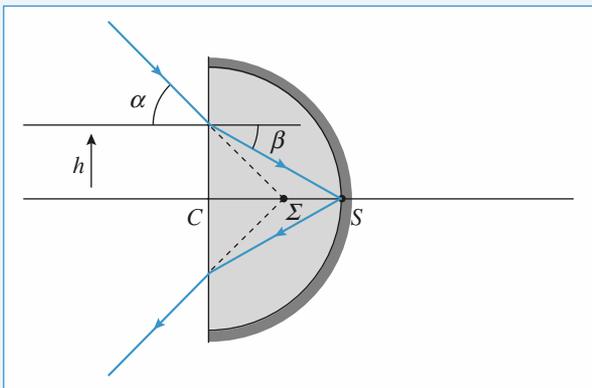


11 Lentille demi-boule à face argentée

Il est clair qu'un rayon arrivant au centre de la lentille demi-boule revient sur lui-même : le centre Ω du miroir équivalent coïncide avec ce centre C .



La construction du sommet Σ utilise un rayon qui va se réfléchir en S :



Dans les conditions de Gauss : $\alpha = n\beta$

avec $h = \alpha \cdot \overline{CS} = \beta \cdot \overline{CS}$, donc $\overline{C\Omega} = \frac{R}{n}$.

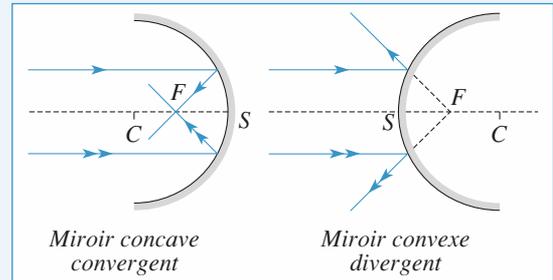
Les points Ω et Σ sont le centre et le sommet du miroir équivalent, de rayon $\frac{R}{n}$, concave.

12 Association de miroirs

1 • a) Le foyer objet a son image à l'infini, soit $\overline{SA'} = \infty$, d'où $\overline{SF'} = \overline{SC}/2$.

Les deux foyers sont confondus et sont au milieu du segment $[SC]$.

b) et c)



2 • a) Un rayon parallèle à l'axe optique sort après réflexion sur M_1 en passant par F_1 . Après réflexion sur M_2 , pour qu'il passe par S_1 , il faut que l'image de F_1 par M_2 soit S_1 :

$$A_\infty \xrightarrow{M_1} F_1 \xrightarrow{M_2} S_1.$$

$$\text{Ceci donne } \frac{1}{\overline{S_2S_1}} + \frac{1}{\overline{S_2F_1}} = \frac{2}{\overline{S_2C_2}} = \frac{1}{\overline{S_2F_2}},$$

avec $\overline{S_2S_1} = d$, $\overline{S_1F_1} = -3 \text{ m}$, $\overline{S_2F_2} = -2 \text{ m}$;

d'où $\frac{1}{d} + \frac{1}{d-3} = -\frac{1}{2}$ ou $d^2 + d - 6 = 0$ qui a pour solution $d = 2 \text{ m}$ ou $d = -3 \text{ m}$. Seule la solution $d = 2 \text{ m}$ est acceptable, car M_2 est avant M_1 .

b) D'après **a)**, un rayon parallèle à l'axe ressort en passant par S_1 , donc S_1 est le foyer image F' du système optique.

Un rayon passant par le foyer objet ressort parallèlement à l'axe. Donc son image par M_1 est le foyer F_2 de M_2 :

$$F \xrightarrow{M_1} F_2 \xrightarrow{M_2} A'_\infty.$$

En utilisant la formule de conjugaison pour M_1 :

$$\frac{1}{\overline{S_1F}} + \frac{1}{\overline{S_1F_2}} = \frac{1}{\overline{S_1F_1}} : \overline{S_1F_2} = -4 \text{ m et } \overline{S_1F_1} = -3 \text{ m},$$

d'où $\overline{S_1F} = -12 \text{ m}$.

Cf. schéma page suivante.

c) Si le système est équivalent à une lentille mince, un rayon parallèle à l'axe recoupe l'émergent au niveau de la lentille. De même un rayon émergent parallèlement à l'axe, coupe l'incident au niveau du plan de la lentille. Ce plan est le plan médiateur du segment FF' . On vérifie ce résultat graphiquement.

La lentille équivalente a une distance focale de 6 m et son centre optique est tel que $\overline{OS_1} = 6 \text{ m}$.

On peut remarquer que : $O = C_1 = C_2$, de sorte que O est bien son propre conjugué.

De plus, les conjugaisons des miroirs peuvent s'écrire :

$$\frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{2}{\overline{OS_1}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} + \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{2}{\overline{OS_2}}$$

ce qui donne la conjugaison d'une lentille :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{2}{\overline{OS_2}} - \frac{2}{\overline{OS_1}} = \frac{1}{\overline{OF'}}$$

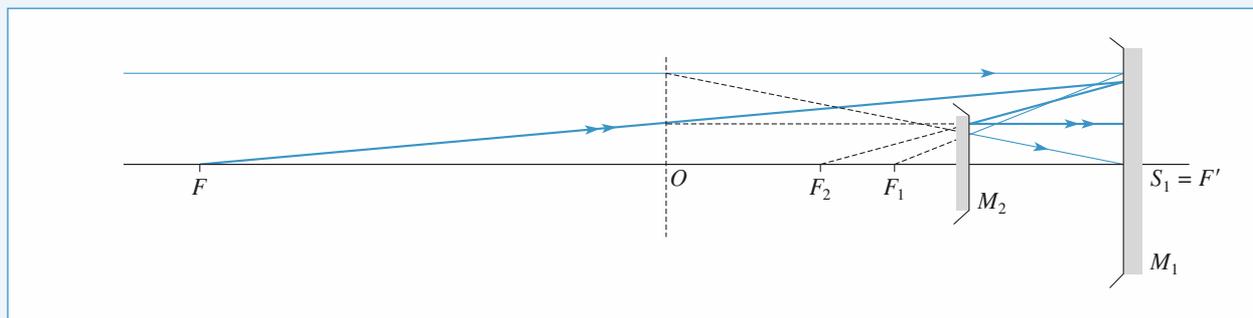
d) Ce système présente les avantages suivants par rapport à une lentille mince :

- *compacité* : si on place une plaque photographique dans le plan focal du système, celui-ci occupe 2 m pour les miroirs et 6 m pour la lentille ;

- *achromatisme* : un miroir est toujours achromatique alors qu'une lentille doit être corrigée ;

- *luminosité* : il y a toujours des pertes par réflexion et transmission dans une lentille.

Il présente comme seul inconvénient un problème de champ d'utilisation. Celui-ci est limité par la taille du trou au niveau de S_1 et par la taille du miroir M_2 .



13 Mise au point

1 • a) Soit $\overline{AB} \xrightarrow{L_1} \overline{A_1B_1} \xrightarrow{L_2} \overline{A'B'}$

L'image $\overline{A'B'}$ doit être réelle. Une lentille divergente ne donne d'image réelle que si l'objet est entre O et F (foyer-objet), l'image est alors après l'objet. Les points O_2 , A_1 , A' sont donc dans cet ordre sur l'axe.

Si A est à l'infini, A_1 est en F'_1 . La distance D doit donc être supérieure à f'_1 , soit $D - f'_1 \geq 0$.

b) La relation de Descartes pour L_2 donne :

$$\frac{1}{\overline{O_2O}} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

avec $\overline{O_2O} = d_\infty$, $\overline{O_2F'_1} = f'_1 - D + d_\infty$,

d'où : $d_\infty^2 + (f'_1 - D)d_\infty - f'_2(f'_1 - D) = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est :

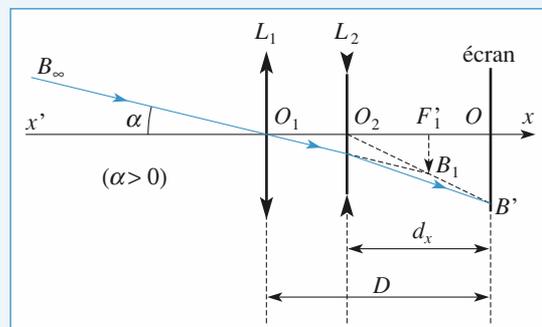
$$\Delta = (f'_1 - D)^2 + 4f'_2(f'_1 - D) = (D - f'_1)(D - f'_1 - 4f'_2)$$

$\Delta > 0$, car $D > f'_1$ et $f'_2 < 0$.

Il y a donc deux solutions dont une est positive. C'est la seule acceptable.

$$d_\infty = \frac{1}{2} \left[D - f'_1 + \sqrt{(D - f'_1)(D - f'_1 - 4f'_2)} \right]$$

c) $d_\infty = 3 \text{ cm}$. L'image $\overline{A_1B_1}$ est dans le plan focal image de L_1 .



Un rayon passant par O_2 et B_1 n'est pas dévié donc O_2 , B_1 et B' sont alignés.

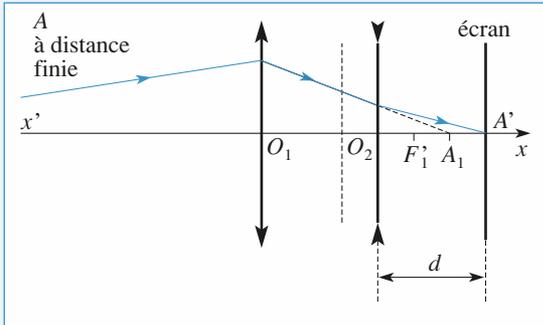
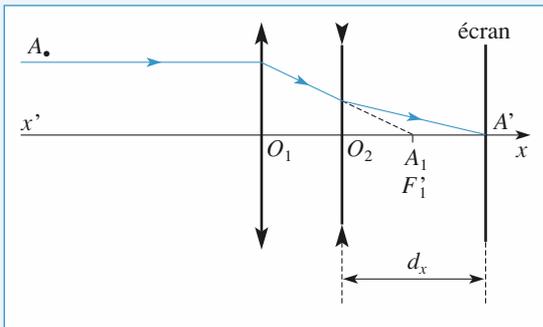
d) D'après le schéma,

$$\overline{A_1B_1} = \overline{F'_1B_1} = -\alpha f'_1 \quad \text{et} \quad \overline{A'B'} = + \frac{\overline{O_2O}}{\overline{O_2F'_1}} \overline{A_1B_1},$$

$$\text{d'où :} \quad \overline{A'B'} = -\alpha \frac{d_\infty f'_1}{f'_1 + d_\infty - D}.$$

2 • a) L'objet \overline{AB} est à distance finie de L_1 . Son image $\overline{A_1B_1}$ est après F'_1 (on suppose que l'objet est avant le foyer objet de L_1).

Pour une lentille divergente et un objet virtuel, l'image, si elle est réelle (objet entre O et F), est située entre O (objet en O) et l'infini (objet en F).



Quand on approche la lentille de l'objet, l'image passe de l'infini à O , elle se rapproche donc de l'objet.

Il faut diminuer d : $d < d_\infty$.

b) Si $d_\infty = D$, les deux lentilles sont accolées. En utilisant la formule d'addition des vergences, ces lentilles sont équiva-

lentes à une lentille de vergence $\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}$ soit :

$$f' = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2}$$

O est le foyer image de cette lentille donc :

$$D = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2} = 12 \text{ cm.}$$

3 • a) Les positions limites de L_2 sont $d = 0$ et $d = D$.

Dans le cas où $d = 0$, $\overline{A_1 B_1}$ est confondu avec $\overline{A' B'}$, car $O_2 = O$.

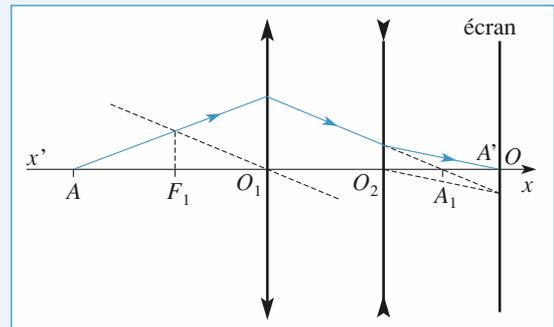
La formule de conjugaison $\frac{1}{O_1 A_1} - \frac{1}{O_1 A} = \frac{1}{f'_1}$ donne :

$$\overline{O A} = f'_2, \text{ car } \overline{O_1 A_1} = D \text{ et } \frac{1}{D} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2}.$$

La plage de mise au point est donc de l'infini à 6 cm en avant de L_1 : elle est très étendue.

$$\text{b) } \frac{1}{O_2 A'} - \frac{1}{O_2 A_1} = \frac{1}{f'_2} \text{ d'où } \overline{O_2 A_1} = 3 \text{ cm.}$$

$$\frac{1}{O_1 A_1} - \frac{1}{O_1 A} = \frac{1}{f'_1}, \text{ d'où } \overline{O_1 A} = -7,2 \text{ cm.}$$



14 Doublet achromatique

1 • Soit O le centre optique commun. Soit A un point objet ($\overline{OA} = p$), A_1 l'image de A par la première lentille ($\overline{OA_1} = p_1$), et A' ($\overline{OA'} = p'$) l'image de A_1 par la seconde lentille. Il semble plus simple de définir la position des points par rapport au centre optique commun aux deux lentilles, aussi on utilise la relation de conjugaison de Descartes.

$$V_1 = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V_2 = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p_1};$$

$$\text{d'où :} \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = V_1 + V_2 = V.$$

La lentille équivalente a pour centre optique O et sa vergence est $V = V_1 + V_2$.

2 • D'après la relation entre vergence et indice :

$$V_F - V_C = (n_F - n_C)A = \frac{n_F - n_C}{n_D - 1} V_D = \frac{V_D}{v}.$$

$$\frac{1}{f'_F} - \frac{1}{f'_C} = \frac{f'_C - f'_F}{f'_C f'_F} = \frac{1}{f'_D v}.$$

Or, la dispersion est faible et $f'_C f'_F \approx f'_D{}^2$, d'où :

$$f'_C - f'_F \approx \frac{f'_D}{v}.$$

Pour la lentille étudiée $f'_C - f'_F = 3,7 \text{ mm}$. Les bords des images sont irisés, ce qui nuit à la netteté de l'image.

3 • a) Il faut satisfaire les conditions :

$$V = V_{1F} + V_{2F} = V_{1C} + V_{2C},$$

soit $A_1(n_{1F} - 1) + A_2(n_{2F} - 1) = A_1(n_{1C} - 1) + A_2(n_{2C} - 1)$

ou $A_1(n_{1F} - n_{1C}) + A_2(n_{2F} - n_{2C}) = 0$.

$$\text{Or, } A_1 = \frac{V_1}{n_{1D} - 1}; \quad \text{d'où } \frac{V_1}{v_1} + \frac{V_2}{v_2} = 0.$$

Une des lentilles doit être convergente et l'autre divergente.

b) La condition n'a été écrite que pour les raies F et C . Les autres vergences restent *a priori* différentes, mais l'écart est devenu très faible. Le doublet est approximativement achromatique.

c) Pour le système étudié $V_1 + V_2 = 2$ dioptries et :

$$2V_1 + V_2 = 0;$$

donc $V_1 = -2$ dioptries et $V_2 = 4$ dioptries, ou :
 $f'_1 = -500$ mm et $f'_2 = +250$ mm .

15 Doubleur de focale

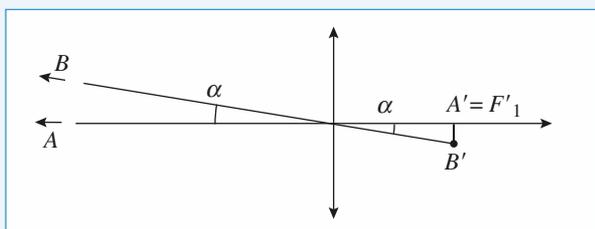
1 • L'image A' du point A très éloigné est au foyer :
 $A' = F'_1$.

L'objet est m sous l'angle $\alpha = \frac{h}{D}$, ce qui donne une

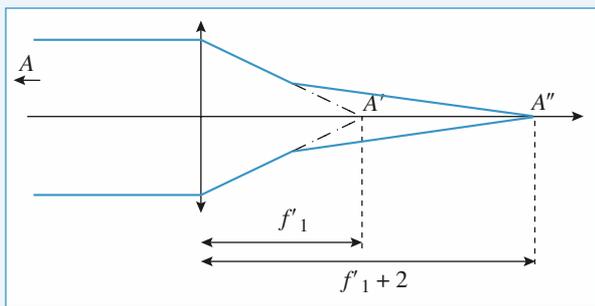
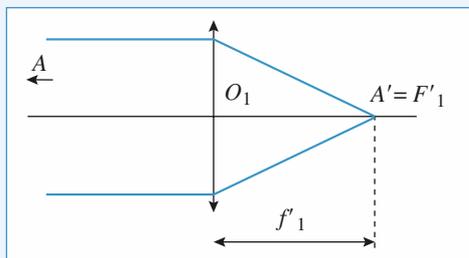
taille $\overline{A'B'} = -\alpha f'_1$ pour l'image : $A'B' = 6$ mm

car $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{20}{200} = 0,1$ rad.

Doubler cette taille demande une focale double, et multiplie l'encombrement de l'objectif d'autant, soit 120 mm, ce qui est assez encombrant.



2 • Les schémas avec et sans doubleur de focale sont les suivants :



Il faut traduire la conjugaison de A' et A'' par la lentille divergente, et le grandissement obtenu :

$$\overline{F_2 A'} \cdot \overline{F_2 A''} = -f_2'^2 \quad \text{et} \quad \gamma_2 = \frac{\overline{F_2 O_2}}{\overline{F_2 A'}} = 2$$

On en tire : $\overline{F_2 A'} = \frac{f_2'}{2}$ et $\overline{F_2 A''} = -2f_2'$, puis

la distance $d = \overline{O_2 A''} = \overline{O_2 F_2} + \overline{F_2 A''} = -f_2'$,

ainsi que l'épaisseur du dispositif :

$$e = \overline{A'A''} = \overline{A'F_2} + \overline{F_2 F_2''} + \overline{F_2 A''} = -\frac{f_2'}{2}.$$

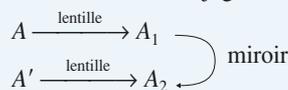
Numériquement : $d = 40$ mm et $e = 20$ mm. Le dispositif complet est plus long de 2 cm.

3 • Si A est à distance finie, le réglage de l'appareil correspond à une distance $\overline{O_1 A'}$ un peu supérieure à f'_1 sur le premier schéma : l'objectif est ajusté.

Ceci fait, la conjugaison $A' \rightarrow A''$ du doubleur sera conservée, avec le même grandissement : l'objectif est ajusté, et le doubleur joue encore son rôle.

16 Une association lentille-miroir

1 • On effectue les conjugaisons successives :



traduites par les relations de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad (1)$$

$$\frac{1}{\overline{SA_2}} + \frac{1}{\overline{SA_1}} = \frac{2}{\overline{SC}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} \quad (3)$$

où on a bien tenu compte du sens de la lumière pour la dernière conjugaison.

Avec $f' = -2R$, les relations (1) et (2) donnent :

$$\overline{OA_1} = -\frac{2Rx}{x-2R} \quad \text{et} \quad \overline{OA_2} = \frac{-2Rx'}{x'-2R}$$

On reporte alors dans (2), sachant que

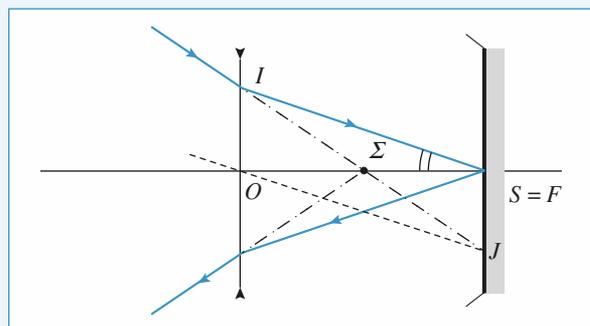
$$\overline{SA_1} = f' + \overline{OA_1} = \overline{OA_1} - 2R \quad \text{et}$$

$$\overline{SA_2} = \overline{OA_2} + 2R,$$

ce qui donne bien la relation souhaitée :

$$6xx' - 5Rx - 5Rx' + 4R^2 = 0.$$

2 • Un rayon qui se réfléchit en S après avoir traversé la lentille revient symétriquement par rapport à l'axe optique.



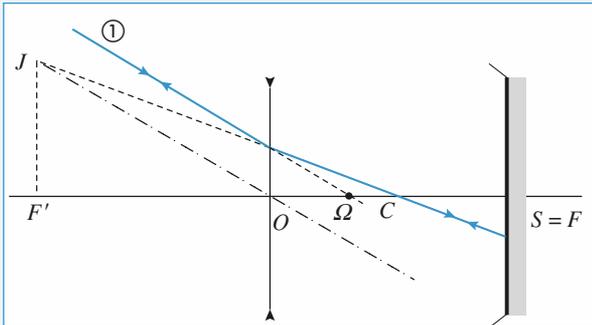
Pour la construction, on remarque que le rayon transmis IS est parallèle à un rayon de construction OJ , après la lentille.

Avant la lentille, ces deux rayons sont donc passés par le point J du plan focal objet de la lentille, le rayon OJ n'étant pas dévié.

Cette construction montre qu'un rayon incident passant par le point Σ ressort symétriquement par rapport à l'axe optique. Ce point Σ a la propriété d'un sommet de miroir équivalent.

La conjugaison $\Sigma \xrightarrow{\text{lentille}} S$ détermine ce point Σ .

Les raisonnements et constructions sont analogues pour définir le point Ω , centre du miroir équivalent. Il faut maintenant que le rayon passant par Ω revienne sur lui-même.



Sur la construction le rayon incident ① et le rayon de construction JO non dévié sont parallèles, et sortent de la lentille en passant par J dans le plan focal image de la lentille.

La conjugaison $\Omega \xrightarrow{\text{lentille}} C$ détermine le point Ω .

3 • On traduit $\Omega \xrightarrow{\text{lentille}} C$ par :

$$\frac{1}{OC} - \frac{1}{O\Omega} = \frac{1}{f'}, \text{ soit } \overline{O\Omega} = \frac{f' \cdot \overline{OC}}{f' \cdot \overline{OC}} = \frac{2R}{3}$$

De même, $\Sigma \xrightarrow{\text{lentille}} S$ donne :

$$\frac{1}{OS} - \frac{1}{O\Sigma} = \frac{1}{f'}, \text{ soit } \overline{O\Sigma} = \frac{f' \cdot \overline{OS}}{f' \cdot \overline{OS}} = R$$

4 • En écrivant la conjugaison par le miroir équivalent :

$$\frac{1}{\Sigma A} + \frac{1}{\Sigma A'} = \frac{2}{\Sigma \Omega}$$

avec $\overline{\Sigma A} = \overline{\Sigma O} + \overline{OA} = x - R$, $\overline{\Sigma A'} = x' - R$,

et $\overline{\Sigma \Omega} = \overline{\Sigma O} + \overline{O\Omega} = \frac{R}{3}$,

il vient :

$$\frac{1}{x - R} + \frac{1}{x' - R} = \frac{6}{R}$$

qui redonne bien la relation :

$$6xx' - 5Rx - 5Rx' + 4R^2 = 0.$$

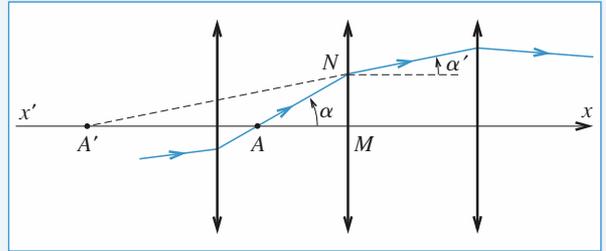
Cette obtention est plus efficace en utilisant le miroir équivalent, puisqu'elle ne nécessite qu'une conjugaison au lieu de trois.

17 Équation d'un rayon lumineux dans un système de lentilles

1 • La relation de conjugaison pour la lentille considérée s'écrit :

$$\frac{1}{MA'} - \frac{1}{MA} = \frac{1}{f'} = C.$$

Or $\alpha = \frac{y}{AM}$ et $\alpha' = \frac{y}{A'M}$, d'où $\alpha - \alpha' = Cy$.



2 • a) Sur un intervalle a , α varie : $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha = -Cy$.

On assimile la dérivée $\frac{d\alpha}{dx}$ à $\frac{\Delta\alpha}{a} = -\frac{Cy}{a}$.

$\alpha \approx \tan \alpha$ est aussi la pente de $y(x)$: $\alpha = \frac{dy}{dx}$,

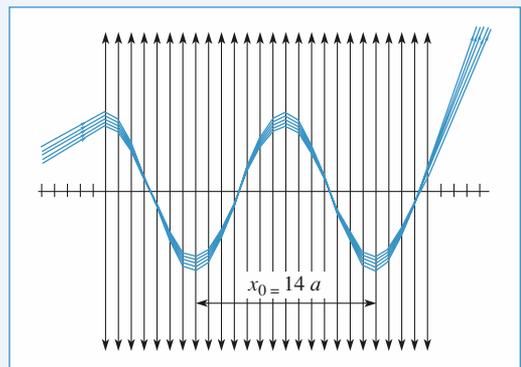
donc $\frac{d^2y}{dx^2} + Cy = 0$.

b) En $x = 0$, $y = 0$ et $\alpha = \frac{dy}{dx} = \alpha_0$,

alors : $y = \sqrt{\frac{a}{C}} \alpha_0 \sin\left(\sqrt{\frac{C}{a}}x\right)$.

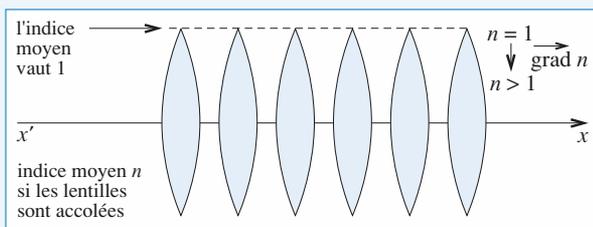
Le rayon lumineux a une trajectoire sinusoïdale de période

$$x_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{C}}.$$



Sur le document ci-dessus (tracé avec $f = 5a$), la période x_0 est bien égale à $2\pi\sqrt{5}a \approx 14a$.

Remarque : Cet exercice correspond à une modélisation des fibres optiques. Il est ainsi possible de retrouver les résultats relatifs aux fibres optiques à gradient d'indice.



18 Cavité formée par deux miroirs confocaux

1 • a) Notons A' l'image de A par réflexion sur le premier miroir et A'' celle de A' par réflexion sur le second miroir. Utilisons les formules de conjugaison de Newton pour chaque miroir :

$$\overline{F_1 A} \overline{F_1 A'} = \frac{R^2}{4} \text{ et } \overline{F_2 A'} \overline{F_2 A''} = \frac{R^2}{4}; \text{ avec } A'' = A \text{ on obtient :}$$

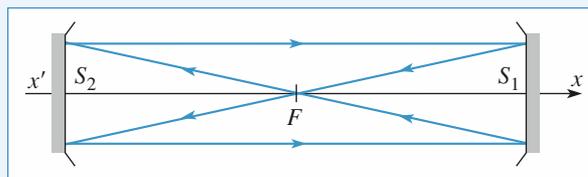
$$\begin{cases} \left(\frac{R}{2} - \frac{D}{2} + x\right)\left(\frac{R}{2} - \frac{D}{2} + x'\right) = \frac{R^2}{4} \\ \left(-\frac{R}{2} + \frac{D}{2} + x'\right)\left(-\frac{R}{2} + \frac{D}{2} + x\right) = \frac{R^2}{4}. \end{cases}$$

En éliminant x' , il reste $(D - R)\left(x^2 - \frac{(R - D)^2}{4} + \frac{R^2}{4}\right) = 0$.

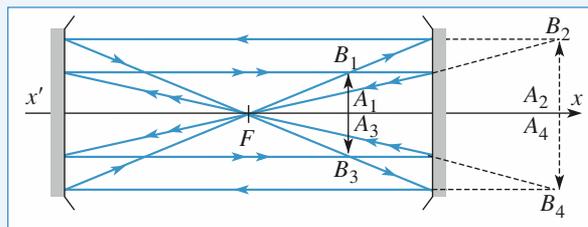
b) Si $D \neq R$, il y a deux solutions $x = \pm \sqrt{\frac{D}{2}\left(\frac{D}{2} - R\right)}$, acceptables si $D > 2R$ et si $R > 0$ ($|x| \leq \frac{D}{2}$), donc si les miroirs sont concaves et distants de plus du double de leur rayon.

Si $D = R$, donc pour une cavité confocale, on constate que le résultat est assuré pour tous les points de l'axe.

2 • a) Ces deux rayons sont identiques, à une réflexion sur le miroir près, et se retrouvent identiques à eux-mêmes ensuite.



b) Pour construire les images successives $A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4, \dots$ de l'objet A_1B_1 , on utilise un rayon passant par B_1 , parallèle à l'axe et un autre passant par F , d'où :

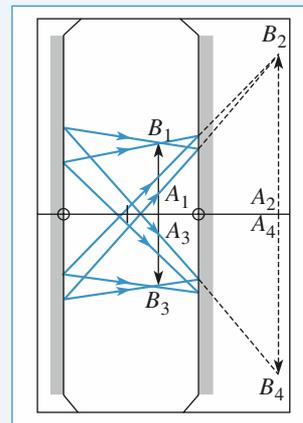


On constate que :

- $\overline{A_{p+2}B_{p+2}} = \overline{A_pB_p}$: résultat correspondant à l'étude de la question 1) ;

- $\overline{A_{p+2}B_{p+2}} = -\overline{A_pB_p}$: au bout de deux réflexions, l'image est dans le même plan que l'objet, retournée : $\gamma_{(2)} = -1$;

- $\overline{A_{p+4}B_{p+4}} = \overline{A_pB_p}$: au bout de quatre réflexions, l'image et l'objet sont confondus : $\gamma_{(4)} = +1$.



4

Instruments d'observation

LES OBJECTIFS

- Appliquer les raisonnements précédents à des systèmes optiques usuels (œil, lunette...), éventuellement destinés à des mesures (pointés de position, taille...).

LES PRÉREQUIS

- Conjugaisons des systèmes élémentaires : miroirs et lentilles.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Toujours pas grand-chose...

ESSENTIEL

L'œil

Au repos, l'œil voit net son punctum remotum PR à distance d_M .

Une augmentation de la vergence du cristallin permet de raccourcir la distance de vision nette jusqu'au punctum proximum PP à distance d_m .

Pour l'œil emmétrope: d_M est infinie, $d_m = 25$ cm.

Une observation sans fatigue dans un instrument d'optique doit dispenser l'œil d'accommoder: l'instrument fournit une image à l'infini, au PR de l'œil emmétrope.

emmétrope	myope	hypermétrope
L'œil au repos et la vision à l'infini		
Domaine de vision distincte		
<p>PR à l'infini, PP à $d_m = 25$ cm</p>	<p>PR pas à l'infini, PP plus près</p>	<p>PR virtuel, PP plus loin</p>

emmétrope	myope	hypermétrope
Œil corrigé (en vision à l'infini)		

Doc.1. L'œil emmétrope, myope ou hypermétrope.

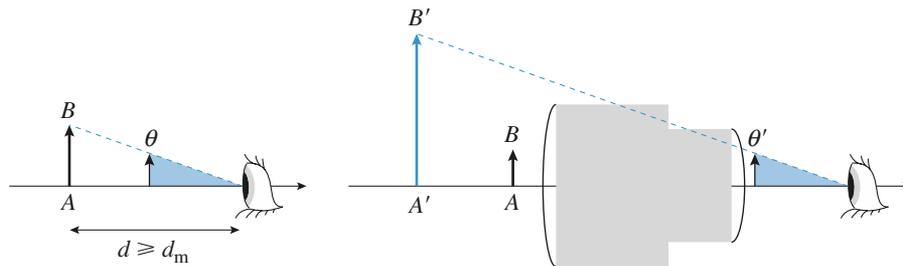
« Puissance et grossissement d'un instrument

Le grossissement d'un instrument est le rapport $G = \frac{\theta'}{\theta}$, où θ est l'angle sous lequel est perçu l'objet à l'œil nu, et θ' l'angle sous lequel il est vu à travers l'instrument. Il caractérise l'augmentation de la résolution apportée par l'instrument.

La puissance de l'instrument est le rapport positif $P = \left| \frac{\theta'}{AB} \right|$. Elle s'exprime en dioptries.

Si l'image donnée par l'instrument est à l'infini, la puissance intrinsèque P_i est atteinte.

Si l'objet est vu au PP (25 cm) à l'œil nu, et au PR (à l' ∞) de l'œil emmétrope, le grossissement commercial G_c est obtenu.

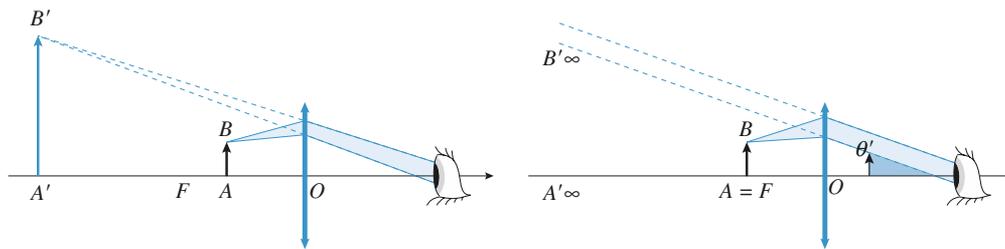
a. observation de AB à l'œil nu b. perception de l'image (virtuelle) $A'B'$ à travers l'instrument

Doc. 2. Grossissement d'un instrument d'observation.

« Instruments grossissants

Loupe : En plaçant l'objet au voisinage de son foyer objet, la loupe donne une image grossie vue sans fatigue. Le grossissement commercial $G_c = d_m V$ est le facteur d'amélioration de résolution apportée par la loupe, dont la puissance intrinsèque est : $P_i = V$.

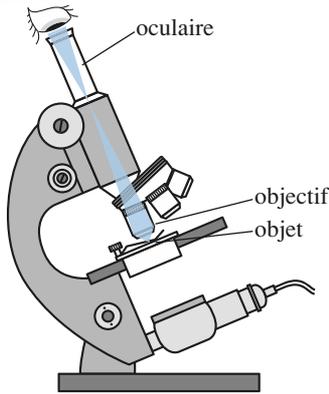
Avec la méthode b, il y a peu de distorsions de l'image si on approche l'œil du centre optique de la loupe.

a. $A'B'$ est plus gros que AB vu sans loupe

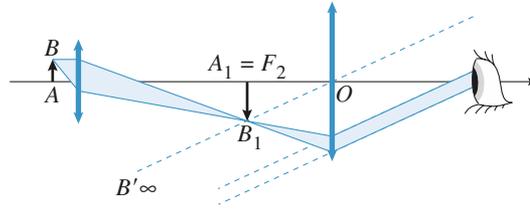
b. l'image est à l'infini

Doc. 3. Observation à la loupe.

Microscope : Il associe le grandissement de son objectif au grossissement de son oculaire pour rendre discernables des objets de très petite taille.



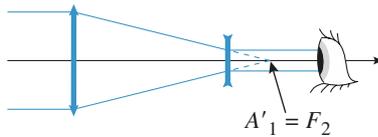
a. aspect du microscope



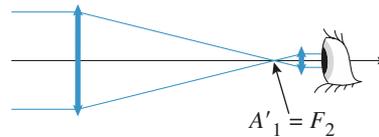
b. principe de l'appareil

Doc. 4. *Le microscope optique.*

Lunette astronomique : Les foyers de la lunette astronomique sont à l'infini : c'est un système *afocal*. Dans une lunette astronomique, le plan focal image de l'objectif et le plan focal objet de l'oculaire sont confondus. Le grossissement de la lunette est le rapport des focales de son objectif et de son oculaire : $G = -f'_1/f'_2$.



a. lunette de Galilée

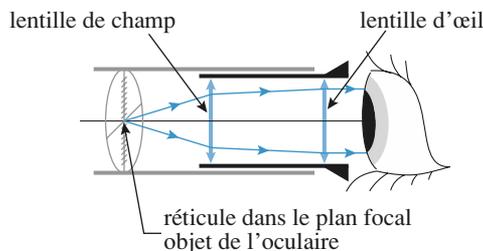


b. lunette à oculaire convergent

Doc. 5

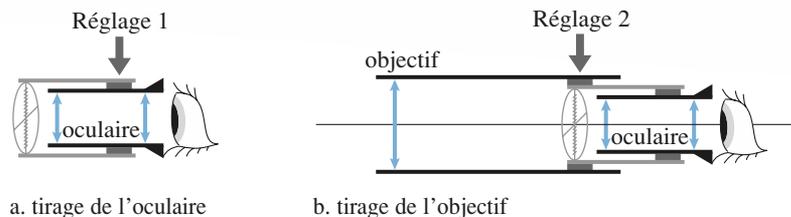
◀ **Visées et pointés**

Une lunette de visée comprend un objectif, qui donne de l'objet observé une image intermédiaire, ou objective. Elle possède un oculaire qui permet de regarder l'image objective « à la loupe ». Un réticule peut être associé à un oculaire positif (plan focal objet réel).



Doc. 6. *Oculaire (ici positif, associé à un réticule).*

Le réglage d'une lunette est effectué en réglant l'oculaire à sa vue, puis l'objectif de façon à viser l'objet recherché. Le réglage de l'objectif peut être affiné en laissant jouer la parallaxe par déplacement latéral de l'œil devant l'oculaire.



a. tirage de l'oculaire

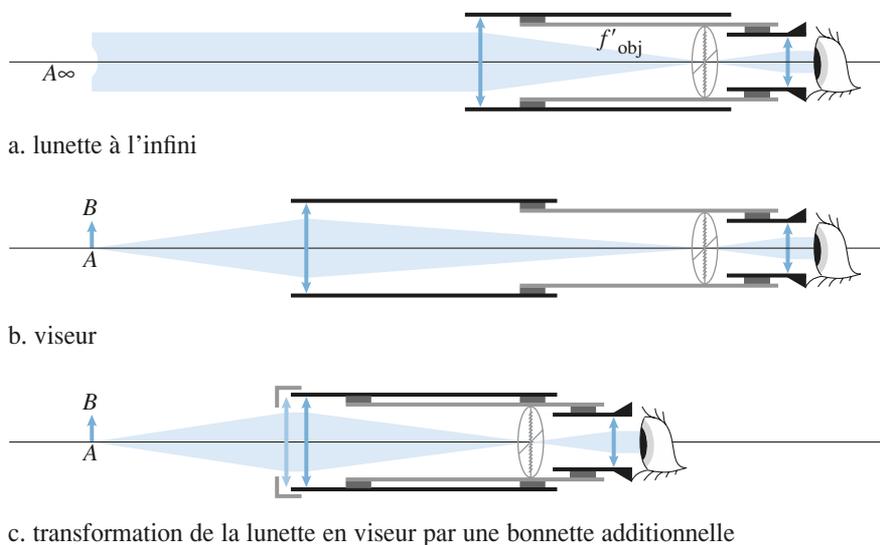
b. tirage de l'objectif

Doc. 7. Réglages d'une lunette.

Si la lunette est réglée, un changement d'utilisateur peut nécessiter une adaptation de l'oculaire à sa vue, mais le réglage de l'objectif n'a pas à être perturbé.

Un viseur réduit sensiblement la profondeur d'accommodation de l'œil. L'appareil est adapté à la visée d'objets situés à une distance précise. Muni d'un oculaire à réticule micrométrique, il permet d'effectuer des pointés transversaux, et une mesure de la taille de l'objet.

Une lunette de visée à l'infini peut être réglée par autocollimation si elle est munie d'un réticule éclairé. Elle peut être utilisée pour régler un collimateur à l'infini, ou pour effectuer des pointés de direction.



a. lunette à l'infini

b. viseur

c. transformation de la lunette en viseur par une bonnette additionnelle

Doc. 8. Lunette réglée à l'infini, mutation en viseur.**Conseils et pièges à éviter**

- Un œil emmétrope est un œil normal : le PR est à l'infini, et le PP est à environ 25 cm devant l'œil.
- Un œil qui n'accommode pas voit net le PR.
- Le conjugué de F (foyer objet) est à l'infini et le conjugué de l'infini est en F' (foyer image).
- Souvent l'utilisation des relations de Newton est préférable à celles de Descartes.

1 PR d'un œil myope

Pour un œil normal « standard », les limites d'accommodation sont :

PP à $d_m = 25$ cm et PR à l'infini.

On considère qu'un œil myope, de même taille (distance cristallin-rétine), possède la même faculté d'accommodation : la différence ΔV entre les valeurs extrêmes de la vergence est égale à celle de l'œil « standard ».

Son PP est à $d'_m = 12,5$ cm. Déterminer son PR, situé à une distance D'_m de l'œil.

On pourra raisonner sur un œil fictif où le milieu liquide qui sépare le cristallin de la rétine est remplacé par de l'air, et en admettant que cela ne modifie pas le résultat.

Conseils

Revoir les définitions du PP et du PR.

La distance entre le cristallin (la lentille) et la rétine où se forment les images est constante. Il semble judicieux, ici, d'utiliser la relation de conjugaison de Descartes.

La relation de conjugaison appliquée à l'œil normal pour deux cas particuliers permet de déterminer ΔV .

2 Correction d'un œil myope

Un œil myope a son PR à 26 cm et un PP à 13,5 cm.

1 • Quelle doit être la vergence d'un verre correcteur placé à 1 cm du cristallin, pour que le PR de l'ensemble soit à l'infini ?

2 • Où est situé le PP de l'ensemble {œil-lentille} ?

3 • Reprendre le problème pour une lentille de contact.

Conseils

Est-il nécessaire de connaître la structure de l'œil pour répondre à ces questions ? Faire un schéma qui indique clairement la fonction de la lentille correctrice.

Pour répondre à la deuxième question, il faut utiliser une relation de conjugaison.

3 Pouvoir séparateur d'un œil myope non corrigé

Soit D_m la distance entre l'œil et le PR pour un œil myope, R le rayon de la pupille de l'œil, et f' la distance focale image du cristallin au repos, assimilé à une lentille mince. On pourra raisonner comme si le liquide intermédiaire entre le cristallin et la rétine était remplacé par de l'air. Pour simplifier les calculs, on remarquera que D_m est très grande devant la distance focale du cristallin.

1 • Déterminer le rayon r de la tache image associée à un objet ponctuel à l'infini si l'œil n'accommode pas.

2 • On considère que deux objets sont *résolus* par l'œil si leurs taches images sont disjointes. Calculer le pouvoir de séparation angulaire $\Delta\alpha$ de cet œil, défini comme le plus petit écart angulaire entre deux objets à l'infini résolus.

3 • D_m est égal à 25 cm. Calculer $\Delta\alpha$ si $R = 1$ mm, et si $R = 0,1$ mm. Pourquoi les myopes ont-ils tendance à fermer les paupières lorsqu'ils ne sont pas pourvus de leurs lunettes ?

Conseils

Lorsque l'œil n'accommode pas, quel est le plan conjugué de la rétine ?

Le foyer image du cristallin est-il en avant ou en arrière de la rétine ? Faire un schéma pour répondre à cette question.

La tache image est déterminée par l'intersection du faisceau de rayons issus d'un point à l'infini et de la rétine. Par quel point tous ces rayons passent-ils ? Faire le schéma de la construction de la tache image (on pourra prendre un point à l'infini dans la direction de l'axe optique).

Pour déterminer la distance entre le foyer image et la rétine, on peut utiliser une relation de conjugaison. Quelle est la plus appropriée ?

Le centre de la tache image sur la rétine d'un point objet à l'infini est déterminé par un rayon lumineux ; lequel ?

4 Loupe d'horloger

Cette loupe, lentille convergente d'une distance focale $f' = 5$ cm, est fixée à $e = 1$ cm de l'œil. L'objet est placé à distance d de la loupe.

1 • L'observateur est légèrement myope : son œil a un PP situé à $d_m = 20$ cm et un PR situé à $D_m = 1$ m. Pour quelles valeurs de d voit-il une image nette et non renversée de l'objet ?

2 • On se limite aux valeurs de d précédemment définies. L'objet, qui a une hauteur (normalement à l'axe optique) h de 1 mm, est vu sous un angle α' .

Exprimer α' en fonction de d, h, f' et e .

Étudier sommairement la fonction $\alpha'(d)$, déterminer les positions où α' est maximal et minimal.

3 • Calculer le maximum et le minimum de α' . Les comparer avec l'angle maximal α_0 sous lequel le même objet est vu à l'œil nu. Conclure.

4 • Reprendre la question 3) pour un œil « normal » dont le PP est à 25 cm et le PR à l'infini.

Conseils

- 1) Impose deux conditions *a priori* indépendantes :
 - l'image vue par l'observateur est nette ;
 - cette image est non renversée.
- 2) Il est nécessaire de faire un schéma sur lequel l'angle α' est clairement repéré. On rappelle que, dans les conditions de Gauss, $\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta$.
- 3) Où faut-il placer un objet pour le voir à l'œil nu sous un angle maximal ?
- 4) On remarquera que la valeur minimale de α' peut être déduite du grossissement commercial de la loupe.

5 Loupe ou oculaire

1 • Une lentille de focale $f' = 4$ cm sert de loupe pour un œil emmétrope ($d_m = 25$ cm) placé au foyer.

- a) Définir et exprimer la puissance intrinsèque de la loupe.
- b) Quelle est la profondeur d'accommodation, intervalle accessible à la vision dans la loupe ?

2 • Un oculaire est formé en associant deux lentilles de même focale $f' = 3a$ distantes de $e = 2a$, où a est une distance qui sera déterminée ultérieurement.

- a) Construire les foyers de l'oculaire. Retrouver les résultats en calculant les positions de F et F' pour cet oculaire. Peut-on lui associer un réticule ?
- b) Quelle valeur faut-il donner à a pour que l'oculaire ait la même puissance intrinsèque que la loupe précédente ?
- c) Quelle est la nouvelle profondeur d'accommodation lorsque l'œil est placé au foyer de l'oculaire ? Commenter les résultats obtenus.

Conseils

- 2)a) • Un faisceau parallèle à l'axe optique sort du système en passant par le foyer image F' (conjugué d'un point à l'infini).
 - Un faisceau issu du foyer objet F sort du système parallèle à l'axe optique (image à l'infini).

6 Grossissement d'une lunette

1 • Comment, avec deux lentilles de vergences 5 et -20 dioptries, obtenir une lunette afocale grossissante ? Déterminer son grossissement.

2 • Peut-on voir sur la Lune les cratères de Copernic (diamètre 93 km) et de Clavius (diamètre 225 km) à l'œil nu ? Qu'en est-il en utilisant la lunette ? La distance Terre-Lune vaut 384 000 km, et le pouvoir séparateur de l'œil vaut 1'.

Conseil

Pour un système afocal, un rayon arrivant parallèle à l'axe optique ressort parallèle à l'axe optique. Les foyers sont rejetés à l'infini.

7 Caractéristiques d'un microscope

On considère un microscope dont les caractéristiques sont les suivantes :

$f'_1 = 3,2$ mm, $f'_2 = 25$ mm et $\Delta = 160$ mm, où f'_1 désigne la distance focale de l'objectif, f'_2 celle de l'oculaire et Δ la distance entre le foyer image de l'objectif et le foyer objet de l'oculaire ($\Delta = F'_1 F_2$).

Il est réglé de façon à former une image à l'infini d'un objet placé sur sa platine.

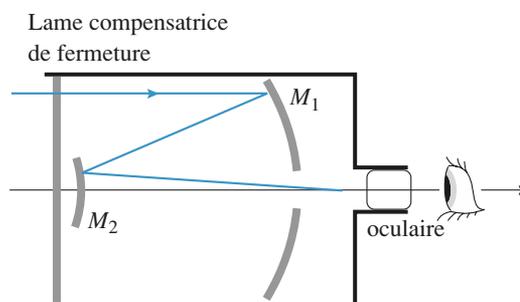
- 1 • Exprimer le grandissement transversal γ_l de l'objectif.
- 2 • Exprimer la puissance intrinsèque \mathcal{P}_{i_2} et le grossissement commercial G_{2C} de l'oculaire.
- 3 • Quel est le grossissement commercial du microscope ?

Conseils

En quel point doit être l'image de l'objet par l'objectif pour que l'image finale soit à l'infini ?

Utiliser ensuite la formule de Newton pour calculer γ_l .
Revoir les définitions de grandissement et de puissance.

8 Télescope de Schmidt-Cassegrain



Ce télescope est composé de deux miroirs sphériques : le miroir primaire M_1 est concave, de rayon de courbure $R_1 = 80$ cm, le miroir secondaire M_2 est convexe, de rayon de courbure $R_2 = 28$ cm. Ils sont distants de $d = \overline{S_2 S_1} = 30$ cm.

Une lame compensatrice ferme le tube du télescope en limitant les aberrations du miroir primaire.

1 • Faire un schéma du dispositif, calculer et positionner le foyer primaire F_1 , puis le foyer image F' du télescope.

2 • On note $r_1 = 12,5$ cm le rayon d'ouverture du miroir primaire, r_2 celui du miroir secondaire. En considérant le flux lumineux capté par le télescope pour un objet à l'infini dans la direction de l'axe, quelle valeur faut-il donner à r_2 pour récupérer tout le flux réfléchi par M_1 ?

3 • Le télescope est muni en sortie d'un oculaire de focale $f_\infty = 4$ cm assimilé à une lentille mince. Où faut-il positionner cet oculaire pour une observation de la Lune?

4 • Quels sont les diamètres D_1 et D_2 des images primaire et secondaire de la Lune? Quelle focale aurait-il fallu employer pour obtenir une image finale de même taille avec une simple lentille de projection? Commenter.

5 • Sous quel angle est vue la Lune à travers le télescope? Que vaut le grossissement de l'appareil?

Données : diamètre de la Lune $D_L = 5346$ km; distance Terre-Lune $d_L = 386 \cdot 10^6$ m.

Conseil

Il est conseillé de faire un schéma à l'échelle.

9 Lunette de Galilée

D'après CAPES

En 1610, Galilée témoigne de ses travaux concernant la lunette qui portera bientôt son nom :

« Je me suis mis à penser aux moyens de fabriquer l'instrument. J'y parvins si parfaitement que j'en construisis un, formé d'un tube de fer, extérieurement recouvert d'un drap cramoisi et long d'environ trois quarts de coudée*, il comprenait deux lentilles de la grandeur d'un écu à chaque extrémité, l'une plan concave, contre laquelle on plaçait l'œil, l'autre plan convexe... »

* La coudée est une unité de mesure correspondant à 50 cm.

Lettre de Galilée à B. Landucci.

« Quel spectacle magnifique et passionnant que de voir le corps lunaire, éloigné de nous de presque soixante rayons terrestres, rapproché au point de nous sembler éloigné seulement de deux rayons : son diamètre nous apparaît ainsi trente fois plus grand... qu'à l'œil nu... »

Adapté de Sidereus Nuncius,
Le Messenger des Étoiles,
(Galilée).

1 • Quelle est la nature des lentilles utilisées par Galilée?

2 • La lunette est réglée de façon à donner d'une étoile, objet à l'infini, une image à l'infini ce qui permet à l'observer

vateur d'éviter toute fatigue puisqu'il voit sans accommodation. Dans ces conditions la lunette est dite « afocale ».

a) Préciser et justifier la position des foyers dans une lunette « afocale ».

b) Réaliser un schéma, sans respecter les échelles, montrant le devenir d'un rayon incident faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant sous un angle α' dans les conditions de Gauss.

c) Déterminer l'expression du grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de

la lunette en fonction de f'_1 distance focale de l'objectif, et f'_2 distance focale de l'oculaire.

d) Montrer, en utilisant le texte de Galilée, que le grossissement de sa lunette est à peu près égal à 30; en déduire les valeurs approximatives des distances focales et des vergences de chacune des lentilles utilisées.

3 • Du haut du Campanile de Venise, les sénateurs vénitiens invités par Galilée observent avec cette lunette en direction de Murano, distante de deux kilomètres et demi. Ils distinguent avec enthousiasme le mouvement des gens!

a) Sous quel angle les personnes de 1,70 m sont-elles observées à travers l'instrument?

b) À quelle distance les sénateurs ont-ils, dans ces conditions, l'impression de voir les habitants de Murano, si l'on se réfère aux textes de Galilée rapportés ci-dessus? Comparer avec la position réelle de l'image obtenue.

Conseil

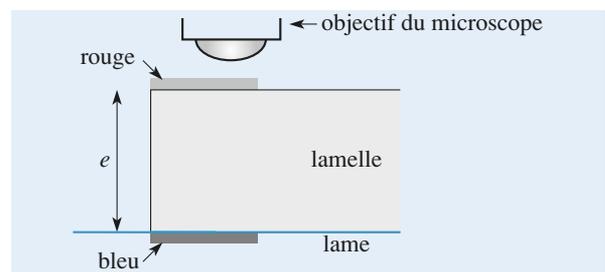
Si l'image d'un objet à travers une lunette est « loin » de l'œil (ici 2,8 m), l'œil ne peut pas apprécier sa position réelle; pour pouvoir apprécier les distances, il faut une vision binoculaire.

10 Mesure d'indice à l'aide d'un microscope

Soit un microscope comprenant un objectif assimilé à une lentille mince de focale f'_1 , et un oculaire de focale f'_2 distants de $\Delta + f'_1 + f'_2$. Son grossissement commercial est

donné par $G_C \approx \frac{\Delta}{4f'_1 f'_2}$, les distances étant exprimées en

mètre. On réalise la série d'expériences suivantes à l'aide de ce microscope.



On marque une lame de verre avec un trait de feutre bleu, puis on place par-dessus une lamelle sur la face supérieure de laquelle on fait une marque de feutre rouge. On met au point le microscope en visant successivement la marque de feutre rouge de la lamelle, la marque bleue de la lame vue à travers la lamelle et la marque bleue de la lame vue directement. La vis micrométrique de réglage graduée indique les valeurs suivantes (en μm) : 259, 121, 62.

1 • Quel grossissement minimal doit-on utiliser pour que l'erreur due à la latitude de mise au point soit inférieure à $1 \mu\text{m}$?

2 • Montrer que l'on peut déduire de ces mesures l'épaisseur et l'indice de la lamelle et donner leurs valeurs. L'œil est supposé placé au foyer image de l'oculaire, et le microscope réglé pour un œil normal sans accommodation (PP à $d_m = 20 \text{ cm}$, PR à l'infini). De plus on supposera que $f_2'^2 \ll \Delta$.

Conseils

1) La latitude de mise au point est due à l'accommodation de l'œil, c'est la distance entre l'objet vu à travers le microscope au PR de l'œil et à son PP.

Comme l'œil est placé au foyer image de l'oculaire, la formule de Newton est la mieux adaptée.

2) Le trait inférieur (bleu) est vu à travers la lamelle. Il faut chercher l'image de ce trait par la lamelle en utilisant les lois de Descartes pour les petits angles.

11 Le viseur

Extrait de E.S.M. de Saint-Cyr.

A. Principe d'un viseur

On désigne par d_m la distance minimale de vision distincte d'un observateur emmétrope (c'est-à-dire ayant une vision normale).

Un viseur est constitué d'un objectif et d'un oculaire de même axe optique (Ox) (système centré). On assimilera l'objectif à une lentille mince convergente L_1 de centre O_1 et de distance focale f_1' et l'oculaire à une lentille mince convergente L_2 de centre O_2 et de distance focale f_2' . On pose $O_1O = D$ et $OO_2 = d$ (les distances D et d sont positives et réglables).

Dans le plan orthogonal à l'axe (Ox), est disposé en O un réticule constitué de deux traits fins perpendiculaires, gravés dans une lame de verre à faces parallèles et servant à repérer la position de O . L'observateur place son œil à une distance a derrière l'oculaire ($a < d_m$).

1 • Quel est l'intervalle des valeurs de d permettant à l'observateur de voir net le réticule ?

En déduire une méthode de réglage de la position de l'oculaire pour une observation sans fatigue.

2 • Le réglage précédent est supposé réalisé. On souhaite observer un objet A situé sur l'axe optique à l'abscisse $x = \overline{OA}$; l'observation de l'image de l'objet A et du réticule doit se faire dans un même plan. Préciser dans quel intervalle de valeurs doit être situé x . En déduire la plage de réglage de la distance D que le constructeur doit prévoir. Déterminer l'expression de D en fonction de x .

3 • a) Un observateur myope souhaite utiliser le viseur sans ses verres correcteurs pour observer un objet A situé à l'infini, dans les conditions définies précédemment. Sachant que sa distance maximale de vision distincte est δ , calculer les valeurs des réglages qu'il doit effectuer.

b) En supposant que tous les utilisateurs du viseur, qu'ils soient myopes ou hypermétropes, ont des verres correcteurs de vergence comprise entre -8δ et $+8 \delta$, déterminer la plage de réglage de l'oculaire à prévoir pour que le viseur soit utilisable par tous sans verres correcteurs.

Données : $a = 0$ et $f_2' = 2 \text{ cm}$.

B. Étude de l'oculaire

L'oculaire est en fait un doublet de lentilles minces convergentes : L_3 de centre O_3 et de distance focale f_3' et L_4 de centre O_4 et de distance focale f_4' , distantes de $e = O_3O_4$ ($O_3O_4 > 0$).

1 • Le réticule étant toujours placé en O , l'observateur étant emmétrope, déterminer la valeur de $\overline{O_3O}$ pour une observation sans fatigue.

2 • Un oculaire de Ramsden vérifie $f_3' = f_4'$. Donner les conditions sur le rapport $\frac{e}{f_3'}$ pour que le réticule puisse être placé en avant de L_3 .

Conseils

A.1) L'image du réticule par l'oculaire doit être située devant l'œil à la distance minimale d_m .

2) Se rappeler que la distance minimale objet réel-image réelle est $d = 4f'$ par une lentille convergente.

3) Pour différents utilisateurs seul le tirage de l'oculaire est à modifier.

B. Lors de l'étude d'un oculaire, les formules de conjugaison de Newton sont mieux adaptées.

12 Viseur à frontale fixe

1 • Une lunette est constituée par un objectif, un réticule et un oculaire. On admettra, pour simplifier, qu'objectif et oculaire sont des systèmes minces de distances focales images f_0' et f_1' .

a) L'utilisateur à vue normale observe sans effort le réticule à travers l'oculaire.

• Quelle doit être la position du plan du réticule par rapport à l'oculaire ?

• Où l'utilisateur doit-il placer son œil ?

- Ce placement représente-t-il une contrainte importante pour l'observation ?

b) Le réglage de la lunette nécessite l'observation sans fatigue de l'image nette d'un objet situé à grande distance.

- Quelle est la distance entre objectif et oculaire dans ce cas ?
- Comment peut-on qualifier la lunette ainsi réalisée ?

c) Donner l'expression du grossissement (rapport des dimensions angulaires de l'image et de l'objet) en fonction des distances focales de l'objectif et de l'oculaire ; ce grossissement peut-il être positif, négatif ?

Une lunette sans réticule présente-t-elle les mêmes contraintes ?

2 • Transformation en « frontale fixe » par adjonction d'une bonnette

a) On place en avant de l'objectif une lentille supplémentaire, la bonnette, de distance focale f'_B et assimilée à une lentille mince.

- Montrer qu'un tel dispositif permet de viser des objets à distance constante de la bonnette.

- La distance entre bonnette et objectif est-elle quelconque ?

b) On suppose connues toutes les distances focales.

Exprimer la taille de l'objet visé en fonction de la taille de son image vue dans le plan du réticule (on supposera que le plan du réticule porte des graduations).

3 • Transformation en « frontale fixe » par déplacement de l'objectif

L'objectif est éloigné de l'oculaire de telle sorte que l'observateur obtienne une image nette d'un objet placé à une distance donnée de l'objectif égale à d .

- Quel est le déplacement de cet objectif ?

- Pourquoi dit-on que le viseur permet des pointés relatifs ?

Conseils

1) L'œil doit pouvoir observer une image sans accommoder la plus lumineuse possible.

2) Pour avoir un champ bien éclairé, il faut que la bonnette soit placée contre l'objectif.

1 PR d'un œil myope

Soit p' la distance entre le cristallin et la rétine (pour l'œil fictif). La formule de conjugaison de Descartes pour les lentilles minces donne :

• Pour l'œil normal :

– objet au PR :

$$0 + \frac{1}{p'} = V_{\min} ;$$

– objet au PP :

$$\frac{1}{d_m} + \frac{1}{p'} = V_{\max} .$$

De ces deux relations, on déduit :

$$\Delta V = V_{\max} - V_{\min} = \frac{1}{d_m} , \text{ soit } \Delta V = 4 \text{ dioptries.}$$

• Pour l'œil myope :

– objet au PR :

$$\frac{1}{D'_m} + \frac{1}{p'} = V'_{\min} ;$$

– objet au PP :

$$\frac{1}{d'_m} + \frac{1}{p'} = V'_{\max} ;$$

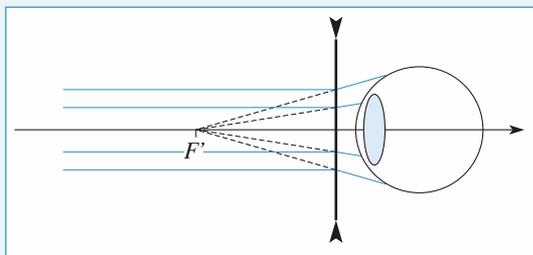
D'où :

$$\frac{1}{d'_m} - \frac{1}{D'_m} = V'_{\max} - V'_{\min} = \Delta V .$$

A. N. : $D'_m = 25 \text{ cm}$, ce qui est peu !

2 Correction d'un œil myope

1 • L'image par la lentille d'un objet à l'infini doit être dans le plan PR. De cette façon, l'œil peut en faire une image nette sans accommoder.



Le schéma montre que la lentille doit être divergente, et que son foyer image F' doit coïncider avec le PR.

La focale de la lentille est donc $f' = -(26 - 1) \text{ cm}$, soit $f' = -25 \text{ cm}$.

La lentille a une vergence négative de -4 dioptries (lentille divergente).

2 • Lorsque l'œil accommode au maximum, l'objet A est situé au PP du système {œil-lentille} ; son image A' par la

lentille est au PP de l'œil. On applique la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = V \text{ avec } \overline{OA'} = -(13,5 - 1) = -12,5 \text{ cm.}$$

On obtient $\overline{AO} = 25 \text{ cm}$. Le PP du système se trouve donc à 26 cm de l'œil.

3 • Les résultats sont peu modifiés pour une lentille de contact. La différence provient du fait qu'elle est accolée à l'œil. On a maintenant :

$$f' = -26 \text{ cm, soit } V = -3,85 \text{ dioptries.}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = -V \text{ avec } \overline{OA'} = -13,5 \text{ cm ;}$$

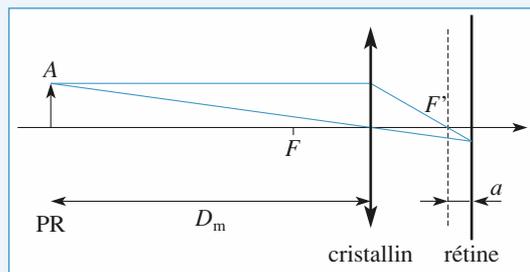
d'où $\overline{AO} = 28 \text{ cm}$.

Le PP se trouve maintenant à 28 cm de l'œil.

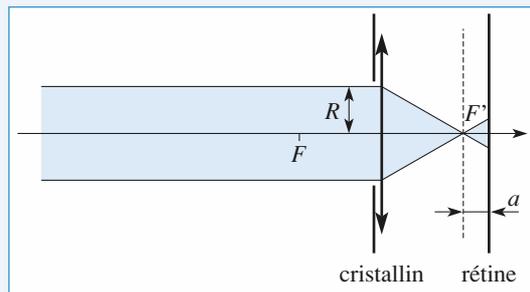
3 Pouvoir séparateur d'un œil myope non corrigé

1 • Lorsque l'œil n'accommode pas, l'image du PR est sur la rétine. La construction géométrique du *doc. 1* montre que le foyer F' est situé en avant de la rétine.

Tous les rayons issus d'un point à l'infini (dans la direction de l'axe sur le *doc. 2*) passent par un point du plan focal image (F' sur le *doc. 2*), et forment un faisceau dont la trace sur la rétine est un disque. Le rayon r de cette tache image se détermine simplement si on connaît la distance a entre le foyer image et la rétine.



Doc. 1. L'objet AB est placé au PR.



Doc. 2. L'objet AB est placé à l'infini.

Soit A un objet placé au PR. D'après la relation de Newton, $\overline{FA} \cdot a = -f'^2$;

comme $D_m \gg f'$, $\overline{FA} \approx -D_m$ et $a \approx \frac{f'^2}{D_m} \ll f'$.

D'après le doc. 2, $r = R \frac{a}{f'} \approx r \approx \frac{Rf'}{D_m}$.

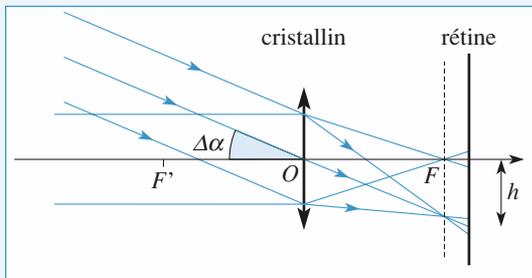
2 • Les positions des taches images des objets ponctuels sont déterminées par l'intersection du rayon non dévié passant par le centre optique avec la rétine (doc. 3).

Si la distance angulaire entre les deux objets est $\Delta\alpha$, les centres des taches images sont distants de :

$$h = \Delta\alpha(f' + a) \approx \Delta\alpha \cdot f'$$

Les deux taches sont disjointes si $h > 2r = \frac{2Rf'}{D_m}$.

À la limite de résolution: $\Delta\alpha = \frac{2R}{D_m}$.



Doc. 3. Les deux taches ne se recouvrent pas.

3 • Si $R = 1 \text{ mm}$, $\Delta\alpha = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$: cette résolution est environ vingt fois moins bonne que celle de l'œil normal ou corrigé; ainsi, à 10 mètres par exemple, la résolution est de 8 cm, ce qui rend impossible la lecture des panneaux indicateurs routiers.

Si $R = 0,1 \text{ mm}$, $\Delta\alpha = 8 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.

Le fait de fermer les paupières limite l'ouverture de la pupille, ce qui améliore la résolution, au prix, bien sûr, d'une perte de luminosité: ainsi un œil myope «regardant» à travers un trou circulaire de 0,1 mm de diamètre peut voir «net» sans correction.

Ceci est à rapprocher de l'utilisation du diaphragme d'un appareil photographique pour augmenter la profondeur de champ d'une photographie.

4 Loupe d'horloger

1 • L'observateur voit une image nette de l'objet si l'image de celui-ci par la lentille est comprise entre le PR et le PP.

Si cette condition est satisfaite, alors l'objet et l'image sont du même côté de la lentille et celle-ci n'est pas renversée. La première condition seule est donc suffisante.

On utilise la relation de conjugaison de Descartes :

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

• Si l'image est au PR, $-\frac{1}{D_m - e} + \frac{1}{d_{\max}} = \frac{1}{f'}$ (d est une distance, positive).

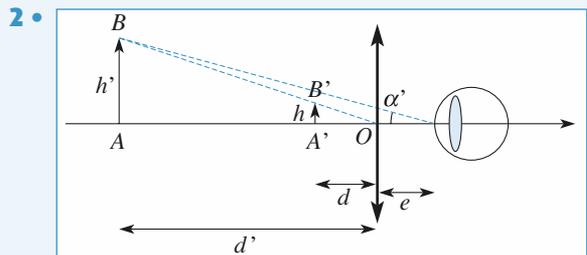
Alors: $d = d_{\max} = \frac{f'(D_m - e)}{f' + D_m - e}$.

Si l'image est au PP, on remplace D_m par d_m dans le résultat précédent.

• Finalement, l'intervalle cherché est :

$$\frac{f'(d_m - e)}{f' + d_m - e} < d < \frac{f'(D_m - e)}{f' + D_m - e}$$

Numériquement: $3,96 \text{ cm} < d < 4,76 \text{ cm}$.



Le centre optique, le point objet B et son image B' sont alignés. On en déduit :

$$h' = h \frac{d'}{d}$$

Dans l'approximation de Gauss :

$$\alpha' = \frac{h'}{d' + e} = \frac{hd'}{d(d' + e)} = \frac{h}{d \left(1 + \frac{e}{d'}\right)}$$

D'après la relation de Descartes: $-\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'}$;

d'où: $\alpha' = \frac{h}{d \left(1 - \frac{e}{f'}\right) + e}$.

• On remarque que, si l'œil est au foyer image ($e = f'$), α' est indépendant de d , donc de la position de l'objet.

• Dans le cas étudié, $e < f'$, et $\alpha'(d)$ est une fonction décroissante: La valeur maximale de α' est atteinte pour $d = d_{\min}$; la valeur minimale pour $d = d_{\max}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{3 \bullet \bullet} \quad \alpha'_{\max} &= \alpha'(d_{\min}) \\ &= \frac{h}{d_{\min} \left(1 - \frac{e}{f'}\right) + e} = \frac{h(f' + d_m - e)}{d_m f'} \end{aligned}$$

A.N.: $\alpha'_{\max} = 0,024 \text{ rad}$.

• $\alpha'_{\min} = \alpha'(d_{\max})$.

On obtient de même :

$$\alpha'_{\min} = h \frac{f' + d'_{\max}}{f'(d'_{\max} + e)} = h \frac{f' + D_m - e}{f'D_m}$$

A.N.: $\alpha'_{\min} = 0,021 \text{ rad}$.

• À l'œil nu, l'angle sous lequel on voit un objet est maximal lorsque celui-ci est au PP. Le même objet serait alors vu sous un angle $\alpha_0 = 0,005 \text{ rad}$.

La loupe apporte donc un « grossissement pratique » $\frac{\alpha'}{\alpha_0}$ de

l'ordre 4,5 dans tout le champ utilisable. De plus, lorsque d est voisin de d_{\max} , l'objet peut être observé sans accommodation.

4 • On reprend les mêmes expressions avec $d_m = 25 \text{ cm}$ et D_m infini.

$$\alpha'_{\max} = 0,023 \text{ rad}, \quad \alpha'_{\min} = 0,020 \text{ rad}$$

et $\alpha_0 = 0,004 \text{ rad}$.

Le « grossissement pratique » est ici de l'ordre de 5.

Or, l'observation à travers la loupe d'une image à l'infini et l'observation directe à 25 cm permettent de définir le grossissement commercial. On retrouve bien :

$$G_c = \frac{\alpha'_{\min}}{\alpha_0} = 5 = \frac{V_{(\text{dioptries})}}{4} = \frac{\mathcal{P}_i}{4}$$

si \mathcal{P}_i représente la puissance intrinsèque.

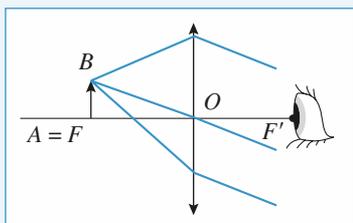
5 Loupe ou oculaire

1 • a) Lorsque l'objet AB observé est placé au foyer de la loupe ($A = F$), son image $A'B'$ à l'infini est vue sans fatigue (sans accommodation) par l'œil emmétrope sous l'angle

$$\alpha' = -\frac{\overline{AB}}{f'}$$

et la puissance intrinsèque vaut :

$$\mathcal{P}_i = \left| \frac{\alpha'}{\overline{AB}} \right| = \frac{1}{f'} = 25 \text{ dioptries.}$$

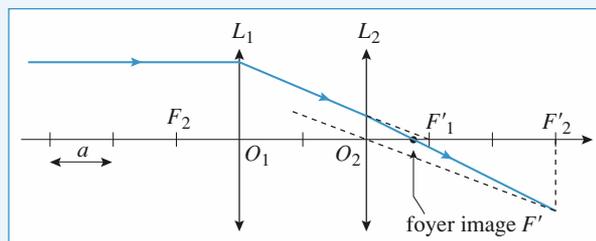


b) L'image est visible si $-\infty < \overline{F'A'} < -d_m$,

donc si $0 < \overline{FA} < \frac{f'^2}{d_m}$, correspond à une profondeur

d'accommodation $\frac{f'^2}{d_m} = 0,64 \text{ cm}$.

2 • a)



Le schéma illustre la construction de F' . Il suffit de reprendre le tracé de droite à gauche pour construire F . Le doublet étant symétrique, on a ici $\overline{O_1F} = -\overline{O_2F'}$.

Le foyer image est déterminé par les conjugaisons

$$\infty \xrightarrow{L_1} F'_1 \xrightarrow{L_2} F' \text{ soit } \overline{F_2F'_1} \overline{F'_2F'} = -f'^2, \text{ et donc :}$$

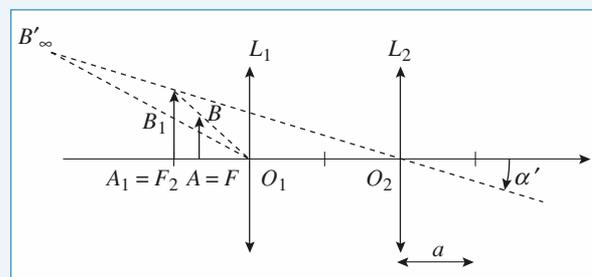
$$\overline{F'_2F'} = \frac{f'^2}{e - 2f'} = -\frac{9a}{4}, \text{ ou encore : } \overline{D_2F'} = \frac{3a}{4}.$$

De même, on a : $\overline{O_1F} = -\frac{3a}{4}$. On vérifie l'accord entre ces

valeurs et les constructions graphiques.

Le foyer objet F est réel (avant L_1), de sorte qu'un réticule placé dans son plan apparaît net, sans accommodation, à un observateur emmétrope qui le regarde à travers l'oculaire.

b)



Pour un objet AB dans le plan focal objet de l'oculaire ($A = F$), l'image intermédiaire A_1B_1 est dans le plan focal objet de la lentille d'œil L_2 ($A_1 = F_2$), et l'image finale $A'B'$ à l'infini.

Le schéma indique alors : $\frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F_2O_1}}{\overline{FO_1}} = \frac{4}{3}$, alors que

$$\text{l'image finale est vue sous l'angle } \alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'} = -\frac{\overline{A_1B_1}}{3a}.$$

La puissance intrinsèque vaut donc : $\mathcal{P}_i = \left| \frac{\alpha'}{\overline{AB}} \right| = \frac{4}{9a}$.

Elle est égale à celle de la loupe pour $a = 1,78 \text{ cm}$, donc $f' = 5,33 \text{ cm}$.

c) L'œil est en F' , et l'image A' telle que $-\infty < \overline{F'A'} < -d_m$.

On note $\overline{F'A'} = -d$, soit $\overline{F'_2A'} = -d - \frac{9a}{4}$,

$$\text{puis } \overline{F_2A_1} = \frac{-f'^2}{\overline{F'_2A'}} = \frac{9a^2}{9a + d},$$

$$\text{ensuite } \overline{F'_1A_1} = \overline{F_2A_1} + e - 2f' = \frac{-4ad}{9a + d},$$

$$\text{et enfin } \overline{F_1A} = \frac{-f'^2}{\overline{F'_1A_1}} = \frac{9a}{4d} \left(\frac{9a}{4} + d \right).$$

L'image A' est associée à l'objet A tel que : $\overline{FA} = \left(\frac{9a}{4} \right)^{2/d}$.

Pour $d = \infty$, $A = F$, et pour $d = d_m$, la profondeur d'accommodation vaut $\left(\frac{9a}{4}\right)^{2/d} = 0,64$ cm. Elle est inchangée, mais la focale plus longue.

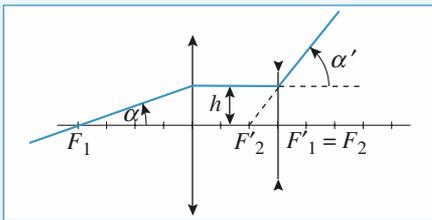
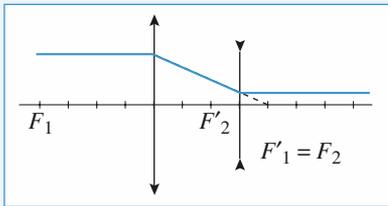
6 Grossissement d'une lunette

1 • Le système est afocal si $F'_1 = F_2$, comme le montre le premier schéma.

Le deuxième montre que le grossissement de la lunette est :

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{h/f_2}{h/f'_1} = \frac{f'_1}{f_2} = -\frac{v_2}{v_1} = 4.$$

Il est supérieur à 1 si on met la plus longue focale en position d'objectif, et la plus courte en position d'oculaire.



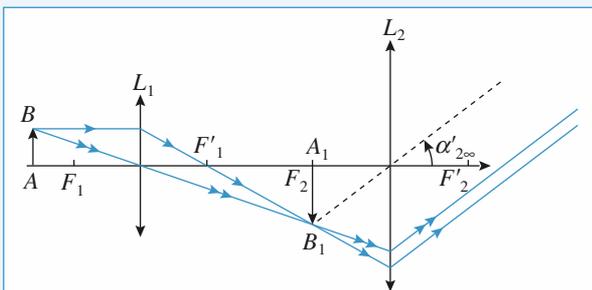
2 • À l'œil nu : $\alpha_{\text{Copernic}} = 0,83'$ et $\alpha_{\text{Clavius}} = 2,0'$, donc seul le cratère de Clavius est discernable. Avec la lunette, les deux sont visibles.

7 Caractéristiques d'un microscope

1 • L'image finale est à l'infini donc l'image intermédiaire donnée par l'objectif est dans le plan focal objet de l'oculaire. Si on utilise la formule de Newton du grandissement :

$$\gamma = \frac{A'B'}{AB} = -\frac{F'A'}{f'}$$

on obtient $\gamma_1 = \frac{A_1B_1}{AB} = -\frac{F_1F_2}{f'_1}$ (voir le schéma ci-dessous).



On obtient $\gamma_1 = -\frac{\Delta}{f'_1} = -50$. (Le - fait que l'image observée est renversée dans un microscope.)

2 • D'après la définition de la puissance intrinsèque :

$\mathcal{P}_1 = \left| \frac{\alpha'_\infty}{AB} \right|$ où α'_∞ est l'angle sous lequel on voit l'image de l'objet \overline{AB} quand elle est à l'infini :

$$\mathcal{P}_{i_2} = \frac{1}{f'_2} = 40 \text{ dioptries.}$$

Le grossissement commercial est le rapport $\left| \frac{\alpha'_\infty}{\alpha_{25}} \right|$, où α_{25} est l'angle sous lequel on voit l'objet quand il est à 25 cm de l'œil.

$$G_C = 0,25 \left| \frac{\alpha'_\infty}{AB} \right| = \frac{\mathcal{P}_{i_2}}{4} = 10.$$

3 • L'image finale est définie par l'angle :

$$\alpha'_{2\infty} = \mathcal{P}_{i_2} |A_1B_1| \text{ d'où } \alpha'_{2\infty} = \mathcal{P}_{i_2} |\gamma_1 \overline{AB}|.$$

Donc : $G_C = \frac{\alpha'_{2\infty}}{\left(\frac{AB}{0,25}\right)} = |\gamma_1| \mathcal{P}_{i_2} = 500$.

8 Télescope de Schmidt-Cassegrain

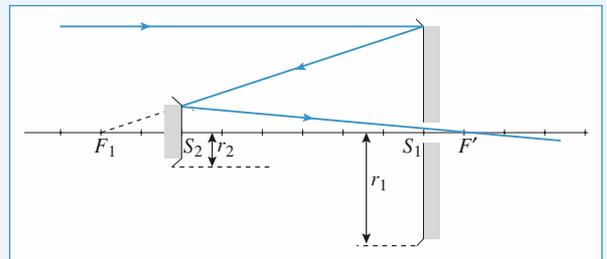
1 • L'image primaire est formée dans le plan focal du miroir

$$M_1 = \overline{S_1F_1} = -\frac{R_1}{2} = -40 \text{ cm.}$$

L'image finale sera dans le plan focal du télescope, et le foyer F' est l'image de F_1 par le miroir M_2 :

$$\frac{1}{S_2F_1} + \frac{1}{S_2F'} = \frac{2}{S_2C_2},$$

$$\text{soit : } \overline{S_2F'} = \frac{R_2(R_1 - 2d)}{2(R_2 + 2d - R_1)} = 35 \text{ cm.}$$



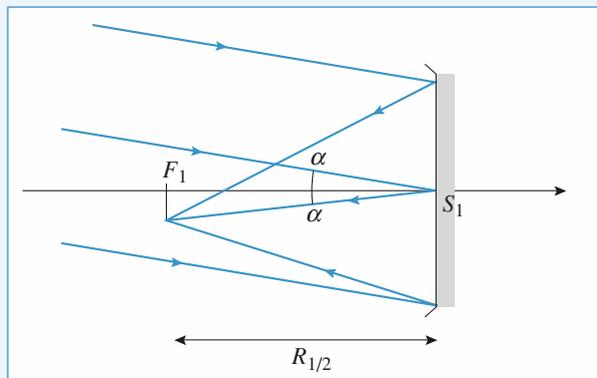
2 • La figure précédente est construite de sorte que le rayon incident, parallèle à l'axe du télescope, soit juste capté par le miroir secondaire, et on peut lire sur cette représentation :

$$\frac{r_1}{S_1F_1} = \frac{r_2}{S_2F_1}, \text{ soit : } r_2 = r_1 \cdot \left(1 - \frac{2d}{R_1}\right) \approx 3,75 \text{ cm.}$$

Ce résultat est conforme à l'allure du télescope réel visible dans l'énoncé de l'exercice.

3 • Une observation sans effort, par un œil emmétrope, suppose de placer l'oculaire à distance focale derrière le foyer F' : le télescope donne de l'objet humain, à l'infini, une image à l^∞ .

4 •



Si la Lune est vue sous l'angle :

$$\alpha = \frac{D_L}{d_L} = 9,0 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \approx 0,5^\circ,$$

l'image primaire, dans le plan focal du miroir M_1 , a un diamètre $D_1 = \alpha \cdot \frac{R_1}{2} = 3,6 \text{ mm}$.

L'image finale a un diamètre $D_2 = D_1 \cdot \left| \frac{S_2 F'}{S_2 F_1} \right| = 1,25 \text{ cm}$.

Une lentille de focale $f' = \frac{D_2}{\alpha} = 1,4 \text{ m}$ donnerait une image

de taille identique dans son plan focal image. L'encombrement du télescope, de l'ordre de $d = 30 \text{ cm}$, est nettement inférieur.

5 • L'image finale, à l'infini, est vue dans l'oculaire sous l'angle $\alpha' = \frac{D_2}{f_\infty} = 0,31 \text{ rad} \approx 18^\circ$. Cette valeur est un peu

élevée pour l'approximation de Gauss, mais on peut considérer que l'on voit bien des détails à la surface de la Lune...

Le grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ vaut ici 35.

9 Lunette de Galilée

1 • Une lentille à bords minces est convergente, une lentille à bords épais divergente.

L'objectif plan convexe est convergent, l'oculaire plan concave est divergent.

2 • a) On a la conjugaison suivante :

$$A_\infty \xrightarrow{\text{objectif}} A_1 = F'_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} A'_\infty$$

L'image intermédiaire se forme dans le plan focal image de l'objectif.

Pour que l'image finale soit à l'infini,

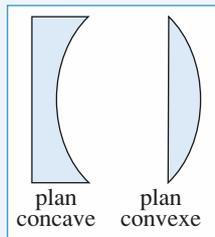
il faut que cette image intermédiaire soit dans le plan focal objet de l'oculaire.

Soit $F'_1 = F_2$: le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire.

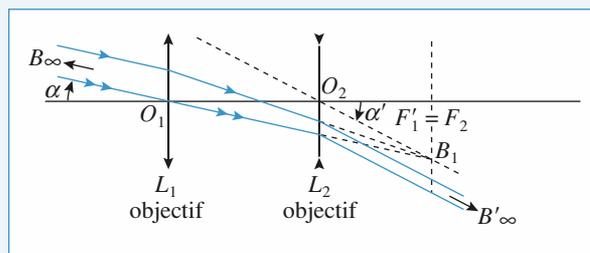
b) **Attention** : l'oculaire est divergent. Son foyer objet est à sa droite ! (doc. 2)

Pour le tracé du rayon lumineux, on utilise un rayon parallèle passant par le centre O_1 de L_1 non dévié par L_1 .

Comme ces rayons sont parallèles avant L_1 , leurs supports se recoupent après L_1 dans le plan de front de $F'_1 = F_2$ au point B_1 .



Doc. 1



Doc. 2. Lunette de Galilée.

Pour tracer les rayons après L_2 , on trace le rayon qui entre L_1 et L_2 passe par O_2 et par B_1 .

Ce rayon n'est pas dévié et à la sortie de L_2 , les trois rayons sont parallèles, car leurs supports dans le milieu incident de L_2 se coupent dans le plan focal objet de L_2 .

c) D'après le schéma ci-dessus (doc. 2) :

$$\alpha' = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_2 F'_1}} = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_2 F_2}} = -\frac{\overline{F'_1 B_1}}{f'_2} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}} = \frac{\overline{F'_1 B_1}}{f'_1} ;$$

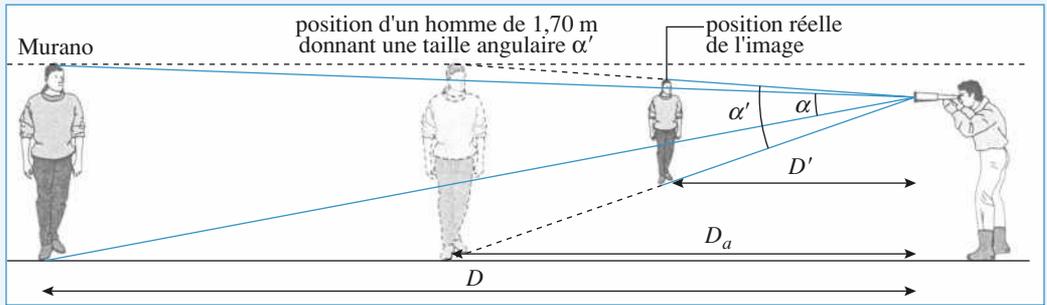
d'où :
$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} .$$

d) D'après l'observation de la Lune, le diamètre angulaire de celle-ci est multiplié par 30, donc $G = 30$. D'après le doc. 2 :

$$\overline{O_1 O_2} = \overline{O F'_1} + \overline{F_2 O_2} = f'_1 + f'_2 .$$

On a donc $f'_1 + f'_2 = 37,5 \text{ cm}$ et $f'_2 = -\frac{f'_1}{30}$. D'où $f'_1 \approx 38,8 \text{ cm}$ et $f'_2 \approx -1,3 \text{ cm}$.

Doc. 3. L'œil normal n'a pas besoin d'accommoder à 2,8 m, donc il n'y a pas de différence entre voir l'image d'un homme de $\frac{1,70}{30} \approx 5,7$ cm à 2,8 m ou de 1,70 m à 83 m.



3 • a) Les gens observés peuvent être considérés comme étant à l'infini.

On a donc $\alpha' = G\alpha$ avec $\alpha = \frac{h}{D}$ où h est la taille de l'homme et D la distance homme-lunette. Soit $\alpha' = 2,0 \cdot 10^{-2}$ rad ou $\alpha' = 1^\circ 10'$.

b) Si on extrapole l'impression de rapprochement obtenu dans le cas de la Lune, les gens semblent à une distance apparente: $D_a = \frac{D}{30} \approx 83$ cm, car ils sont vus sous l'angle

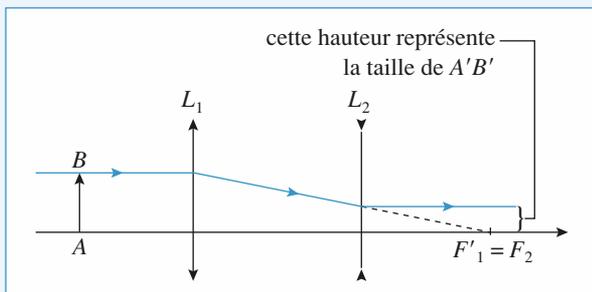
$$\alpha' = 30\alpha = 30 \frac{h}{D}$$

En fait, cet angle correspond à $\alpha' = \frac{h'}{D'}$ où h' est la taille réelle de l'image, et D' sa distance réelle.

Sur le doc. 4, on peut lire: $h' = -\frac{f_2'}{f_1} h = \frac{h}{30}$. On en déduit

que l'image est en fait à $D' = \frac{h'}{\alpha'} = \frac{h}{30\alpha} = \frac{D}{900} \approx 2,8$ m.

C'est-à-dire encore 30 fois plus près qu'on le pensait par simple impression visuelle.



Doc. 4

10 Mesure d'indice à l'aide d'un microscope

1 • Soit A_{PR} (A_{PP}) le point dont l'image se forme au PR (PP) de l'œil. La latitude de mise au point δ est la distance $A_{PR}A_{PP}$.

Si L_1 est l'objectif et L_2 l'oculaire:

$$A_{PR} \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} PR(\infty).$$

$$A_{PP} \xrightarrow{L_1} A'_{PP} \xrightarrow{L_2} PP.$$

• La formule de conjugaison de Newton pour L_1 et A_{PR} donne:

$$\overline{F_1 A_{PR}} \cdot \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2, \text{ soit } \overline{F_1 A_{PR}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}.$$

• La formule de Newton pour L_2 et PP donne:

$$\overline{F_2' PP} \cdot \overline{F_2 A'_{PP}} = -f_2'^2.$$

$$\overline{F_2' PP} = -d_m \text{ (PP avant l'œil), donc } \overline{F_2 A'_{PP}} = \frac{f_2'^2}{d_m}.$$

La formule de Newton pour L_1 donne:

$$\overline{F_1 A_{PP}} \cdot \overline{F_1' A'_{PP}} = -f_1'^2,$$

$$\text{soit } \overline{F_1 A_{PP}} = \frac{-f_1'^2}{\Delta + f_2'^2/d_m} \approx -\frac{f_1'^2}{\Delta} \left(1 - \frac{f_2'^2}{\Delta d_m}\right).$$

$$\text{Donc: } \delta \approx \frac{f_1'^2 f_2'^2}{\Delta^2 d_m} = \frac{1}{16 G_c^2 d_m} \text{ et } G_c > 560$$

pour $\delta < 1 \mu\text{m}$.

2 • En posant $x_1 = 259 \mu\text{m}$, $x_2 = 121 \mu\text{m}$ et $x_3 = 62 \mu\text{m}$, $x_1 - x_3$ représente l'épaisseur e de la lamelle; $x_1 - x_2$ représente la distance e' entre l'image du trait bleu par la lamelle et la surface de la lame.

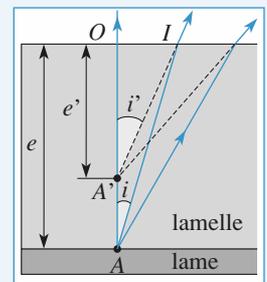
$n \sin i = \sin i'$, soit $ni \approx i'$.

$$\tan i = \frac{OI}{OA} \text{ et } \tan i' = \frac{OI}{OA'};$$

$$\text{d'où } OA' = \frac{OA}{n}, \text{ soit } e' = \frac{e}{n}.$$

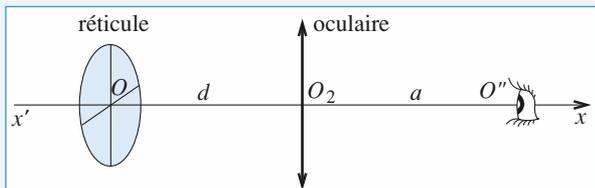
On a donc $e = 197 \pm 2 \mu\text{m}$;

$$e' = 138 \pm 2 \mu\text{m} \text{ et } n = \frac{e}{e'} = 1,43.$$



11 Le viseur

A. 1 • Soit O'' la position de l'œil et O' l'image de O par l'oculaire.



L'œil peut voir O' si O' est situé devant lui entre d_m et l'infini.
 $d_m \leq \overline{O'O''}$ ou $\overline{O_2O'} \leq a - d_m < O$.

D'après la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_2O'}} - \frac{1}{\overline{O_2O}} = \frac{1}{f_2'} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{d} = \frac{1}{f_2'} - \frac{1}{\overline{O_2O'}}$$

$$d = \frac{\overline{O_2O'} f_2'}{\overline{O_2O'} - f_2'}$$

d est une fonction décroissante de $\overline{O_2O'}$ quand $\overline{O_2O'}$ varie de $-\infty$ à $a - d_m$.

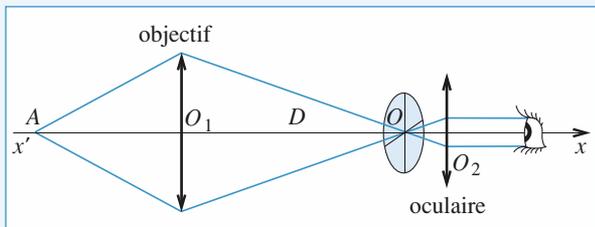
Pour une observation sans fatigue, on doit placer O en F_2 .

La plage de réglage du réticule est donnée par :

$$\Delta d = f_2' - \frac{f_2'(a - d_m)}{a - d_m - f_2'} = \frac{f_2'^2}{f_2' + d_m - a}$$

Δd est minimale si $a = 0$: l'observateur a tout intérêt à coller son œil contre L_1 pour régler la position de l'oculaire.

2 •



$A \xrightarrow{L_1} O$

A et O sont réels, on a donc $O_1O > f_1'$.

Si A est à l'infini, son image se forme en F_1' . On doit avoir $F_1' = O$, donc $D_{\min} = f_1'$.

D'autre part, la distance minimale objet réel-image réelle est égale à $4f_1'$ (résultat à connaître). On a alors A situé à $2f_1'$ de L_1 et $\overline{O_1O} = 2f_1'$, soit : $D_{\max} = 2f_1'$.

Donc : $x < -4f_1'$ et $f_1' < D < 2f_1'$.

Pour un x donné, on détermine D :

$$\frac{1}{\overline{O_1O}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'} \quad \text{avec} \quad \overline{O_1O} = D \quad \text{et} \quad \overline{O_1A} = D + x.$$

Donc : $D_2 + Dx - x f_1' = 0$ et $D = \frac{-x + \sqrt{x(x + 4f_1')}}{2}$.

3 • a) L'objet A est à l'infini. Son image se forme en O pour $D = f_1'$.

L'observateur myope observe O' sans fatigue si :

$$\overline{O_2O'} = a - \delta.$$

Il doit régler l'oculaire pour avoir $\frac{1}{\overline{O_2O'}} - \frac{1}{\overline{O_2O}} = \frac{1}{f_2'}$,

$$\text{soit} \quad \overline{O_2O} = \frac{f_2'(\delta - a)}{a - \delta - f_2'} \quad \text{et} \quad d = \frac{f_2'(a - \delta)}{a - \delta - f_2'}.$$

L'observateur devra commencer par régler l'oculaire de façon à voir net le réticule ; ensuite, il devra régler le tirage de la lunette pour voir l'image de A nette : l'image A' de A par l'objectif sera dans le plan du réticule.

b) Œil myope : $\delta = \frac{1 \text{ m}}{8} = 12,5 \text{ cm}$; $d_{\min} = 1,72 \text{ cm}$.

Œil hypermétrope : $\delta = -\frac{1 \text{ m}}{8} = -12,5 \text{ cm}$; $d_{\max} = 2,38 \text{ cm}$.

B. 1 • O est au foyer objet F de l'oculaire $F \xrightarrow{L_3} F_4 \xrightarrow{L_4} \infty$.

Formule de Newton : $\overline{F_3F} \cdot \overline{F_4'F_4} = -f_3'^2$,

avec $\overline{F_3'F_4} = e - f_3' - f_4'$;

$$\overline{F_3F} = \frac{-f_3'^2}{e - f_3' - f_4'} \quad \text{et} \quad \overline{O_3O} = \overline{O_3F} = \overline{O_3F_3} + \overline{F_3F}$$

$$\overline{O_3O} = -f_3' - \frac{f_3'^2}{e - f_3' - f_4'} = f_3' \frac{e - f_4'}{e - f_3' - f_4'}$$

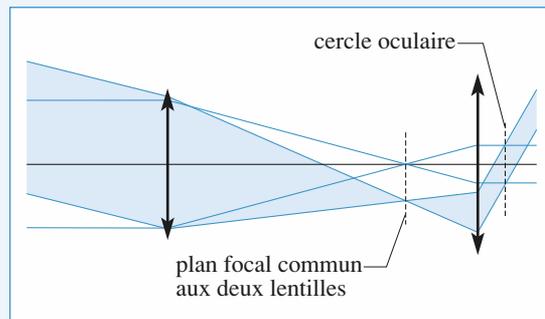
2 • Oculaire de Ramsden : $\overline{O_3O} < 0$, soit : $\frac{e - f_3'}{e - 2f_3'} > 0$

d'où $e > 2f_3'$ ou $e < f_3'$.

12 Viseur à frontale fixe

1 • a) Pour que l'œil normal observe sans effort un objet, celui-ci doit être à l'infini par rapport à l'œil. Le réticule doit être placé dans le plan focal objet de l'oculaire.

• La position de l'œil n'a pas d'importance pour la netteté de l'image du réticule car celle-ci est à l'infini. Cependant le champ de vision dépend de la position de l'œil. La position optimale correspond à l'emplacement du cercle oculaire image de l'objectif par l'oculaire. En pratique, elle est assez proche du foyer image de l'oculaire.



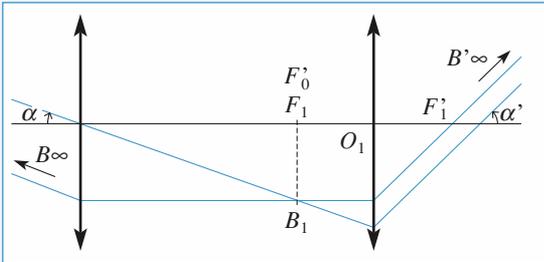
Doc. 1

• Cette contrainte est assez faible car la distance focale de l'oculaire est courte et il suffit de placer l'œil contre l'oculaire.

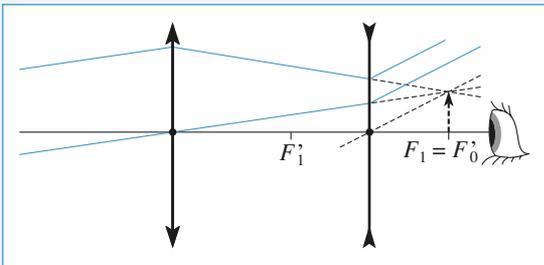
b) L'objet observé est à grande distance de la lunette, donc l'objectif donne une image intermédiaire dans son plan focal image. L'image finale devant être rejetée à l'infini, le foyer image de l'objectif est confondu avec le foyer objet de l'oculaire. La distance objectif-oculaire est donc $f'_0 + f'_1$.

La lunette obtenue est dite afocale, car elle ne possède pas de foyer: un rayon lumineux parallèle à l'axe optique ressort parallèlement à l'axe optique.

c) On utilise les documents suivants (doc. 2 et 3).



Doc. 2. L'oculaire est une lentille convergente.



Doc. 3

$$\alpha \approx \frac{F_1 B_1}{f'_0}; \quad \alpha' \approx -\frac{F_1 B_1}{f'_1}$$

D'où:
$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_0}{f'_1}$$

f'_0 est toujours positive, en revanche:

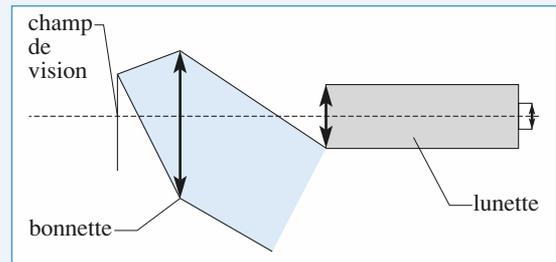
- si l'oculaire est une lentille convergente ($f'_1 > 0$), le grossissement est négatif: l'image est renversée (lunette astronomique) (cas du doc. 2);

- si l'oculaire est une lentille divergente ($f'_1 < 0$), le grossissement est positif: l'image est droite (lunette de Galilée) (cas du doc. 3).

Pour voir le réticule, il est nécessaire que le foyer objet de l'oculaire soit réel. L'oculaire est alors une lentille convergente et $G < 0$.

2 • a) On peut décomposer le dispositif en deux parties, la bonnette qui donne d'un objet AB une image $A_B B_B$ et la lunette.

- La lunette est réglée à l'infini, donc $A_B B_B$ doit être à l'infini, c'est-à-dire que l'objet pointé se trouve dans le plan focal de la bonnette, donc à la distance f'_B de celle-ci.



Doc. 4. Plus la lunette est proche de la bonnette, plus le champ de vision est important.

- La position de la bonnette par rapport à la lunette est *a priori* indifférente, $A_B B_B$ reste toujours à l'infini. Cependant pour des raisons de champ de vision, il est conseillé de la coller contre la lunette.

b) Soit un objet \overline{AB} dans le plan focal objet de la bonnette. Les rayons lumineux provenant de B ressortent sous un angle $\alpha = \frac{-\overline{AB}}{f'_B}$ de la bonnette. D'après 1) c), $\alpha = \frac{\overline{F_1 B_1}}{f'_0}$

d'où le rapport des tailles
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{F_1 B_1}} = -\frac{f'_0}{f'_B}$$

3 • L'image d'un objet placé à d de l'objectif est dans le plan focal objet de l'oculaire:

$$A \xrightarrow{\text{objectif}} A_1 = F_1 \xrightarrow{\text{oculaire}} A'_\infty$$

La formule de conjugaison des lentilles appliquée à l'objectif

donne $\frac{1}{d} + \frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{f'_0}$, soit $\overline{OA_1} = \frac{d f'_0}{d - f'_0}$.

Il faut donc que $d > f'_0$ et avancer l'objectif par rapport à

l'oculaire de $\overline{OA_1} - f'_0$, soit de $\frac{f_0'^2}{d - f_0'}$.

On peut repérer de façon précise la position de la lunette. La mesure absolue de la position d'un objet avec la lunette est impossible car on ne connaît ni d , ni la position exacte de l'objectif dans la lunette avec précision.

En revanche, ces deux grandeurs sont constantes, et la différence des mesures successives de la position de la lunette lors du pointé de deux objets donne la distance entre ces objets.

Le viseur permet donc des pointés relatifs.

LES OBJECTIFS

- Observations, repérages, mesures à l'exception de quelques expériences simples à base de lentilles ou miroirs.

LES PRÉREQUIS

- Miroirs, lentilles, instruments optiques.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Si vous connaissez les fractions, toujours rien !

ESSENTIEL**◀ Méthode d'autocollimation**

L'image d'un objet placé dans le plan focal objet est obtenue après :

- la traversée de la lentille ;
- la réflexion sur le miroir plan ;
- la traversée de la lentille en sens inverse.

Elle est dans le plan focal objet de la lentille. Son grandissement est égal à -1 ; l'image est inversée.

◀ Lentille convergente**• Méthode de Silbermann**

Elle consiste à obtenir l'image réelle d'un objet réel, celle-ci étant le symétrique de l'objet par rapport au plan de la lentille.

La distance objet-image est $D = 4f'$.

• Méthode de Bessel

Pour une distance $D > 4f'$ entre un objet réel et son image réelle, il existe deux positions de la lentille convergente, distantes de d , pour lesquelles l'image est nette. D , d et f' vérifient :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D} .$$

◀ Lentille divergente

Pour mesurer la distance focale d'une lentille divergente, il suffit de l'accoler à une lentille suffisamment convergente, de distance focale connue, afin de créer un système convergent. Les méthodes de Silbermann et Bessel sont alors applicables.

◀ Viseur

L'emploi d'un viseur permet de généraliser les méthodes de mesure précédentes ou de vérifier la relation de conjugaison avec un objet réel ou virtuel et une image réelle ou virtuelle.

Conseils et pièges à éviter

- Souvent des constructions simples permettent de résoudre les exercices.
- Bien connaître la méthode d'autocollimation, aussi bien pour résoudre des exercices qu'en Travaux Pratiques.
- Il faut connaître les relations de conjugaison de Descartes et de Newton par cœur.

1 Détermination rapide d'une focale

Un objet réel donne une image réelle renversée et de même taille. Quelle est la lentille utilisée ?

Conseil Un schéma et/ou une relation de conjugaison suffit à résoudre cette question.

2 Déplacement transversal

Un objet réel est placé de façon à ce qu'une lentille en donne une image droite.

Un léger déplacement transversal de la lentille entraîne un déplacement de l'image observée dans le même sens. La lentille est-elle convergente ou divergente ?

Conseil Ne pas hésiter à faire des schémas.

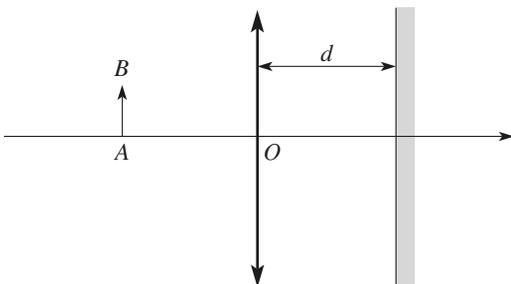
3 Existe-t-il une méthode de Bessel pour les miroirs concaves ?

On place un demi-écran à une distance D d'un objet réel. Existe-t-il deux positions d'un miroir convergent, distantes de d , donnant une image nette de l'objet sur le demi-écran ?

Conseil Appliquer les relations de conjugaison de Descartes. Pour pouvoir appliquer la méthode de Bessel, il faut que l'objet et l'image soient tous deux réels pour deux positions du miroir : on montrera qu'avec un miroir, ceci est impossible.

4 Autocollimation

Un système catadioptrique est constitué par une lentille mince convergente associée à un miroir plan : les rayons utilisés dans ce système traversent la lentille, sont réfléchis par le miroir, et traversent de nouveau la lentille.



1 • Le réglage par autocollimation

a) Quelle est l'équation polynomiale liant $p = \overline{OA}$ et $p' = \overline{OA'}$, où A' est le conjugué du point A par le système catadioptrique {lentille-miroir} ?

b) À quelle condition l'objet AB et son image $A'B'$ par le système peuvent-ils appartenir au même plan ?

Effectuer les constructions correspondantes et préciser le grandissement γ obtenu dans chaque cas.

c) Rappeler le but et le principe du réglage par autocollimation.

d) Le calcul précédent semble laisser une ambiguïté quant à la validité du réglage. Comment la lever ?

2 • Un réglage curieux

Un expérimentateur montre cette expérience sur un banc optique. En déplaçant la lentille, il constate la formation d'une image réfléchie nette dans le plan objet. Mais en passant le bras entre la lentille et le miroir, il constate que l'image ne disparaît pas !

a) Pouvez-vous expliquer ce qui se passe, en précisant où est réfléchie la lumière qui forme cette image ?

b) La lentille mince sphérique utilisée est équiconvexe, son épaisseur est de l'ordre de 5 mm. Lorsque le « réglage » précédent est réalisé, la distance $-p$ vaut 6,2 cm.

Évaluer le rayon de courbure des faces de cette lentille, et discuter la validité de l'hypothèse de minceur de la lentille utilisée. Quelle est la vergence de la lentille utilisée ?

Donnée : La focale d'une lentille en verre d'indice n , placée dans l'air, dont les faces ont pour rayon de courbure R_1 et R_2 , est donnée par :

$$\frac{1}{f'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Conseils Utiliser les formules de conjugaison d'une lentille et d'un miroir, et effectuer les constructions usuelles d'images et d'objets.

Attention au sens dans lequel voyage la lumière dans ce système catadioptrique lors de l'utilisation de ces formules (et donc attention aux signes) !

Pensez à la réflexion partielle de la lumière par les faces de la lentille.

5 *Repérage du plan focal par autocollimation

Un objet lumineux est constitué par une figure découpée dans un écran. Pour repérer le plan focal d'une lentille, on réalise le montage représenté sur le schéma ci-après.

Le miroir plan est proche de la lentille (de façon à perdre le minimum de luminosité de la source).



1 • Faire une construction graphique des images successives d'un objet AB dans le plan du diaphragme. Justifier alors la valeur de la distance diaphragme-lentille lorsque l'autocollimation est réalisée. L'inclinaison du miroir a-t-elle une influence sur ce réglage ?

2 • L'objet est un trou de diamètre $d = 1$ mm. La lentille a une distance focale image f' égale à 200 mm, et un diamètre D de 5 cm. On s'aperçoit que l'image du trou est floue si son diamètre d' excède 2 mm. Estimer la précision de la méthode.

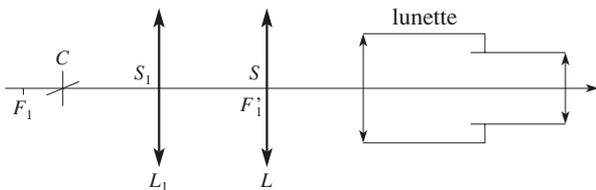
Conseils

- 1) Les constructions graphiques avec un miroir plan ou une lentille mince sont classiques. Faire un schéma de l'autocollimation puis une lecture plus facile.
- 2) Faire apparaître les dimensions de la « torche image », dans le cas où le réglage n'est pas parfaitement réalisé.

6 Frontofocomètre

On appelle distance focale frontale d'une lentille L (qui peut être épaisse) la longueur algébrique \overline{SF} entre le sommet S de sa face d'incidence et son foyer principal objet F . Pour mesurer la distance focale frontale d'une lentille, on utilise le système centré décrit ci-dessous, appelé frontofocomètre. En se limitant aux lentilles minces, les distances focales frontales sont égales aux distances focales objet $\overline{SF} = f$.

L'appareil est construit de façon à ce que le sommet S de la lentille L à étudier soit au foyer image principal F'_1 d'une lentille convergente L_1 de distance focale f'_1 connue. Un réticule R , placé en avant de la lentille L_1 , peut se déplacer le long de l'axe optique du système, le point de croisée C restant sur l'axe.



On règle la position du point C de façon à ce que le réticule soit vu nettement dans une lunette mise au point à l'infini et placée derrière la lentille L . On relève la position du point C qui est repérée par $\overline{F_1C}$, c'est-à-dire par rapport au foyer objet F_1 de la lentille L_1 .

1 • Déterminer, par deux méthodes (application des lois de Descartes, puis application des lois de Newton), la distance

focale f' de la lentille L en fonction de f'_1 et de $\overline{F_1C}$. Peut-on utiliser la méthode pour tous les types de lentilles ?

2 • Quelles sont les distances focales des lentilles L pour lesquelles l'appareil est inutilisable ?

3 • Le frontofocomètre utilise une lentille L_1 de distance focale $f'_1 = 15$ cm. Pour une lentille L dont on veut déterminer la distance focale f' , il faut placer le réticule en C tel que $\overline{F_1C} = -10$ cm. Déterminer f' et tracer la marche d'un faisceau lumineux issu de C .

Conseil

Revoir les diverses relations de conjugaison (Descartes et Newton) des lentilles minces.

7 Abaque à points alignés

Pour une lentille L donnée, on repère la position de l'image A' d'un point A de l'axe, pour différentes positions O de la lentille.

Pour chaque mesure, on trace la droite passant par les points $(\overline{OA}; 0)$ et $(0; \overline{OA'})$ dans un repère orthonormé.

1 • Montrer que la pente de la droite tracée est l'opposée du grandissement entre A et A' .

2 • Montrer que toutes les droites sont concourantes et préciser leur point d'intersection.

3 • On place sur un banc d'optique un objet (réticule éclairé), une lentille et un viseur.

• La lentille étant enlevée, on pointe l'objet. La position du viseur est alors $d_0 = 21,2$ cm.

• On place la lentille, puis on pointe successivement la face de sortie de la lentille (position d_1 du viseur) et l'image du réticule (position d_2 du viseur).

On obtient les tableaux de mesures suivants pour deux lentilles L et L' .

	lentille L			
d_1 (cm)	26,3	31,0	41,3	61,2
d_2 (cm)	22,5	25,0	32,7	50,3

	lentille L'			
d_1 (cm)	26,1	41,3	51,4	61,0
d_2 (cm)	16,1	61,4	66,2	74,3

Déduire de ces mesures les distances focales des lentilles.

Conseils

Utiliser la relation de conjugaison de Descartes pour exprimer l'équation de la droite tracée en fonction du seul paramètre $p = \overline{OA}$.

Quelle relation existe-t-il entre les positions pointées d_0 , d_1 et d_2 et les paramètres p et $p' = \overline{OA'}$?

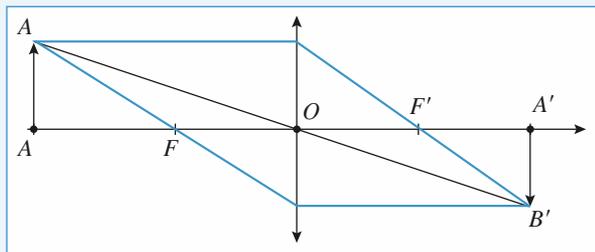
Le tracé des quatre droites donne un encadrement de f' . Pourquoi ?

1 Détermination rapide d'une focale

Pour $\gamma = \frac{p'}{p}$, la relation de Descartes $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$,

donne : $p' = -p = 2f'$.

L'objet étant réel ($p < 0$), la lentille est convergente, de focale égale à la moitié de la distance objet-lentille. On reconnaît ici la position de Silbermann.

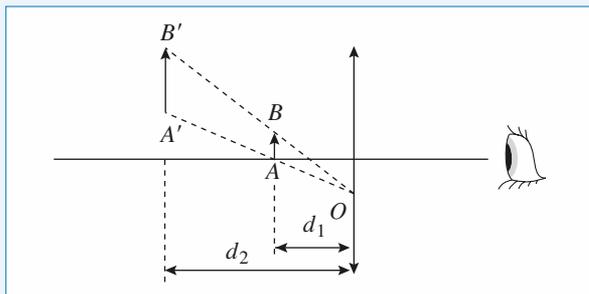
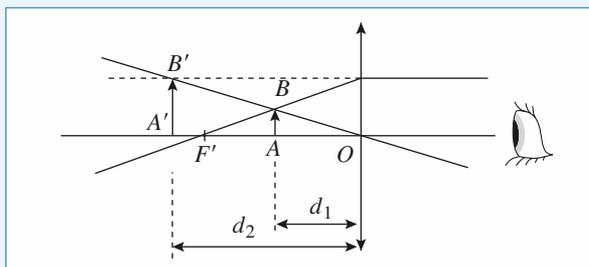
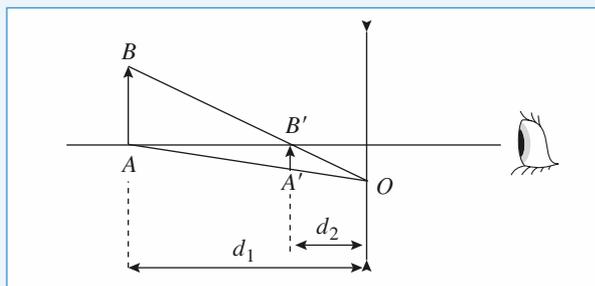
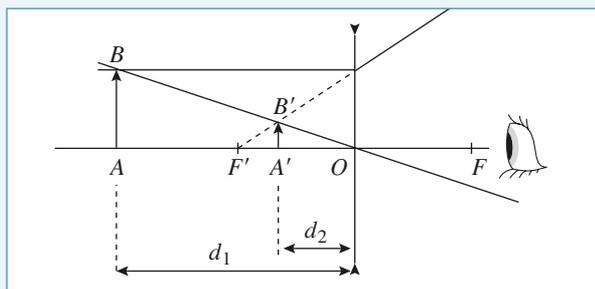


Doc. Position de Silbermann : $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$

2 Déplacement transversal

L'image est droite, donc le grandissement est positif, et l'objet et l'image sont du même côté de la lentille : l'objet est réel, l'image est virtuelle.

C'est le cas avec une lentille divergente, ou avec une lentille convergente dans le cas où l'objet est entre le foyer objet la lentille. Il suffit d'envisager ces deux cas, et de déplacer la lentille pour conclure :



Dans les deux cas, les distances d_1 et d_2 ne sont pas modifiées par le déplacement vers le bas de la lentille. Et l'image $A'B'$ se déplace vers le bas aussi si la lentille est *divergente*.

3 Existe-t-il une méthode de Bessel pour les miroirs concaves ?

On note O le sommet du miroir.

$p = \overline{OA}$; $p' = \overline{OA'}$; $D = \overline{AA'} = \overline{AA'}$.

Formule de Descartes :

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

$p < 0$ et $p' < 0$, car on veut une image réelle d'un objet réel ; de plus on veut $p' = p + D$. D'où :

$$p^2 + p(D - 2f') - Df' = 0.$$

Il y a deux racines p_1 et p_2 , car :

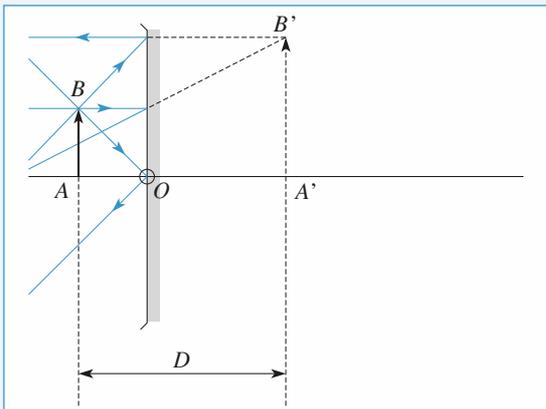
$$\Delta = (D - 2f')^2 + 4Df'^2 = D^2 + 4f'^2 > 0.$$

$p_1 < 0$ et $p_2 < 0$, donc $p_1 + p_2 < 0$. Or $p_1 + p_2 = 2f' - D$,

d'où : $D - 2f' > 0$, soit $D > 2f'$.

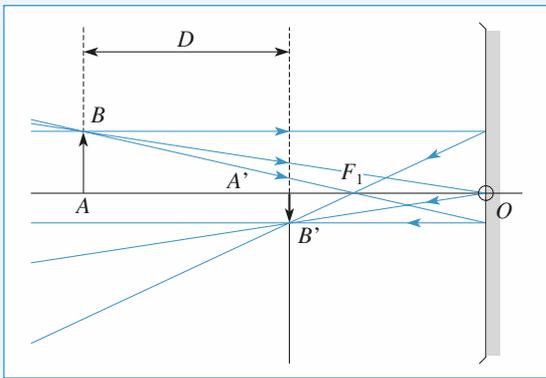
$f' < 0$; $p_1 p_2 > 0$; donc $D > 0$. La différence entre ces deux

racines est $\sqrt{\Delta}$, d'où $d^2 = \Delta = D^2 + 4f'^2$.



Il existe donc deux positions du miroir distantes de $\sqrt{D^2 + 4f'^2}$ telles que la distance objet image soit $D > 0$. Il reste à vérifier que p'_1 et p'_2 sont bien négatives :

$$p' = p + D.$$



Soit p' solution de l'équation :

$$p'^2 - p'(D + 2f') + f'D = 0.$$

Le produit des racines de cette équation est $f'D$. Il est négatif ($f' < 0$ et $D > 0$), donc les valeurs p'_1 et p'_2 de p' sont de signes opposés. La méthode est donc non applicable, car si p' est positif, l'image correspondante est virtuelle, donc non observable directement sur un écran. La méthode de Bessel n'est pas applicable pour des miroirs concaves.

Remarque : On aurait pu prendre $\overline{AA'} = -D$. Dans ce cas, on aurait eu une des valeurs de p positive correspondant à un objet virtuel, ce qui rend la méthode de Bessel inutilisable à nouveau.

4 Autocollimation

1 • Le réglage par autocollimation

a) Le point $A(p)$ a pour image $A_1(p_1)$ par la lentille, dans

le sens de la lumière incidente : $\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$.

Le point $A_1(p_1)$ a pour image $A_2(p_2)$ par le miroir :

$$d - p_1 = p_2 - d.$$

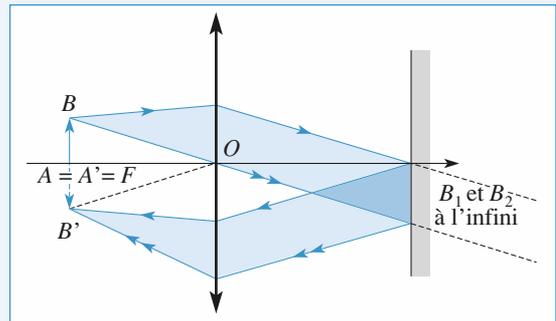
Le point $A_2(p_2)$ a pour image $A'(p')$ par la lentille, dans le sens de la lumière réfléchié : $\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$.

On a donc $d - \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{p}} = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{p'}} - d$, soit :

$$2(d - f')pp' + f'(2d - f')(p + p') + 2df'^2 = 0.$$

b) Si AB et $A'B'$ sont dans le même plan, alors $A = A'$. On reporte la condition $p = p'$ dans l'équation précédente, il vient :

$$(d - f')p^2 + f'(2d - f')p + df'^2 = 0.$$



Le discriminant de cette équation de degré 2 est $\Delta = f'^4$ (toujours positif).

Les racines sont $p = -f'$ et $p = -\frac{df'}{d - f'}$.

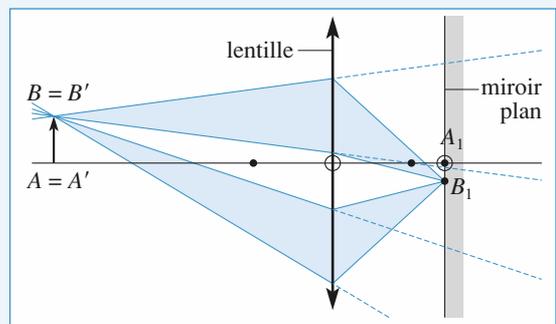
La solution $p = -f'$ correspond à un objet AB placé dans le plan focal objet de la lentille.

Le schéma montre clairement que le grandissement obtenu est égal à -1 .

La solution $p = -\frac{df'}{d - f'}$, soit p vérifiant :

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'},$$

correspond à un cas où le plan contenant l'objet AB et le plan du miroir sont conjugués par la lentille.



A_1 et B_1 sont leurs propres conjugués par le miroir. Appliquant le principe du retour inverse de la lumière à la lentille, on en déduit $A' = A$ et $B' = B$. Le grandissement est donc ici $\gamma = +1$.

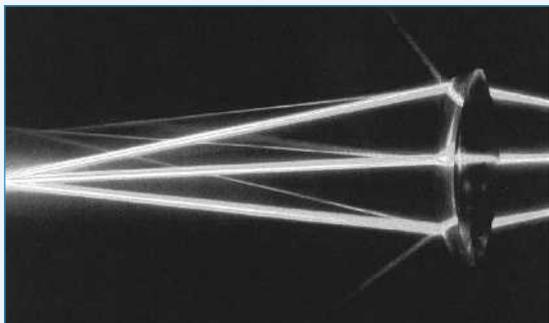
Remarque : Expérimentalement, ce réglage ne peut pas être très visible si $A'B'$ est rigoureusement confondu avec AB ; pour pouvoir mettre l'image en évidence expérimentalement, il faut incliner un peu le miroir plan.

c) Le réglage par autocollimation consiste à placer l'objet AB dans le focal objet de la lentille. L'image de l'objet AB par la lentille est alors renvoyée à l'infini. Elle peut alors servir de « source à l'infini » pour la suite du montage optique (le miroir plan sert à faire le réglage, il est ensuite ôté).

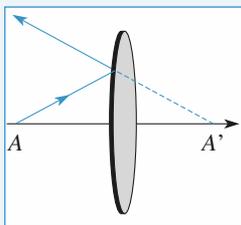
d) Classiquement, on l'effectue en plaçant un miroir plan juste derrière la lentille et en ajustant la distance $-p$ de façon à obtenir une image nette dans le plan de l'objet AB . On a vu qu'il existe deux réglages distincts conduisant à cette observation. On note toutefois que, pour le premier, la position exacte du miroir est sans importance et que l'image $A'B'$ est renversée par rapport à l'objet AB , ce qui permet de lever l'ambiguïté. En pratique, on obtient donc toujours sans problème le premier réglage.

2 • Un réglage curieux

a) La lumière est ici réfléchi par la lentille. En fait, les interfaces air/verre ne correspondent pas à une transmission intégrale de la lumière incidente, une petite partie est réfléchi (ce qui explique le traitement anti-reflet des lentilles d'un objectif photographique, car les réflexions sont en général assez nombreuses).



b) La réflexion sur la première face de la lentille équiconvexe, qui se comporterait alors comme un miroir convexe, n'est pas responsable de la formation de l'image observée : ce miroir divergent ne peut donner une image réelle de l'objet AB , comme l'indique le schéma ci-contre.



Il doit donc s'agir d'une réflexion sur la seconde face de la lentille. Le point A a pour image A_1 par la lentille, dans le sens de la lumière incidente :

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$$

Le point A_1 a pour image A_2 par le miroir concave de sommet O formé par la seconde face de la lentille :

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = -\frac{2}{R},$$

où R est la valeur absolue du rayon de courbure des faces de la lentille équiconvexe.

Le point A_2 a pour image A' par la lentille, dans le sens de la lumière réfléchi (attention aux signes) :

$$\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'}$$

Lorsque $p = p'$, on a donc $-p = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{f'}}$.

Pour une lentille en verre, on peut évaluer le rayon de courbure en prenant $n \approx 1,5$; en utilisant la formule donnée dans l'énoncé, il vient $f' \approx R$, et la mesure $-p = 6,2$ cm correspond à $R \approx 12,4$ cm.

On constate que le rayon de courbure des faces de la lentille est très supérieur à son épaisseur, l'approximation de lentille mince est bien justifiée.

La vergence de cette lentille est :

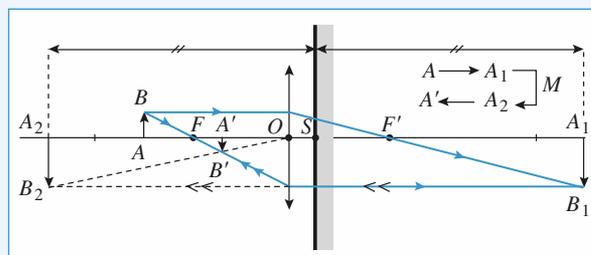
$$v = \frac{1}{f'} \approx \frac{1}{R} \approx \frac{1}{-2p} \approx +8 \text{ dioptries.}$$

5 *Repérage du plan focal par autocollimation

1 • Construisons l'image A_1B_1 , de l'objet AB dans le plan du diaphragme, par la lentille. L'image A_2B_2 , de A_1B_1 , par le miroir plan est symétrique par rapport au plan du miroir ($\overline{SA_2} = -\overline{SA_1}$), de même taille ($A_2B_2 = A_1B_1$).

Sur le schéma, A_3B_3 constitue un objet virtuel pour la lentille utilisée dans le sens de la lumière réfléchi (symbole $\leftarrow\leftarrow$). L'image finale A_1B_1 s'en déduit.

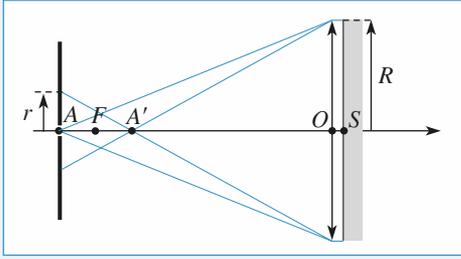
Le schéma montre que si A est à gauche de F , A' est à droite de F , il suffit de transposer les constructions, en intervertissant AB et $A'B$, A_1B_1 et A_2B_2 , sur la figure, et A' sera à gauche de F .



On obtient $A = A'$ (et $\overline{A'B'} = -\overline{AB}$) lorsque $A = F = A'$: l'autocollimation est réalisée.

Incliner (modérément !) le miroir décalera latéralement A_2B_2 et $A'B'$, sans modifier les positions longitudinales : on peut faire apparaître l'image A' réfléchi à côté du diaphragme A , ce qui est tout de même plus facile à observer.

- 2 • On considère que le réglage n'est pas idéalement réalisé :



L'image A' du diaphragme « ponctuel » A fait alors apparaître une tache lumineuse de rayon r , avec : $r = R \cdot \frac{AA'}{A'O}$

d'après le schéma.

On note $x = FA$, petit (en valeur absolue) devant f' si le réglage est presque réalisé. On obtient $\overline{F'A_1} = -\frac{f'^2}{x}$, grand

(en valeur absolue) devant F' , car A_1 est « très loin » si $A \approx F$.

On en déduit $\overline{OA_2} \approx \overline{SA_2} = -\overline{SA_1} \approx -\overline{OA_1} \approx -\overline{F'A_1} = \frac{f'^2}{x}$,

donc $\overline{F'A_2} \approx \frac{f'^2}{x}$, et enfin $FA' = -\frac{f'^2}{F'A_2} \approx -x$. Ainsi, lorsque

l'autocollimation est presque réalisée, A et A' sont sensiblement symétriques l'un de l'autre par rapport à F .

On en déduit : $r \approx \frac{2xR}{f'}$.

Si le diaphragme a un diamètre d , le rayon r désigne l'élargissement de la tache image, de diamètre $d' = d + 2r$.

On a finalement une précision de mise au point :

$$x = \frac{f'}{2} \frac{r}{R} = \frac{f'}{2} \frac{d' - d}{D} = 2 \text{ mm}$$

soit une erreur relative $\frac{x}{f'}$ de 1 %.

6 Frontofocomètre

1 • Pour que le réticule soit vu nettement dans la lunette, il faut que les rayons issus de la croisée C des fils sortent de la lentille L parallèlement à l'axe optique. Cela revient à dire que l'image C' de C , donnée par la lentille L_1 , se forme au foyer objet principal de la lentille L :

$$\overline{SC'} = \overline{SF} = f.$$

Première méthode

On exprime, à l'aide des lois de Descartes, le fait que C et C' sont conjugués par rapport à la lentille L_1 :

$$\frac{1}{p'_1} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_1}$$

avec : $p_1 = \overline{S_1C} = \overline{S_1F_1} + \overline{F_1C} = f_1 + \overline{F_1C} = -f'_1 + \overline{F_1C}$

$$p'_1 = \overline{S_1C'} = \overline{S_1S} + \overline{SC'} = f'_1 + f = f'_1 - f'.$$

Il en résulte que :

$$-\frac{1}{\overline{F_1C} - f'_1} + \frac{1}{f'_1 - f'} = \frac{1}{f'_1},$$

d'où : $\frac{1}{\overline{F_1C} - f'_1} = -\frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_1 - f'} = \frac{f'}{f_1'^2 - f f'_1}$;

soit encore, en inversant les expressions et en simplifiant par f'_1 , $\overline{F_1C} = \frac{f_1'^2}{f'}$; d'où l'expression de la distance focale de L :

$$f' = \frac{f_1'^2}{\overline{F_1C}}.$$

Seconde méthode

On exprime, à l'aide des lois de Newton, le fait que C et C' sont conjugués par rapport à la lentille L_1 :

$$x_1 x'_1 = -f_1'^2, \text{ avec } x_1 = \overline{F_1C}$$

et $x'_1 = \overline{F_1C'} = \overline{SC'} = f = -f'$.

Il vient immédiatement :

$$f' = \frac{f_1'^2}{\overline{F_1C}}.$$

• Comme C peut se trouver de part et d'autre de F_1 , il apparaît que l'appareil peut servir pour la détermination des distances focales des lentilles convergentes ($f' > 0$) et divergentes ($f' < 0$). Si $\overline{F_1C} > 0$, la lentille est convergente et si $\overline{F_1C} < 0$, la lentille est divergente.

2 • Si C est avant F_1 , son image C' est après F'_1 : ce cas de figure permet le réglage souhaité pour toute lentille L divergente.

Si C est entre F_1 et S_1 , son image C' est virtuelle pour L_1 , avant S_1 : ce cas est adapté aux lentilles L convergentes si $f < f_1$ (< 0).

3 • L'application de la relation établie dans la première question donne :

$$f' = \frac{f_1'^2}{\overline{FC}_1} = \frac{15^2}{-10} = -22,5 \text{ cm}.$$

La lentille L est une lentille divergente.

Sur le schéma ci-après est représenté le tracé d'un faisceau issu de C , ainsi que la construction (en pointillés) de l'image B' de B donnée par la lentille L_1 . Cette image se trouve dans le plan focal objet de L .

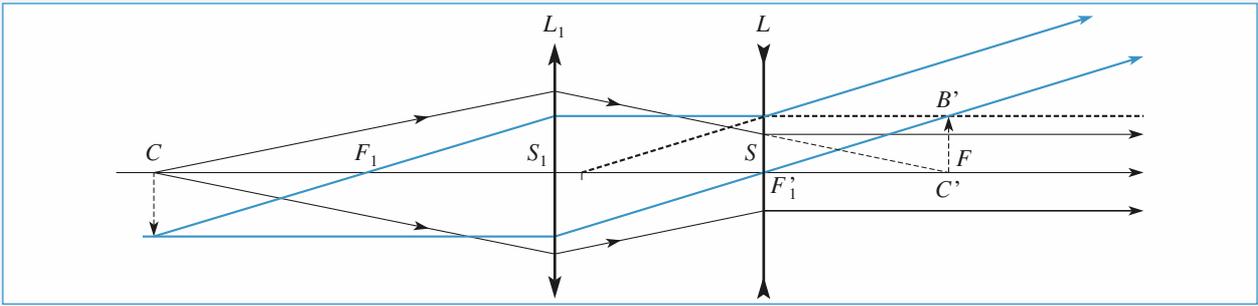


Schéma de la question 3) de l'exercice 6

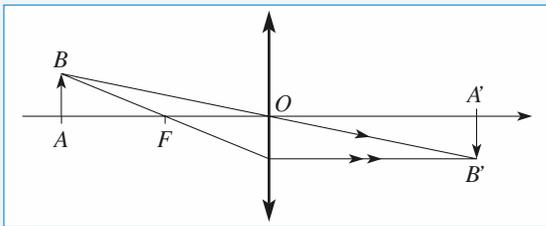
7 Abaque à points alignés

1 • La formule de Descartes donne :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

et d'après le schéma ci-dessous :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$



L'équation de la droite passant par les points $(p; 0)$ et $(0; p')$ est :

$$\frac{y}{p'} + \frac{x}{p} = 1.$$

Sa pente est : $\frac{dy}{dx} = -\frac{p'}{p} = -\gamma$, opposée au grandissement de la lentille.

2 • Comme $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'}$, il est clair que le point

$(x = -f', y = f')$ est commun à toutes les droites pouvant être tracées pour différentes valeurs de p (et p').

3 • Un viseur permet des pointés relatifs.

On a donc $p = \overline{OA} = d_0 - d_1$ et $p' = \overline{OA'} = d_2 - d_1$.

Ceci permet de remplir les tableaux, puis de tracer les deux familles de droites.

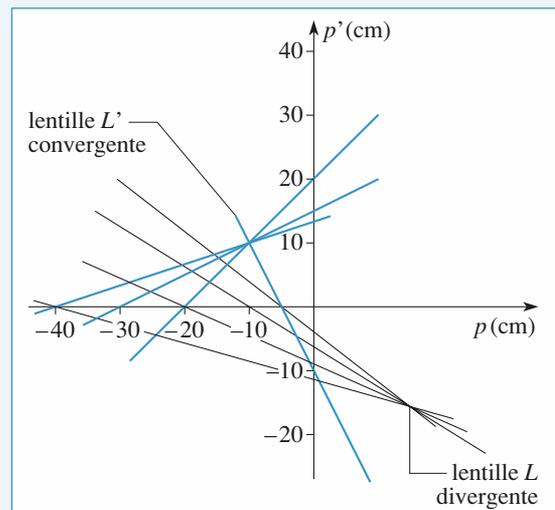
lentille L				
p (cm)	26,3	31,0	41,3	61,2
p' (cm)	22,5	25,0	32,7	50,3

lentille L'				
p (cm)	-4,9	-20,1	-30,2	-39,8
p' (cm)	-10,0	20,1	14,8	13,3

On remarque que ces droites sont quasiment concourantes, et que toutes les droites de la première famille passent à moins de 2 mm du point $(15,0; -15,0)$, et celles de la deuxième famille au point $(-10,0; 10,0)$.

La première lentille est divergente de distance focale image $-15,0 \pm 0,2$ cm et la deuxième convergente de distance focale image $10,0 \pm 0,2$ cm.

On remarque que la méthode est d'autant plus précise que $|p|$ et $|p'|$ sont simultanément grands. Les droites correspondant à A et A' proches de O ne sont pas utilisables.



6

Le prisme, utilisation en spectroscopie

LES OBJECTIFS

- Déviation de la lumière par un prisme, ou plusieurs...

LES PRÉREQUIS

- Instruments d'optique (collimateur, lunette), réflexion et réfraction.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Quelques angles, donc un peu de trigonométrie.

ESSENTIEL

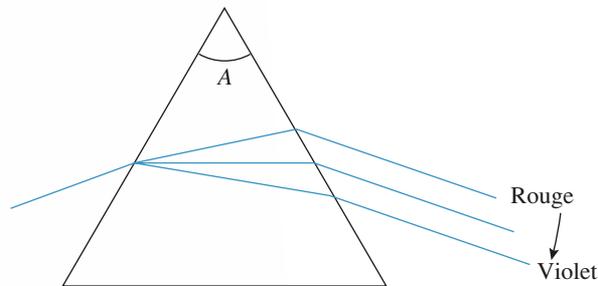
Soit un prisme d'angle au sommet A :

- Il y a toujours réflexion totale si $A > 2\Lambda$, avec $\sin \Lambda = \frac{1}{n}$, Λ étant l'angle de réfraction limite sur la face d'entrée.

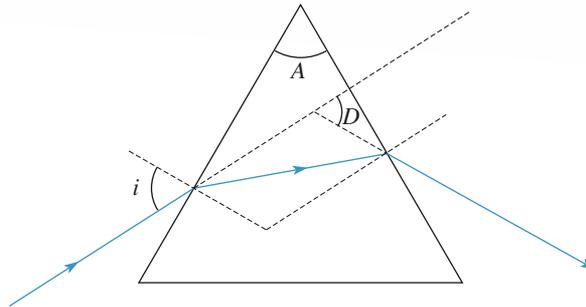
Lorsque $A \leq 2\Lambda$, le rayon émerge du prisme si :

$$i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}, \text{ où } \sin i_0 = n \sin(A - \Lambda).$$

- La déviation D croît avec l'indice du prisme, du rouge au violet dans le domaine visible.



Doc. 1.



Doc. 2

- Minimum de déviation : lorsque l'angle d'incidence i varie de i_0 à $\frac{\pi}{2}$, la déviation passe par un minimum D_m vérifiant la relation :

$$\sin\left(\frac{A + D_m}{2}\right) = n \sin\left(\frac{A}{2}\right).$$

Au minimum de déviation, le tracé du rayon lumineux est symétrique par rapport au plan bissecteur de l'angle au sommet du prisme.

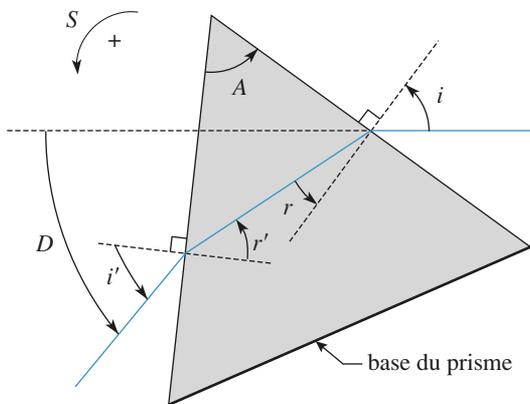
- L'indice du prisme peut être calculé en mesurant A et en repérant le minimum de déviation D_m à l'aide d'un goniomètre.
- Le prisme, grâce à son pouvoir dispersif, permet l'analyse du spectre d'une source lumineuse. Pour cela, on utilise un spectroscopie si l'observation du spectre se fait à travers une lunette, ou un spectrographe si l'observation se fait sur un écran ou une plaque photographique. Ces appareils permettent de déterminer les longueurs d'onde des diverses raies du spectre. Un spectromètre donne un enregistrement graphique à l'aide duquel on peut connaître la longueur d'onde et l'intensité de chaque raie.

Conseils et pièges à éviter

- Attention à l'orientation des angles.
- Penser aux symétries avec le prisme.

1 Minimum de déviation d'un prisme

- Exprimer la déviation D du rayon lumineux à l'aide de $i, i',$ et A .
- Pourquoi existe-t-il deux valeurs de i donnant la même déviation ?
- Que peut-on en déduire au minimum de déviation ? représenter cette configuration particulière. Indiquer les valeurs des angles si $A = 60^\circ$ pour un prisme en flint d'indice $n = 1,75$.

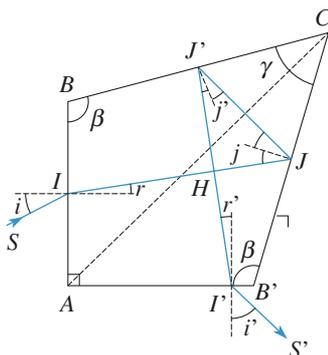


Conseil Les conventions de signes sont ici telles que tous les angles sont positifs.

2 Équerre optique

D'après Oral Centrale-SupElec.

Un prisme $ABCB'$ d'indice n , rectangle en A et symétrique par rapport à AC , reçoit un rayon lumineux SI sur sa face AB . Ce rayon incident, situé dans le plan de section droite du prisme, se réfléchit sur les faces $B'C$ et BC puis ressort du prisme par la face AB' .



- Déterminer la valeur de l'angle γ pour qu'à l'intérieur du prisme les rayons IJ et $J'I'$ se coupent orthogonalement, quel que soit l'angle d'incidence i du rayon incident SI sur la face AB .

Quelles relations lient alors, d'une part, les angles r et j et, d'autre part, les angles r' et j' ?

Est-il nécessaire de métalliser les faces BC et $B'C$ pour que la totalité du faisceau se réfléchisse en J et J' ?

- Déterminer alors la déviation D du rayon incident SI , c'est-à-dire l'angle que fait l'émergent $I'S'$ avec l'incident SI .

Justifier la dénomination d'équerre optique donnée à ce prisme.

Quel avantage présente ce système par rapport à son équivalent réalisé à l'aide de miroirs ?

Quelle peut être l'utilisation d'un tel prisme ?

- L'angle D dépend-il de l'indice n du prisme ? Si le rayon incident SI contient deux radiations de longueurs d'onde différentes, comment s'analysent les rayons qui émergent du prisme par la face AB' ?

- Pour quels couples de points ce prisme est-il stigmatique pour les rayons dans le plan de section droite du prisme ?

Pour ces couples de points, le prisme présente-t-il des aberrations chromatiques ?

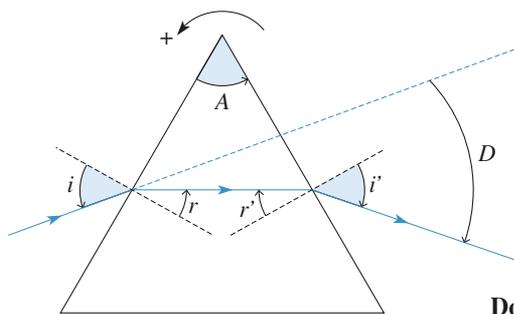
Conseils La métallisation des faces BC et $B'C$ n'est nécessaire que si les réflexions en J et J' ne sont pas totales, afin de « garder » l'intensité lumineuse incidente. On rappelle que le prisme peut être considéré comme stigmatique pour des couples de points situés à l'infini, dans un plan perpendiculaire à son arête.

3 Étude d'un spectroscopie à prisme à vision directe

D'après ENSET.

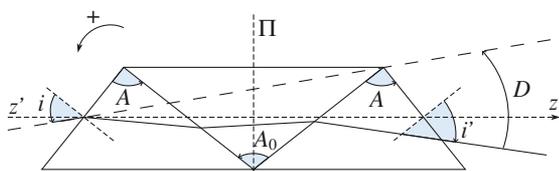
- a) On considère un prisme d'angle A et d'indice n . Démontrer rapidement les formules du prisme reliant i, r, i', r' et A en respectant les orientations du schéma page suivante (*doc. 1*).

- b) Calculer la déviation D , du rayon émergent par rapport au rayon incident, en fonction de i', i et A .



Doc. 1

2 • On considère le train de trois prismes disposés comme sur le schéma ci-dessous (doc. 2). Les deux prismes extrêmes sont identiques d'angle $A = 90^\circ$ et d'indice n . Le prisme intermédiaire a un angle A_0 et un indice n_0 .



Doc. 2

L'ensemble présente une symétrie par rapport au plan Π bissecteur du dièdre. Les indices n et n_0 sont fonction de la longueur d'onde et leurs valeurs sont données dans le tableau suivant pour cinq longueurs d'onde.

λ (nm)	706,5	643,8	589,3	546,1	486,1
n	1,50707	1,50895	1,51105	1,51314	1,51700
n_0	1,62818	1,63191	1,63620	1,64070	1,64909

- a) Calculer la déviation D en fonction de i' , i et A_0 .
- b) On veut que cette déviation soit nulle, pour la longueur d'onde $\lambda_0 = 589,3$ nm, pour les rayons incidents parallèles à l'axe ($z'z$) orthogonal au plan.
 - Tracer la marche d'un tel rayon.
 - Calculer A_0 en fonction de n et n_0 , pour qu'il en soit ainsi.
 - Donner la valeur numérique de A_0 .

(*) tableau des déviations du spectroscope :

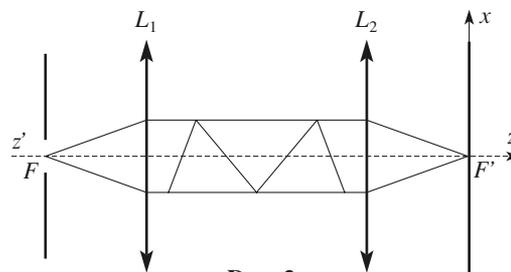
λ	r	$-i_0$	$-r_0$	r'_0	i'_0	$-r'$	$-i'$	D
706,5	18,76	71,24	61,22	60,81	70,59	19,41	30,06	-1,07
643,8	18,73	71,27	61,12	60,90	70,91	19,09	29,58	-0,59
589,3	18,71	71,29	61,01	61,01	71,29	18,71	28,99	0,00
546,1	18,68	71,32	60,89	61,14	71,73	18,27	28,31	0,67
486,1	18,63	71,37	60,66	61,37	72,58	17,42	27,01	1,98

c) Pour les longueurs d'onde indiquées, on construit le tableau de valeurs donné en fin d'énoncé (*). Préciser la signification des angles indiqués et les relations qui ont permis de les obtenir.

d) Tracer la courbe donnant la déviation $D(\lambda)$ du spectroscope en fonction de la longueur d'onde pour la valeur de A_0 calculée au 2) b).

e) On place le prisme dans le montage présenté ci-après (doc. 3) : L_1 et L_2 sont deux lentilles convergentes identiques de distance focale $f' = 200$ mm et d'axe optique coïncidant avec l'axe ($z'z$). On dispose une fente très fine perpendiculaire au plan du schéma et passant par le foyer objet F de la lentille L_1 .

Cette fente est éclairée par une lampe à vapeur de cadmium. On observe des raies pour les valeurs de x suivantes.



Doc. 3

x (mm)	7,7	7,2	5,1	-2,1
----------	-----	-----	-----	------

Donner la longueur d'onde de ces quatre raies ainsi que leur couleur.

Conseils

Pour les calculs de déviation, il faut prêter une attention toute particulière aux définitions des angles et donc aux signes.
 Pour calculer la déviation par le prisme à vision directe, on peut remarquer que la relation entre D , i et i' dans un prisme ne fait pas intervenir ce qui constitue un prisme.
 Ne pas oublier les symétries du problème.
 Utiliser une calculatrice (de préférence programmable et graphique) pour faire les applications numériques.

4 Télémètre à prismes

D'après Oral Centrale-SupElec.

Un télémètre est un instrument qui permet de déterminer, par la lecture sur une graduation, la distance D d'un point éloigné A dont on observe à la fois les images dans deux lunettes convenablement disposées.

Aux extrémités de la base du télémètre $B_1B_2 = d$, se trouvent deux prismes P_1 et P_2 à réflexion totale qui renvoient les rayons provenant de A vers deux objectifs L_1 et L_2 , centrés sur le même axe B_1B_2 et de même distance focale f' .

On examine d'abord le principe de fonctionnement du télémètre, en considérant que les deux objectifs ont une distance focale f' telle que leurs foyers images coïncident en I , milieu de S_1S_2 . La base B_1B_2 étant supposée orthogonale à AB_1 , le rayon AB_2 est incliné de ε sur la normale en B_2 à B_1B_2 .

1 • Où se forment les images A'_1 et A'_2 de l'objet A respectivement données par L_1 et L_2 et quelle est la distance $a = A'_1A'_2$ qui les sépare ?

2 • Pour ramener les deux images A'_1 et A'_2 en coïncidence, on place sur les rayons issus de L_2 un prisme P d'indice n et de petit angle α .

a) Établir l'expression de la déviation β du prisme P .

b) À quelle distance x de I doit-on placer P pour que les deux images coïncident ?

En déduire l'expression de la distance D , en fonction de x et des caractéristiques du montage.

3 • En fait, pour observer les images A'_1 et A'_2 données par les deux objectifs, la distance focale f' est supérieure à la moitié de la distance S_1S_2 . On place alors en I , deux prismes P'_1 et P'_2 à réflexion totale, chacun couvrant un demi-faisceau. Ces prismes rejettent en F'' , dans la direction et dans le sens du rayon incident AB_1 , le foyer image des deux objectifs.

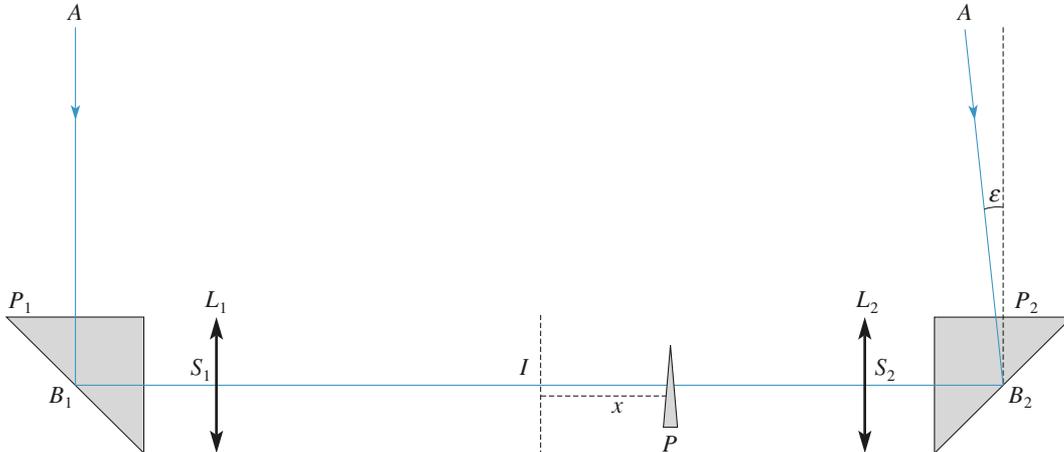
Un oculaire L , placé au-delà, permet l'observation des deux images A'_1 et A'_2 . Modifier et compléter le schéma en bas de page pour représenter le télémètre tel qu'il est effectivement réalisé.

4 • Déterminer la nouvelle expression de la distance D , en fonction de x et des nouvelles caractéristiques du montage.

Conseils

L'image d'un objet situé à l'infini est dans le plan focal image de tout système optique.

La déviation β d'un prisme d'indice n et de petit angle au sommet A est égale à $\beta = (n - 1) A$.



Télémètre à prismes

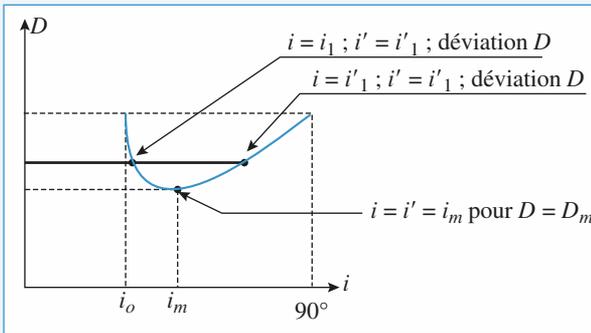
1 Minimum de déviation d'un prisme

1 • En suivant le trajet du rayon, on lit : $D = i - r + i' - r'$.
D'autre part, la somme des angles d'un triangle valant π :

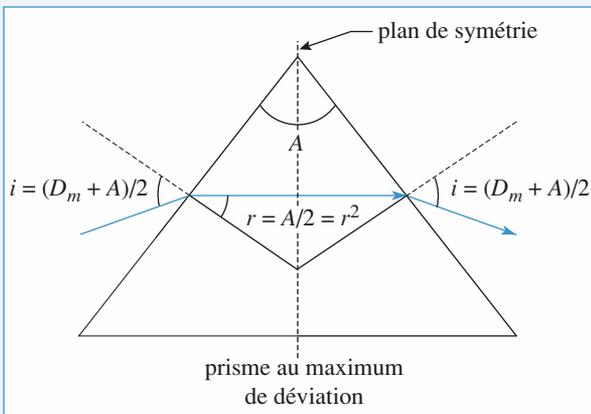
$$\left(\frac{\pi}{2} - r\right) + \left(\frac{\pi}{2} - r'\right) + A = \pi,$$

soit : $r + r' = A$, et donc $D = i + i' - A$.

2 • Dans les relations de base du prisme : $\sin i = n \sin r$; $\sin i' = n \sin r'$; $D = i + i' - A$, on peut échanger les angles i et i' , et donc les angles r et r' , sans modifier la valeur de D . Cette interversion montre que l'on a en général deux valeurs de l'angle d'incidence associées à une déviation physiquement réalisable : on retrouve cette propriété sur la courbe usuelle de déviation du prisme, où l'angle i varie entre i_0 (réflexion totale sur la deuxième face) et 90° :



3 • En particulier, au minimum de déviation, l'unicité de valeur de i associée à D impose $i = i'$: au minimum de déviation, le schéma devient symétrique entre l'entrée et la sortie du prisme :



Sur cette figure où les angles sont indiqués, la relation $\sin i = n \sin r$ devient, au minimum de déviation :

$$\sin i_m = n \sin A/2.$$

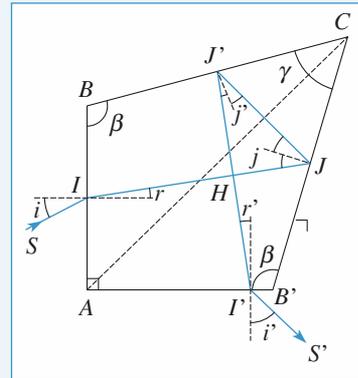
Numériquement : $i_m \approx 61^\circ$ et $D_m \approx 62^\circ$.

2 Équerre optique

1 • Les réflexions en J et J' font tourner le rayon lumineux des angles respectifs $\pi - 2j$ et $\pi - 2j'$, dont la somme doit être égale à $\frac{3\pi}{2}$, soit : $j + j' = \frac{\pi}{4}$.

Dans le triangle JCJ' , la somme des angles $\frac{\pi}{2} - j$, γ et $\frac{\pi}{2} - j'$ est égale à π .

La condition recherchée est donc : $\gamma = \frac{\pi}{4}$.



En écrivant que la somme des angles du quadrilatère $ABCB'$ est 2π , on déduit :

$$\frac{\pi}{2} + 2\beta + \gamma = 2\pi, \text{ soit } \beta = \frac{5\pi}{8}.$$

Il en résulte que les normales en I et J font entre elles un angle aigu de $\frac{5\pi}{8} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$ et qu'il en est de même pour les normales en I' et J' .

Il vient alors : $j = r + \frac{\pi}{8}$ et $j' = r' + \frac{\pi}{8}$.

Soit r_{lim} , la valeur maximale de r , correspondant à l'incidence rasante $n \sin r_{\text{lim}} = 1$. Cette valeur correspond aussi à l'angle minimum d'incidence assurant la réflexion totale d'un rayon à l'intérieur du prisme.

Comme r peut varier de $-r_{\text{lim}}$ à $+r_{\text{lim}}$, il en résulte que

$$-r_{\text{lim}} + \frac{\pi}{8} \leq j \leq r_{\text{lim}} + \frac{\pi}{8}, \text{ | } j \text{ | peut être inférieur à } r_{\text{lim}} \text{ (et}$$

même nul), ce qui signifie que la réflexion en J n'est pas toujours totale : il est donc nécessaire de métalliser la face BC du prisme pour conserver, en toutes circonstances, la totalité du faisceau lumineux.

On aboutit à la même conclusion pour la réflexion en J' et à la nécessité de métalliser aussi la face $B'C$.

2 • La somme des angles du quadrilatère AHH' est égale à 2π . Les angles en A et en H étant rectangles, il en résulte que les angles de réfraction r et r' sont égaux. Donc les angles d'incidence i et d'émergence i' sont égaux aussi.

Les faces AB' et AB étant orthogonales, les rayons incident SI et émergent $S'I'$ sont orthogonaux.

Donc $D = \frac{\pi}{2}$ quelle que soit la valeur de l'angle d'incidence i . Cela justifie le nom d'équerre optique donné à ce prisme. Une fois taillé, un tel prisme est indéformable; ce qui n'est pas le cas du système équivalent réalisé par l'association de deux miroirs. Cette équerre optique est utilisée en arpentage et dans tous les montages où l'on désire renvoyer un faisceau lumineux dans une direction orthogonale.

3 • L'angle D est indépendant de l'indice du prisme. La dispersion du prisme est donc sans influence sur la déviation D du rayon incident.

Cependant, si le rayon incident contient deux radiations de longueurs d'onde différentes λ_1 et λ_2 , la dispersion du prisme donne naissance à deux rayons réfractés distincts IJ_1 et IJ_2 respectivement d'angle de réfraction r_1 et r_2 . Chacun de ces rayons réfractés se réfléchit ensuite sur les deux faces $B'C$ et BC du prisme en des points distincts J_1, J_2 et J'_1, J'_2 , puis coupe orthogonalement le rayon réfracté qui lui a donné naissance. Enfin, ces deux rayons tombent sur la face AB' , en des points distincts I'_1 et I'_2 , en faisant des angles de réfraction $r'_1 = r_1$ et $r'_2 = r_2$.

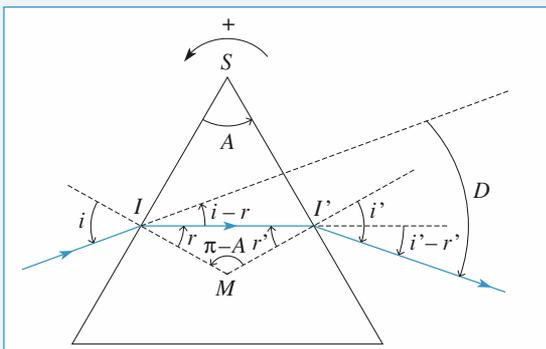
Il suffit, pour s'en convaincre, de reprendre pour chacun d'eux le raisonnement fait au paragraphe précédent.

En conséquence, les deux rayons émergents sortent parallèlement entre eux, en des points distincts mais tous deux orthogonalement au rayon incident commun SI .

Un faisceau de lumière parallèle orthogonal à AB ressort sous forme d'un faisceau parallèle orthogonal à $A'B'$.

4 • Ce prisme est donc stigmatique pour les couples de points (S, S') situés à l'infini dans deux directions orthogonales telles que celle du rayon incident SI et celle du rayon émergent $I'S'$. Pour ces couples de points, le prisme ne présente pas d'aberration chromatique, puisque la dispersion du prisme est sans influence sur la direction des rayons émergents. C'est ce qui fait l'intérêt de cette équerre optique.

3 Étude d'un spectroscopie à prisme à vision directe



1 • a) L'angle d'intersection des deux normales aux faces du prisme a pour mesure $\pi - A$ (la somme des angles du quadrilatère $SIMI'$ est de 2π). La relation sur les angles du triangle IMI' donne :

$$r - r' + \pi - A = \pi$$

(r' est négatif d'après les orientations).

D'où $r - r' = A$.

Les relations de Descartes donnent :

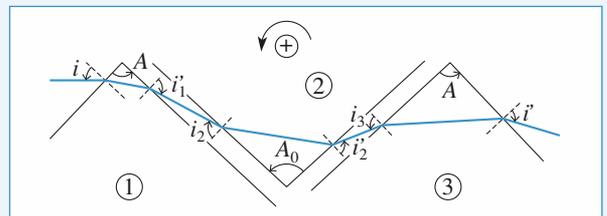
$\sin i = n \sin r$ et $\sin i' = n \sin r'$ (car i' est aussi négatif).

b) L'angle de déviation D est la somme de deux angles ($i' - r'$) et $-(i - r)$; (le signe $-$ vient des orientations).

D'où : $D = i' - i - r + r' = i' - i - A$.

Sur le schéma, on a $D < 0$.

2 • a) Calculons les déviations algébriques successives imposées par les prismes à l'aide du schéma ci-dessous.



Ces déviations sont :

$$D_1 = i'_1 - i + A \quad (D_1 < 0; i > 0; i'_1 < 0; A > 0);$$

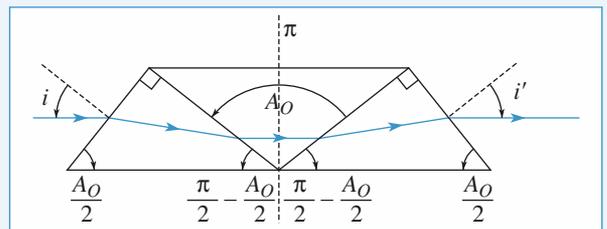
$$D_2 = i'_2 - i_2 - A_0 \quad (D_2 > 0; i_2 < 0; i'_2 > 0; A_0 > 0);$$

$$D_3 = i' - i_3 + A \quad (D_3 < 0; i_3 > 0; i' < 0; A > 0).$$

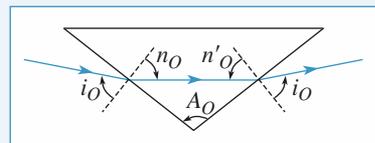
Comme $i_2 = i'_1$ et $i_3 = i'_2$, la somme des trois déviations donne : $D = i' - i + (\pi - A_0)$.

Cette formule est semblable à celle obtenue à la première question pour un prisme d'angle $\pi - A_0$.

b) Une déviation nulle impose un schéma symétrique par rapport au plan (Π) :



La symétrie de la figure indique que le prisme actuel est au minimum de déviation.



On a alors : $i'_0 = -i_0$ et $r'_0 = -r_0 = \frac{A_0}{2}$.

La relation aux sinus impose donc : $n \sin i_0 = n_0 \sin \frac{A_0}{2}$ (1).

Pour les prismes d'angle $A = \frac{\pi}{2}$, le premier schéma indique :

$$i = i' = \frac{\pi}{2} - \frac{A_0}{2}$$

Pour le premier prisme, on a $r' = i_0$, donc

$r = A + r' = \frac{\pi}{2} + i_0$. La relation $\sin i = n \sin r$ impose alors :

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A_0}{2}\right) = n \sin\left(\frac{\pi}{2} + i_0\right)$$

ou encore :

$$\cos \frac{A_0}{2} = n \cos i_0 \quad (2)$$

En élevant (1) et (2) au carré, on en déduit :

$$\sin^2 \frac{A_0}{2} = \frac{n^2 - 1}{n_0^2 - 1}$$

Cette relation définit A_0 si $n_0 > n$.

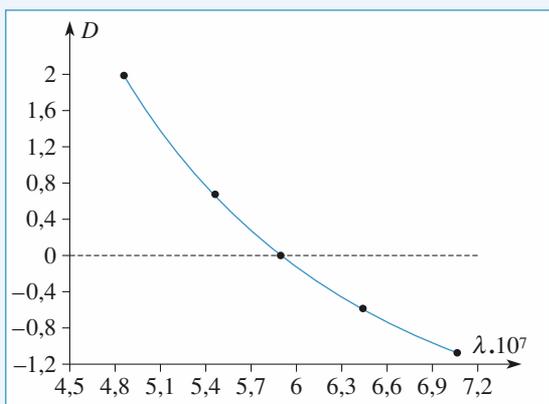
Numériquement : $A_0 = 122^\circ$.

c) En conservant $i = \frac{\pi}{2} - \frac{A_0}{2}$, on utilise successivement :

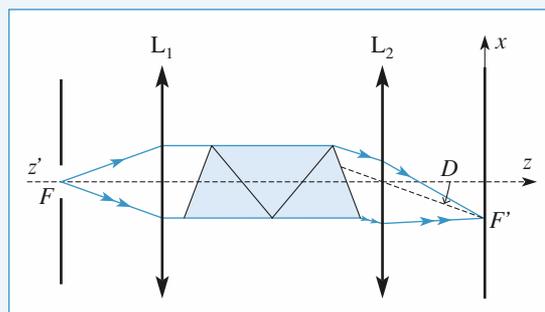
- $n \sin r_1 = \sin i$
- $i_0 = r'_1 = r_1 - \frac{\pi}{2}$
- $n_0 \sin r_0 = n \sin i_0$
- $r'_0 = A_0 + r_0$
- $n \sin i'_0 = n_0 \sin r'_0$
- $r'_3 = r_3 - \frac{\pi}{2} = i'_0 - \frac{\pi}{2}$
- $\sin i' = n \sin r'_3$

pour déterminer successivement les angles $r_1, i_0, r_0, i'_0, r'_3, i'$, qui donnent accès à la déviation $D = i' - i + \pi - A_0$. On obtient le tableau fourni, où on a : $r = r_1$, et $r' = r'_3$.

d) Le graphe de $D(\lambda)$ a l'allure suivante :



e) La fente est dans le plan focal objet de la lentille L_1 . Donc un faisceau de lumière parallèle à $(z'z)$ arrive sur le prisme. Il est dévié d'un angle $D(\lambda)$ par celui-ci puis converge dans le plan focal image de L_2 en un point de coordonnée $x(\lambda) = +D(\lambda)f'$ (le rayon passant par le centre de L_2 n'est pas dévié).



On déduit des x_i les valeurs des $D(\lambda_i)$ correspondants, puis on utilise la courbe tracée ci-dessus.

x (mm)	7,7	7,2	5,1	-2,1
D (°)	+2,2	+2,05	+1,45	-0,6
λ (nm)	472 (bleu)	480 (bleu)	510 (vert)	644 (rouge)

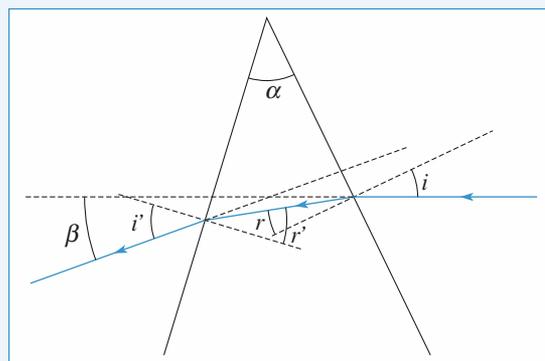
4 Télémètre à prismes

1 • L'objectif L_1 donne de A une image A'_1 située en $F'_1 = I$. Le rayon AB_2 donne, par réflexion dans P_2 , un émergent incliné de ε sur l'axe optique (cf. schéma associé à la question 3). En conséquence, l'objectif L_2 donne de A une image A'_2 dans son plan focal, tel que :

$$F'_2 A'_2 = I A'_2 = f' \varepsilon$$

La distance entre les deux images s'établit à $a = f' \varepsilon$.

2 • a) Les rayons paraxiaux issus de L_2 tombent sur P sous une faible incidence i . Il en résulte que l'angle de réfraction r est faible ainsi que l'angle de réfraction $r' = \alpha - r$ et, par voie de conséquence, il en est de même pour l'angle d'émergence i' .



Ainsi, les formules du prisme s'écrivent :

$$i = nr; \quad i' = nr'; \quad r + r' = \alpha; \quad \beta = (i + i') - \alpha$$

donc :

$$\beta = (n - 1)\alpha$$

b) A'_2 est au-dessus de A'_1 , le prisme dévie la lumière vers sa base. Donc l'image A'_2 sera ramenée en I si le prisme P est placé à la distance x telle que $a = x\beta = x(n - 1)\alpha$; d'où :

$$x = \frac{a}{(n - 1)\alpha}$$

Dans ces conditions, la distance D est :

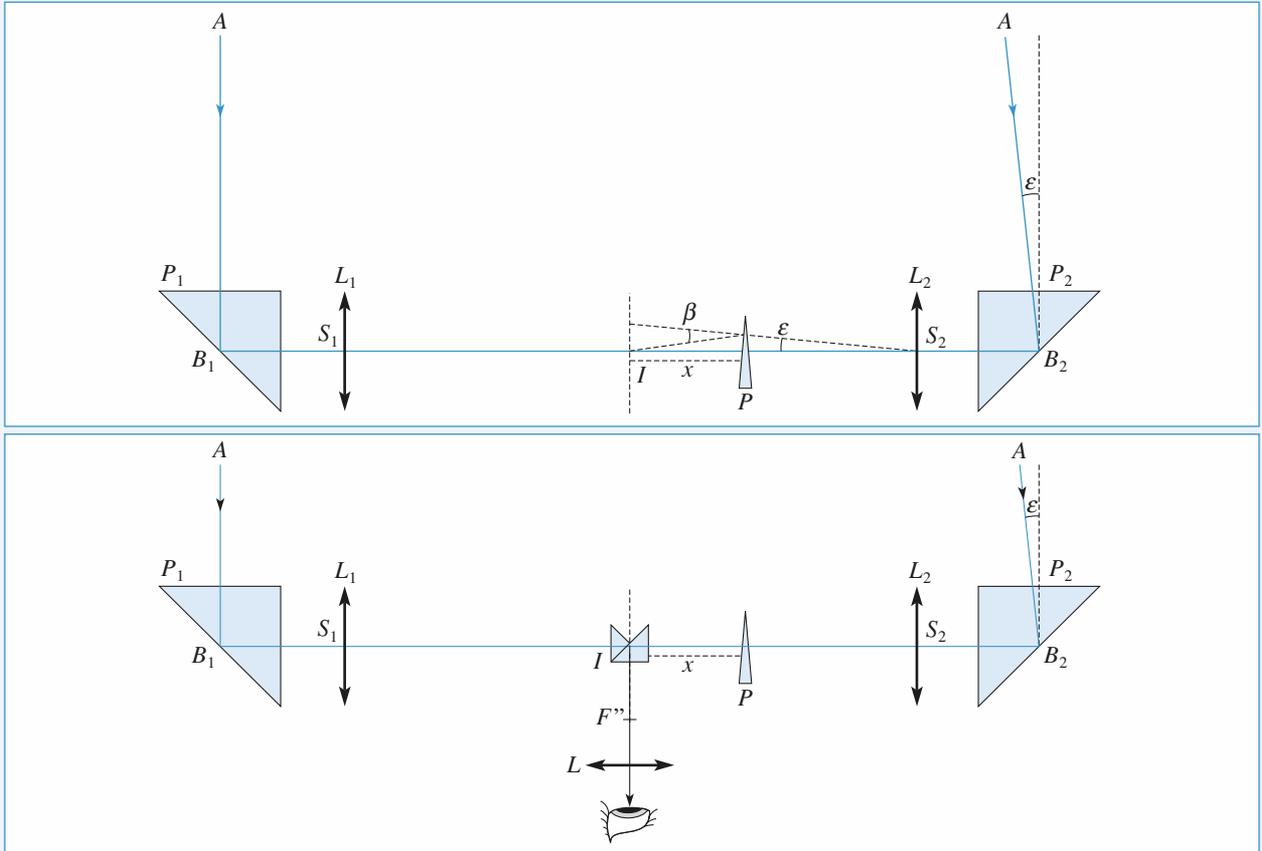
$$D = \frac{d}{\varepsilon} = d \frac{f'}{a} = \frac{f' d}{(n-1)\alpha x}.$$

La distance D est inversement proportionnelle à x et elle est infinie pour $x = 0$.

3 • Le schéma du télémètre est donné ci-dessous. Les deux lunettes (L_1, L) et (L_2, L) ont le même oculaire L .

4 • La nouvelle expression de D ne diffère de celle établie dans la question **2)b)** que par la nouvelle valeur f' des distances focales de (L_1) et (L_2) :

$$D = \frac{f'd}{(n-1)\alpha x}.$$



Schémas du télémètre à prismes

1 ■ Équation d'état d'un fluide.....	201
2 ■ Statique des fluides.....	215
3 ■ Premier principe de la thermodynamique. Bilans d'énergie	227
4 ■ Second principe. Bilans d'entropie.....	250
5 ■ Corps pur diphasé.....	266
6 ■ Machines thermiques	279

Équation d'état d'un fluide

LES OBJECTIFS

- Connaître et savoir utiliser la relation entre pression et force pressante.
- Savoir utiliser l'équation d'état d'un fluide.
- Connaître la définition des coefficients de dilatation et de compressibilité isotherme.
- Connaître et savoir utiliser l'équation d'état d'un gaz dans le cas limite du gaz parfait.
- Connaître la relation entre vitesse quadratique et température pour un gaz.

LES PRÉREQUIS

- Notions de mécanique : quantité de mouvement, force, énergies cinétique et potentielle.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Dérivée partielle d'une fonction de deux variables.
- Équation différentielle du premier ordre à coefficients constants.
- Approximation par un développement limité à l'ordre 1.

ESSENTIEL

« Pression dans un fluide au repos

• Les forces exercées par un fluide au repos sur une paroi sont caractérisées par une grandeur scalaire, la pression, définie en tout point à l'échelle mésoscopique.

La force pressante qui serait exercée sur une surface d'épreuve placée en M de surface dS et de vecteur normal à la surface \vec{n} orienté du fluide vers la surface a pour expression $d\vec{f} = P(M)dS\vec{n}$ où $P(M)$ représente la pression au point M .

• Si le fluide n'est pas au repos, la force exercée sur un élément de surface possède en général une composante tangente à la surface liée à la viscosité du fluide. La pression est alors reliée à la composante normale de cette force.

• L'unité légale de pression est le pascal (symbole : Pa ; $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$).

• La force de pression sur une paroi est due aux interactions à courte distance entre les molécules du fluide et la paroi.

► Pour s'entraîner : ex. 1, 2 et 3

• Température dans un fluide

La température est la manifestation à l'échelle mésoscopique de l'agitation désordonnée des molécules. Ainsi la valeur moyenne du carré des vitesses d'agitation des molécules d'un gaz, leur masse m et la température T sont liées par :

$$m \langle v^2 \rangle = m u^2 = 3 k_B T.$$

$u = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$ est la vitesse quadratique moyenne et k_B est une constante universelle appelée **constante de Boltzmann**.

L'unité légale de température est le kelvin (K). La constante de Boltzmann vaut :

$$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}.$$

On repère aussi la température en utilisant les degrés Celsius : $T(K) = \theta(^{\circ}\text{C}) + 273$.

◆ Pour s'entraîner : ex. 7 et 8

• Équilibre thermodynamique

À l'équilibre thermodynamique, la température est uniforme dans tout le système. Si on ne tient pas compte de l'influence de la pesanteur, il en est de même pour la pression dans un fluide.

• Équation d'état d'un fluide

• L'équation d'état d'un fluide est la relation qui relie la pression, la température et le volume molaire :

$$f(P, T, V_m) = 0.$$

• Lorsque la pression d'un gaz tend vers zéro, ce gaz a les propriétés d'un gaz parfait dont l'équation d'état est :

$$PV_m = RT, \text{ ou } PV = nRT \text{ où } n \text{ représente la quantité de matière.}$$

La constante R , la constante de Boltzmann k_B et le nombre d'Avogadro N_A sont reliés par :

$$R = N_A k_B.$$

• Dans un domaine limité de température et de pression, une forme approchée de l'équation d'état d'un gaz réel est donnée par l'équation de Van der Waals :

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \text{ ou } \left(P + \frac{n^2 a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

• L'équation d'état d'une phase condensée idéale, par définition incompressible et indilatable, se réduit à :

$$V_m = C^{\text{ste}}.$$

• À partir de l'équation d'état, on définit deux coefficients :

– Le coefficient de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_P$, égal, pour un gaz parfait à $\frac{1}{T}$.

– Le coefficient de compressibilité isotherme $\chi_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$, égal, pour un gaz parfait à $\frac{1}{P}$.

Ces deux coefficients sont nuls pour une phase condensée idéale.

◆ Pour s'entraîner : ex. 2, 3, 4, 5 et 6

• Modèle cinétique du gaz parfait

Le modèle du gaz parfait consiste à négliger les interactions à distance entre les molécules. La pression se limite à la pression cinétique, manifestation macroscopique des transferts de quantité de mouvement entre les molécules du gaz et la paroi. Elle s'exprime en fonction de la vitesse quadratique u , de la masse m de chaque molécule et de la densité moléculaire n^* :

$$P = \frac{1}{3} n^* m u^2 \text{ ou } PV = \frac{1}{3} n M u^2.$$

Conseils et pièges à éviter

- Ne pas confondre la force pressante appliquée à une surface et la pression, égale à la force par unité de surface. Du point de vue dimensionnel, une pression est une force divisée par une surface : $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2} = 1 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$.
- Les forces pressantes sont orientées orthogonalement à la paroi. Si cette paroi n'est pas plane, il faut additionner les vecteurs force et non les normes de ces forces (voir exercice 1).
- La température exprimée en $^{\circ}\text{C}$ ne peut être utilisée que pour exprimer des variations de température. Chaque fois que la température intervient dans une multiplication (ou un quotient) il faut impérativement utiliser la température absolue, exprimée en kelvin.

1 Hémisphères de Magdebourg

Otto von Guericke, bourgmestre de Magdebourg, imagina une expérience destinée à montrer l'existence de la pression atmosphérique. Deux hémisphères creux en laiton sont assemblés, avec un joint étanche. Un des hémisphères comporte un robinet relié à une pompe ce qui permet de réaliser un vide partiel à l'intérieur. La pression atmosphérique les maintient alors collés l'un à l'autre. En 1654, à Ratisbonne et en présence de l'empereur Ferdinand III, il fallut utiliser deux attelages de 8 chevaux pour les séparer.

Déterminer la force à appliquer sur chaque hémisphère pour les séparer en supposant leur rayon R égal à 40 cm, la pression atmosphérique P_0 égale à 1 bar (10^5 Pa) et la pression interne égale à $\frac{P_0}{10}$.

Conseils

- Même si l'énoncé ne le précise pas explicitement, il est nécessaire de faire un ou plusieurs schémas montrant clairement les différentes forces exercées sur un hémisphère et leurs orientations.
- Un schéma en perspective permet de représenter un dispositif, mais ne permet pas de représenter clairement les angles et les projections. Pour les raisonnements quantitatifs, il est préférable de raisonner sur des coupes par un plan.
- Les forces pressantes appliquées à chaque élément de surface ne sont pas colinéaires. Il est donc nécessaire de les projeter avant de tenter d'en calculer la somme. Quelle est la direction de la force résultante ?
- Quel est le rapport entre les aires d'une surface plane et de sa projection sur un plan ?

2 Pression et forces

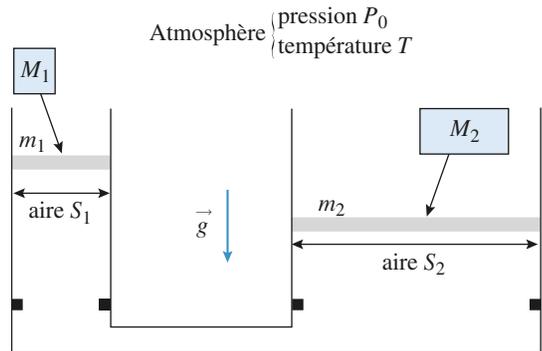
On étudie le dispositif représenté sur la figure. Les deux cylindres verticaux, munis de pistons mobiles de sections S_1 et S_2 et de masses m_1 et m_2 , sont en communication. Le gaz qui les remplit est supposé parfait et il est constamment en équilibre thermique avec le milieu extérieur de température T . Des butées empêchent les pistons de tomber au fond des cylindres.

Le système est en équilibre et le volume total de gaz est V_0 .

1 • À quelle condition, portant sur les masses et les surfaces, le système peut-il être en équilibre sans que les pistons touchent une butée ? L'hypothèse du gaz parfait est-elle prise en compte dans ce résultat ?

2 • On ajoute une surcharge de masse M_1 sur le piston de gauche. Décrire le nouvel état d'équilibre : position des pistons, volume et pression du gaz.

3 • On ajoute une autre surcharge, de masse M_2 sur le piston de droite. Déterminer l'état d'équilibre obtenu selon les valeurs de M_2 .



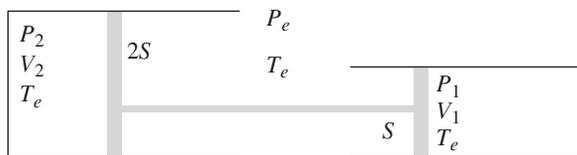
Conseils

- Bien faire l'inventaire de toutes les forces qui s'exercent sur chaque solide en en repérant le sens. À quelle condition un solide est-il en équilibre mécanique ?
- Quelle est la valeur de la force pressante exercée par l'atmosphère sur le solide constitué par le piston d'aire S_1 et le solide de masse M_1 ?

3 Équilibre d'un système

On étudie le dispositif représenté sur la figure. Les deux cylindres horizontaux, remplis d'un gaz parfait, sont munis de pistons mobiles d'aires S et $2S$, reliés par une tige horizontale rigide dont on négligera la section. L'ensemble est en équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère extérieure, de pression P_e et de température T_e .

L'état initial est caractérisé par : $P_1 = P_2 = P_e = P_0$, $V_1 = V_2 = V_0$ et $T_e = T_0$.



1 • Déterminer les pressions P_1 et P_2 ainsi que les volumes V_1 et V_2 lorsque la pression et la température extérieures prennent des valeurs quelconques P_e et T_e . On pourra poser $\alpha = \frac{T_e P_0}{T_0 P_e}$, $X_1 = \frac{V_1}{V_0}$ et $X_2 = \frac{V_2}{V_0}$.

2 • La pression extérieure étant maintenue égale à P_0 , la température varie légèrement : $T_e = T_0(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \ll 1$.

Déterminer V_1 et V_2 et le volume total de gaz V sous la forme d'une fonction affine de la température T .

Définir et exprimer un coefficient de dilatation à pression extérieure constante pour le système pris dans les conditions initiales.

Conseils

Dans un problème un peu complexe, comme celui-ci, il faut commencer par trouver autant d'équations qu'il y a d'inconnues. Nous avons ici 4 quantités inconnues : P_1 , P_2 , V_1 et V_2 .

Il nous faut donc trouver 4 équations qui traduisent toutes les données significatives de l'énoncé :

- Chaque cylindre est rempli d'un gaz parfait, d'où deux équations.
- Les deux volumes sont liés entre eux par la tige rigide, d'où une équation.
- Le solide constitué par les pistons et la tige est à l'équilibre mécanique, soit une équation.

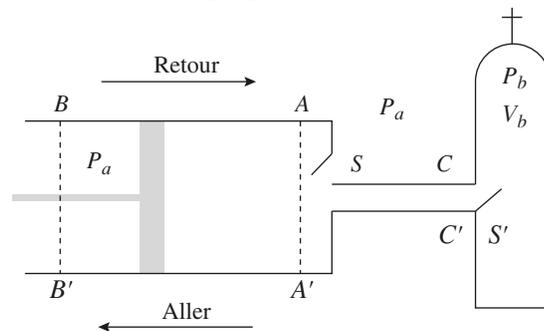
Nul n'est à l'abri d'une erreur de calcul ! Il convient donc de les détecter en vérifiant les résultats :

- Homogénéité (d'où l'intérêt de faire apparaître des grandeurs adimensionnées comme α , X_1 et X_2).
- Vérification pour des cas limites pour lesquels la solution est évidente.

4 Remplissage d'une bouteille d'air comprimé

D'après Concours communs Mines - Ponts MP 2004

Afin d'effectuer le remplissage d'une bouteille à parois indéformables, de volume V_b , on utilise un compresseur constitué (voir figure) d'un cylindre, de deux soupapes S et S' et d'un piston, mobile sans frottement entre les positions extrêmes AA' et BB' . Lors de l'aller (phase d'aspiration) la soupape S est ouverte alors que S' est fermée ; on a alors admission de l'air atmosphérique dans le cylindre à la pression P_{atm} . Lors du retour (phase de compression), l'air dans le cylindre est tout d'abord comprimé, de la pression P_a à la pression P_b , S et S' étant fermées ; la soupape S restant fermée, la soupape S' s'ouvre dès que la pression dans le cylindre devient supérieure à celle de la bouteille P_b . Quand le piston est en AA' , le volume limité par le piston et la section CC' est V_{min} ; quand le piston est en BB' , ce volume est égal à V_{max} . Les transformations de l'air sont isothermes (les températures dans le cylindre et dans la bouteille sont identiques, égales à la température T_a de l'atmosphère) ; l'air est toujours considéré comme un gaz parfait.



1 • La pompe n'ayant pas encore fonctionné, l'état initial du système est le suivant :

- Bouteille : pression $P_b = P_{\text{atm}}$, température $T_b = T_a$.
- Cylindre : pression P_{atm} , température T_a , position du piston AA' .

Le piston fait un aller et un retour. Déterminer la pression P_b à l'intérieur de la bouteille à la fin de cette transformation ; en déduire, sous l'hypothèse $V_{\text{min}} \ll V_b$, la variation Δn de la quantité de gaz contenue dans la bouteille.

Application numérique : $P_{\text{atm}} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Pa}$,
 $V_b = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$, $V_{\text{min}} = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3$, $V_{\text{max}} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$,
 $T_a = 293 \text{ K}$ et $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

2 • Le compresseur ayant fonctionné, on considère qu'à un instant t donné, la soupape S est ouverte alors que la soupape S' est fermée ; l'état du système est alors le suivant :

- Bouteille : pression $P_b = p$, température $T_b = T_a$.
- Cylindre : pression P_{atm} , température T_a , position du piston AA' .

Le piston fait un aller-retour; déterminer le volume d'air V dans le cylindre lorsque la soupape S s'ouvre, puis, en fonction de p , V_b , P_{atm} , V_{min} et V_{max} , la pression p' dans la bouteille à la fin de cette opération. En déduire, en fonction des mêmes grandeurs, la variation Δp de la pression à l'intérieur de la bouteille. Déterminer la pression maximale p_{max} que l'on peut obtenir par ce procédé et interpréter le résultat obtenu.

3 • Calculer Δp et p_{max} pour $p = 0,2 \cdot 10^7 \text{ Pa}$, et en conservant les données numériques antérieures.

4 • On considère l'instant t de la question 2, l'état du système étant identique. Le piston fait α allers-retours par unité de temps, la durée de chaque aller-retour est notée Δt ($\Delta t = \frac{1}{\alpha}$). Établir l'équation différentielle liant p et

$$\frac{dp}{dt} \quad \left(\text{on assimilera } \frac{\Delta p}{\Delta t} \text{ à } \frac{dp}{dt} \right).$$

5 • Le compresseur ayant démarré à l'instant $t = 0$, les conditions initiales étant celles qui ont été définies à la question 1, déterminer la pression $p(t)$ à un instant t quelconque.

Compte tenu de l'inégalité $V_{\text{min}} \ll V_b$, on pourra poser $\tau = \frac{V_b}{(\alpha V_{\text{min}})}$. Pour $\alpha = 4$ allers et retours par seconde, calculer le temps T au bout duquel la pression p dans la bouteille est égale à $0,5 \times 10^7 \text{ Pa}$.

Conseils

- Même si l'énoncé ne le demande pas explicitement, il est vivement conseillé de tracer un graphique représentant la pression dans le cylindre en fonction du volume (questions 1 et 2). C'est en traçant un tel graphique que l'on analyse correctement les différentes étapes du processus.
- La difficulté consiste à définir précisément le système qui, à chaque étape, subit une compression isotherme: l'air du cylindre? l'air de la bouteille? l'ensemble?
- Pour la question 2, lors du retour du piston, il faut considérer deux phases, avant et après l'ouverture de S . Définir précisément le système qui subit la compression lors de ces deux phases.

5 Fonctionnement d'une bouteille de plongée

D'après Concours communs Mines - Ponts MP 2004

La pression dans la bouteille peut varier de 100 à 200 bars en début de plongée jusqu'à 30 à 50 bars en fin de plon-

gée: la réserve de sécurité est caractérisée par la pression de seuil p_s .

Il faut ramener la pression de l'air sortant de la bouteille à la pression ambiante, pression de l'air respiré par le plongeur. Le détendeur assure cette fonction. Ce dispositif, inséré entre la bouteille d'air et la bouche du plongeur fournit de l'air à la demande de ce dernier. Le détendeur possède ainsi plusieurs fonctions:

- il réduit la pression de l'air issu de la bouteille à la pression $p(z)$ de l'endroit où se trouve le plongeur;
- il fournit la quantité d'air nécessaire à la respiration du plongeur à la pression $p(z)$;
- il se bloque lorsque la pression P_b de l'air dans la bouteille devient de l'ordre de la pression seuil p_s . Le plongeur est alors averti qu'il doit passer sur la réserve et remonter.

1 • Au début de la plongée, la bouteille, de volume V_b , est remplie d'air à la température $T_b = T_a$ sous une pression p ; en profondeur ou en surface, la bouteille et son contenu prennent la température T_e , constante, de l'eau environnante. Calculer la quantité (exprimée en moles) d'air contenue dans la bouteille, d'une part au début de la plongée (n_i), d'autre part au moment où le détendeur se bloque (n_s).

Application numérique:

$$p = 2,0 \cdot 10^7 \text{ Pa}, \quad p_s = 4,0 \cdot 10^6 \text{ Pa}, \quad V_b = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3, \\ T_a = 293 \text{ K} \text{ et } T_e = 288 \text{ K}.$$

2 • La respiration du plongeur est périodique, de fréquence f . Sous la pression locale $p(z)$ et à la température T_e , le volume moyen de l'air inspiré au cours de chaque cycle (avant d'être ensuite rejeté à l'extérieur) est Ω_0 ; calculer le temps $\Delta t_s(z)$ au bout duquel le détendeur se bloque; pour simplifier les calculs on admettra que le temps de descente du plongeur à la profondeur z est négligeable, que ce dernier se maintient tout le temps $\Delta t_s(z)$ à la profondeur z et que le volume Ω_0 ne dépend pas de la profondeur.

Application numérique:

$$p(z) = 3,0 \text{ bar}, \quad \Omega_0 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3, \quad f = 0,2 \text{ s}^{-1} \\ \text{et } T = 288 \text{ K}.$$

3 • Comparer $\Delta t_s(z)$ au temps $\Delta t_s(0)$ mis par le détendeur pour se bloquer si le plongeur reste en surface ($p = 1,0 \text{ bar}$) et $T = T_a$.

Conseils

Pour toutes les questions, il suffit d'écrire l'équation d'état d'un gaz parfait. Il faut, dans chaque cas, bien délimiter le système et bien retranscrire les conditions de pression et de température données par l'énoncé.

6 Échauffement à volume constant

Un fluide d'équation d'état $f(P, V, T) = 0$ est enfermé dans un récipient de volume constant V_0 .

L'état initial est caractérisé par : $T = T_0$ et $P = P_0$.

Le volume étant maintenu constant, on impose une augmentation ΔT de température.

T passe de T_0 à $T_0 + \Delta T$ et la pression passe de P_0 à $P_0 + \Delta P$.

1 • Le fluide est un gaz parfait. Exprimer ΔP en fonction de P_0 , T_0 et ΔT .

A.N. : Calculer ΔP pour $\Delta T = 1 \text{ K}$, $P_0 = 1 \text{ bar}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$.

2 • Le fluide est une phase condensée idéale, indilatable et incompressible. Déterminer ΔP .

3 • Le fluide a un coefficient de dilatation α et un coefficient de compressibilité isotherme χ_T supposés constants dans le domaine de température et de pression considérés.

Écrire son équation d'état (valable dans ce domaine de T et P) et exprimer ΔP .

Pour le mercure ($\alpha = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T = 3,8 \cdot 10^{-11} \text{ Pa}^{-1}$), calculer ΔP pour $\Delta T = 1 \text{ K}$. Que se passe-t-il si, dans un thermomètre à liquide, celui-ci atteint le haut de la colonne ?

Conclure sur le bien-fondé du modèle de la phase condensée idéale pour cette expérience.

Conseils

- Question 1 : Il suffit d'écrire l'équation d'état en remarquant que le volume V est identique dans l'état initial et dans l'état final.
- Quelle est l'équation d'état d'une phase condensée idéale ? La pression et la température sont-elles dépendantes l'une de l'autre comme, par exemple, pour un gaz parfait ?
- Question 3 : pour obtenir l'équation d'état, on détermine $V(t)$ en supposant P constante à partir de α , puis on applique la définition de χ_T à la relation obtenue.

7 Fusion thermonucléaire

1 • On considère deux sphères chargées A et B , de même masse m et de même charge q . B est initialement immobile et A est lancée contre B depuis une position éloignée, avec une vitesse initiale v_0 ; on suppose que la droite qui relie les centres des sphères et les vecteurs vitesses sont colinéaires. Déterminer d , distance minimale entre les deux centres.

2 • On aimerait réaliser la fusion de noyaux de deutérium portés à très haute température. On suppose que les interactions attractives entre nucléons l'emportent sur la répulsion coulombienne si la distance entre les centres des noyaux devient inférieure à d_0 , avec $d_0 = 3,7 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. Donner l'ordre de grandeur de la température à partir de laquelle la fusion est envisageable.

Données : charge élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $\epsilon_0 \approx 1 \cdot 10^{-11} \text{ F.m}^{-1}$.

3 • En fait, la fusion s'amorce pour des températures voisines de quelques 10^7 K . On peut tenter d'expliquer ce phénomène par le fait que la vitesse quadratique moyenne u n'est qu'une moyenne et que certains noyaux sont plus rapides. Un modèle statistique de la répartition des vitesses des particules d'un gaz à l'équilibre (loi de Maxwell) nous donne la probabilité $\mathcal{P}(x)$ pour une particule d'avoir une vitesse supérieure à xu :

x	0	0,5	1	2	3	3,8	4
$\mathcal{P}(x)$	1	0,86	0,39	$7,4 \cdot 10^{-3}$	$5,9 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$	$4,1 \cdot 10^{-10}$

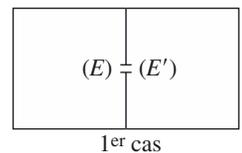
Si on suppose qu'il suffit qu'il suffit que une molécule sur 1 milliard ait une vitesse suffisante, que devient la condition sur la température ? Cet argument fournit-il une explication à notre problème ?

Conseils

- Question 1 : voir le cours de mécanique (système isolé de deux particules). Il suffit d'exprimer la conservation de l'énergie. C'est encore plus simple dans le référentiel barycentrique.
- Pour la question 2, on cherche un ordre de grandeur. Tout calcul précis est superflu.

8 Tamis moléculaire

Une mole de gaz parfait est contenue dans une enceinte rigide (E) de volume V . L'ensemble est maintenu à la température T .



1 • On perce dans la paroi un trou d'aire S par lequel le gaz s'échappe dans une enceinte (E') initialement vide, de même volume que (E) et maintenue à la même température.

À quelle condition peut-on conserver l'hypothèse d'isotropie de distribution des vitesses ?

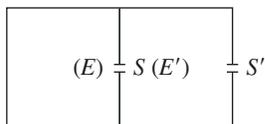
2 • N et N' étant les nombres de particules présentes dans les enceintes E et E' à l'instant t et u la vitesse quadratique du gaz à la température T , montrer que $\frac{dN}{dt} = (N - N') \frac{Su}{6V}$.

3 • En déduire l'allure des courbes $N(t)$ et $N'(t)$.

4 • La cloison est percée de 1 000 trous d'aire 10^{-10} m^2 , le volume de l'enceinte est $V = 1 \text{ dm}^3$ et $u = 1 400 \text{ ms}^{-1}$. Donner l'expression du temps caractéristique du phénomène, τ_C .

Commenter la variation de ce temps en fonction des paramètres du problème (S , V , T , u , masse des particules, etc.).

5 • On considère maintenant le dispositif représenté ci-contre : (E') est ouverte sur le vide grâce à un trou identique au précédent. À l'instant initial toutes les particules sont dans (E) et on met (E) et (E') en communication.



a. Donner, en utilisant des justifications qualitatives, l'allure des fonctions N et N' .

b. Le gaz est un mélange de deux isotopes (on supposera pour simplifier que ces deux isotopes sont présents en proportions identiques à $t = 0$).

Identifier comment évolue, en fonction du temps, le rapport des quantités de particules $\rho = \frac{N' \text{ (isotope 1)}}{N' \text{ (isotope 2)}}$

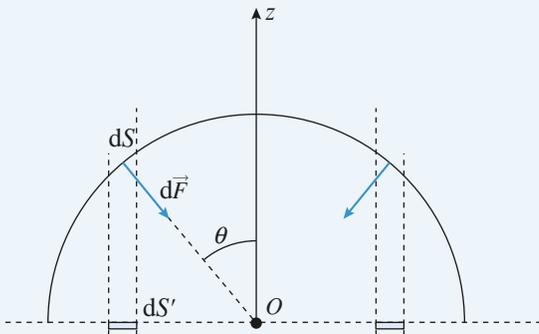
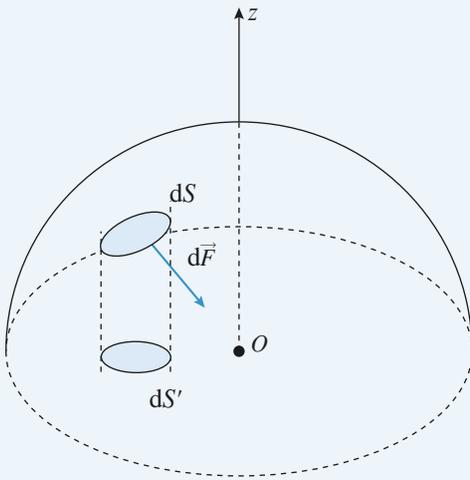
dans (E'); on supposera l'isotope 2 plus lourd que le 1.

c. Citer une application de ce travail.

Conseils

- La question 1 attend une réponse purement qualitative. Il faut comparer les dimensions du trou à une autre longueur caractéristique du système.
- Pour la question 2, il faut reprendre le dénombrement du nombre de particules de E dont la trajectoire passe par le trou pendant une durée donnée. Il est usuel de raisonner sur le modèle simplifié où les molécules ont toutes la même vitesse, et où ces vitesses sont orientées selon 3 axes orthogonaux.
- En quoi les deux isotopes diffèrent-ils ? Pourquoi est-ce ici important ?

1 Hémisphères de Magdebourg



Notons O le centre de la sphère et Oz l'axe de symétrie d'un hémisphère. On voit sur les schémas que les forces pressantes $d\vec{F}$ exercées par l'atmosphère sur chaque élément de surface dS ne sont pas colinéaires. En considérant deux éléments de surface symétrique (voir figure en coupe), on constate que les composantes orthogonales à Oz se compensent.

La résultante des forces de pression atmosphérique est donc colinéaire à Oz . Il en est de même pour les forces exercées par l'air contenu à l'intérieur.

La composante selon Oz de la force exercée par l'atmosphère sur un élément dS est: $dF_z = -P_0 dS \cos \theta$. Or $dS \cos \theta = dS'$, aire du projeté de dS sur le plan orthogonal à Oz .

La force résultante est:

$$\vec{F} = \iint_{\text{hémisphère}} dF_z \vec{e}_z = -P_0 \iint_{\text{hémisphère}} dS' \vec{e}_z$$

$\iint_{\text{hémisphère}} dS'$, somme de tous les éléments dS' n'est autre que l'aire du disque de rayon R .

On en déduit la résultante des forces exercées par l'atmosphère: $\vec{F}_{\text{atm}} = -P_0 \pi R^2 \vec{e}_z$

ainsi que celle des forces exercées par l'air intérieur: $\vec{F}_{\text{int}} = +P_{\text{int}} \pi R^2 \vec{e}_z$

Pour vaincre ces forces, il faut exercer une force de traction minimale: $F = (P_0 - P_{\text{int}}) \pi R^2 \vec{e}_z = 0,9 P_0 \pi R^2 \vec{e}_z$
A.N.: $F > 4,5 \cdot 10^4 \text{ N}$.

2 Pression et forces

1 • Notons P la pression du gaz enfermé dans le système et orientons les forces positivement vers le haut. Le système étant à l'équilibre, cette pression est uniforme.

Chaque piston est soumis à la force de pesanteur orientée vers le bas et à deux forces pressantes: celle exercée par l'atmosphère orientée vers le bas et celle exercée par le gaz du cylindre orientée vers le haut.

Équilibre mécanique du piston de masse m_1 :

$$m_1 g + P_0 S_1 = P S_1$$

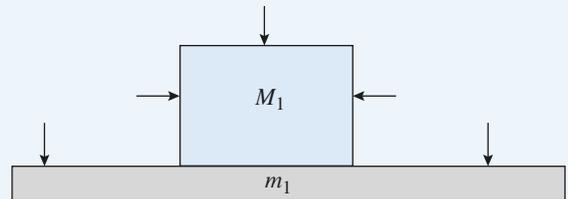
Équilibre mécanique du piston de masse m_2 :

$$m_2 g + P_0 S_2 = P S_2$$

On en déduit la condition cherchée en éliminant les pressions P et P_0 : $m_1 S_2 = m_2 S_1$.

L'hypothèse du gaz parfait n'est pas prise en compte; nous avons uniquement supposé que le gaz était en équilibre, donc de pression uniforme.

2 • Considérons le solide constitué du piston de masse m_1 et de la surcharge de masse M_1 .



Les forces pressantes exercées par l'atmosphère sur les parois verticales se compensent tandis que celles qui sont exercées sur les faces horizontales ont une résultante égale à $P_0 S_1$, dirigée vers le bas.

Remarquons que ce résultat est vrai, même si la surcharge a une forme quelconque. Pour le montrer, il faut utiliser le raisonnement développé dans le corrigé de l'exercice 1.

La condition d'équilibre deviendrait alors:

$$(m_1 + M_1) S_2 = m_2 S_1, \text{ incompatible avec } m_1 S_2 = m_2 S_1.$$

L'équilibre est rompu, le piston de masse m_1 tombe jusqu'à reposer sur les butées. La pression est imposée par l'équilibre du second piston:

$$m_2 g + P_0 S_2 = P S_2, \text{ soit } P = P_0 + \frac{m_2 g}{S_2}.$$

Cette pression, indépendante de M_1 n'a pas varié depuis l'équilibre de la question 1. La température étant constante, le volume n'a pas non plus varié, d'où : $V = V_0$.

3 • On obtient à nouveau un équilibre sans appui sur les butées si : $(m_1 + M_1) S_2 = (m_2 + M_2) S_1$.

Sachant que $m_1 S_2 = m_2 S_1$, Trois cas se présentent :

• $M_2 < M_1 \frac{S_2}{S_1}$: Le piston (1) reste en butée. La pression

est imposée par l'équilibre du piston (2) :

$$P = P_0 + \frac{(m_2 + M_2)g}{S_2} \text{ et, comme le produit } PV \text{ est}$$

$$\text{constant : } V = V_0 \frac{P_0 S_2 + m_2 g}{P_0 S_2 + (m_2 + M_2)g}.$$

• $M_2 = M_1 \frac{S_2}{S_1}$: Les deux pistons sont à l'équilibre sous

l'effet des seules forces de pression. La position des pistons est indifférente.

• $M_2 > M_1 \frac{S_2}{S_1}$: Le piston (2) tombe jusqu'à se trouver sur

les butées. La pression est imposée par l'équilibre du piston (1) : $P = P_0 + \frac{(m_1 + M_1)g}{S_2}$

$$\text{et } V = V_0 \frac{P_0 S_1 + m_1 g}{P_0 S_1 + (m_1 + M_1)g}.$$

3 Équilibre d'un système

1 • Les deux cylindres sont remplis d'un gaz parfait, d'où :

$$\frac{P_1 V_1}{T_e} = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_2 V_2}{T_e}.$$

Notons que les conditions initiales (mêmes P , V , T dans les deux cylindres) impliquent que les quantités de gaz sont égales.

• Pour un déplacement de la tige rigide de x vers la droite, les variations de V_1 et V_2 sont :

$$\Delta V_1 = -Sx \text{ et } \Delta V_2 = 2Sx, \text{ soit : } \Delta V_2 = -2\Delta V_1.$$

Les volumes sont donc reliés par : $V_2 - V_0 = -2(V_1 - V_0)$ ou encore : $V_2 + 2V_1 = 3V_0$.

• La résultante des forces appliquées au solide constitué par la tige et les deux pistons est nulle. Ces forces se limitent aux forces pressantes exercées sur les deux pistons. Prenons un sens positif orienté de la gauche vers la droite de la figure.

Sur le piston d'aire $2S$: $+2P_2S$ et $-2P_eS$.

Sur le piston d'aire S : $+P_eS$ et $-P_1S$.

On en déduit : $2P_2S - 2P_eS + P_eS - P_1S = 0$,

soit : $2P_2 - P_1 = P_e$.

En toute rigueur, l'atmosphère extérieure exerce sur les pistons les forces $-2P_e(S-s)$ et $P_e(S-s)$ si s est la section de la tige, mais, conformément à l'énoncé, nous

convenons de négliger s devant S .

Nous avons donc à résoudre le système :

$$P_1 V_1 = P_2 V_2 = P_0 V_0 \frac{T_e}{T_0} \quad (1) \text{ et } (2)$$

$$V_2 + 2V_1 = 3V_0 \quad (3)$$

$$2P_2 - P_1 = P_e \quad (4)$$

On injecte (1) et (2) dans (4) en utilisant les notations proposées :

$$X_2 + 2X_1 = 3$$

$$\frac{2}{X_2} - \frac{1}{X_1} = \frac{1}{\alpha}.$$

On élimine X_2 , ce qui donne l'équation du second degré :

$$2X_1^2 - (4\alpha - 3)X_1 - 3\alpha = 0.$$

La solution positive est :

$$X_1 = \frac{3 - 4\alpha + \sqrt{9 + 16\alpha^2}}{4}$$

$$\text{soit : } V_1 = \frac{3 - 4\alpha + \sqrt{9 + 16\alpha^2}}{4} V_0.$$

On obtient de même la solution inférieure à 3 pour X_2 :

$$X_2 = \frac{3 - 4\alpha + \sqrt{9 + 16\alpha^2}}{2}$$

$$\text{soit } V_2 = \frac{3 - 4\alpha + \sqrt{9 + 16\alpha^2}}{2} V_0.$$

On détermine ensuite les pressions :

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{P_0 V_0 T_e}{T_0 V_1} = P_e \alpha \frac{V_0}{V_1} = P_e \frac{4\alpha}{3 - 4\alpha + \sqrt{9 + 16\alpha^2}} \\ &= P_e \frac{4\alpha - 3 + \sqrt{16\alpha^2 + 9}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et de même } P_2 &= P_e \frac{2\alpha}{3 - 4\alpha + \sqrt{9 + 16\alpha^2}} \\ &= P_e \frac{4\alpha - 3 + \sqrt{16\alpha^2 + 9}}{12}. \end{aligned}$$

Pour détecter une éventuelle erreur de calcul, n'oublions pas de vérifier que :

• $V_2 + 2V_1 = 3V_0$ et $2P_2 - P_1 = P_e$.

• $V_1 = V_2 = V_0$ et $P_1 = P_2 = P_e$ si $\alpha = 1$ (conditions initiales)

2 • Si $P_e = P_0$, alors $\alpha = 1 + \varepsilon$. Pour obtenir une approximation affine de la fonction $\mathcal{W}(\varepsilon)$, il faut faire un développement limité à l'ordre 1 en ε :

$$\sqrt{9 + 16\alpha^2} = \sqrt{9 + 16(1 + \varepsilon)^2} = (25 + 32\varepsilon)^{\frac{1}{2}} =$$

$$5\left(1 + \frac{32}{25}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} = 5\left(1 + \frac{16}{25}\varepsilon\right)^{\frac{1}{2}} = 5 + \frac{16}{5}\varepsilon.$$

$$\text{À l'ordre 1 en } \varepsilon : V_1 = V_0\left(1 - \frac{\varepsilon}{5}\right) = V_0\left(1 - \frac{T_e - T_0}{5T_0}\right).$$

$$\text{De même: } V_2 = V_0 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{5} \right) = V_0 \left(1 - \frac{2(T_e - T_0)}{5T_0} \right)$$

$$\text{et } V = V_0 \left(2 + \frac{T_e - T_0}{5T_0} \right).$$

Dans les conditions initiales ($V = 2V_0$ et $P = P_0$) le coefficient de dilatation à pression extérieure constante du système est donc :

$$\alpha = \frac{1}{2V_0} \left(\frac{dV}{dT_e} \right)_{P_e = P_0} \quad \text{soit : } \alpha = \frac{1}{10T_0}.$$

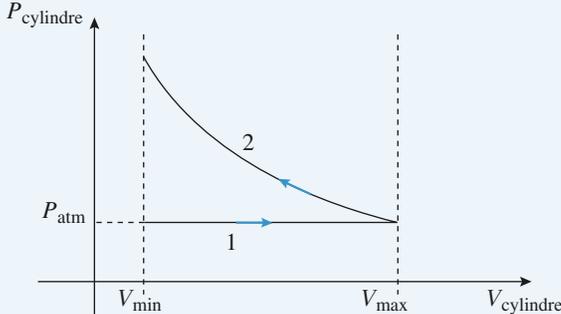
4 Remplissage d'une bouteille d'air comprimé

1 • Le premier aller-retour du piston est représenté sur le graphe :

étape 1 : aspiration d'air atmosphérique, la pression restant égale à P_{atm} .

étape 2 : la soupape S' s'ouvre immédiatement, la totalité du gaz (contenu dans le cylindre et dans la bouteille) est comprimé. Le volume passe de $V_{\text{max}} + V_b$ à $V_{\text{min}} + V_b$, le produit PV restant constant. On en déduit :

$$P_b = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}} + V_b)}{V_{\text{min}} + V_b}$$



Les quantités de matière contenues dans la bouteille avant et après l'aller-retour sont :

$$n_{\text{ini}} = \frac{P_{\text{atm}} V_b}{R T_a} \quad \text{et} \quad n_{\text{final}} = \frac{P_b V_b}{R T_a}$$

$$\Delta n = n_{\text{final}} - n_{\text{ini}} = \frac{V_b}{R T_a} \frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}} - V_{\text{min}})}{V_{\text{min}} + V_b}.$$

Avec l'hypothèse $V_{\text{min}} \ll V_b$, on obtient :

$$\Delta n = \frac{P_{\text{atm}}(V_{\text{max}} - V_{\text{min}})}{R T_a}$$

$$\text{A.N.: } \Delta n = 8,1 \cdot 10^{-2} \text{ mol.}$$

2 • Représentons le graphe pour cet aller-retour.

Pour chaque étape, il suffit d'écrire : $PV = C^{\text{ste}}$ en identifiant bien le système qui subit la compression.

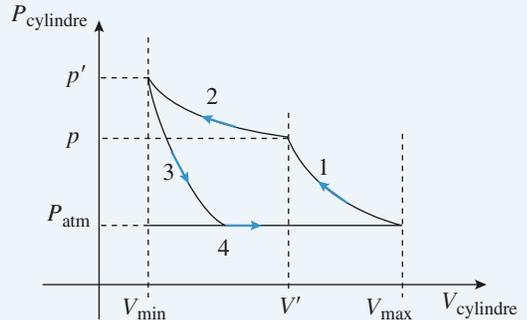
Étape 1 : compression du gaz contenu dans le cylindre :

$$P_{\text{atm}} V_{\text{max}} = p V'.$$

Étape 2 : compression de tout le gaz (cylindre + bouteille) :

$$p(V' + V_b) = p'(V_{\text{min}} + V_b).$$

Étapes 3 et 4 : détente du gaz contenu dans V_{min} puis aspiration d'air atmosphérique. (Inutile pour la question posée.)



$$\text{On en déduit donc: } V' = \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{p}$$

$$\text{et } p' = \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}} + p V_b}{V_{\text{min}} + V_b}$$

$$\Delta p = p' - p \quad \text{soit : } \Delta p = \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}} - p V_{\text{min}}}{V_{\text{min}} + V_b}.$$

La pression maximale est obtenue pour $\Delta p = 0$, soit :

$$P_{\text{max}} = \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}}.$$

Lorsque $p = P_{\text{max}}$, $V' = V_{\text{min}}$ et aucune quantité d'air n'est refoulée dans la bouteille (la phase 2 n'existe plus).

3 • A.N.: $\Delta p = 0,32 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $p_{\text{max}} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Pa}$

$$4 \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \alpha \frac{P_{\text{atm}} V_{\text{max}} - p V_{\text{min}}}{V_{\text{min}} + V_b}$$

$$\text{et } \frac{\Delta p}{\Delta t} \approx \frac{dp}{dt}.$$

On en tire l'équation différentielle :

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\alpha V_{\text{min}}}{V_{\text{min}} + V_b} p = \frac{\alpha P_{\text{atm}} V_{\text{max}}}{V_{\text{min}} + V_b}.$$

5 • Compte tenu de $V_{\text{min}} \ll V_b$, l'équation différentielle

$$\text{s'écrit : } \frac{dp}{dt} + \frac{p}{\tau} = \frac{P_{\text{max}}}{\tau}.$$

On obtient, avec la condition initiale :

$$p(0) = P_{\text{atm}} : p(t) = P_{\text{max}} - (P_{\text{max}} - P_{\text{atm}}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right);$$

$$\text{On a donc } T = \tau \ln \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{atm}}}{P_{\text{max}} - p};$$

$$\text{A.N.: } t = 62,5 \text{ s et } \boxed{T = 44 \text{ s}}.$$

5 Fonctionnement d'une bouteille de plongée

1 • On écrit l'équation d'état pour la bouteille remplie à la température T_a et lorsque $P = p_s$ à la température T_e :

$$n_i = \frac{p V_b}{R T_a} \text{ et } n_s = \frac{p_s V_b}{R T_c}.$$

A.N.: $n_i = 82,1 \text{ mol}$ et $n_s = 16,7 \text{ mol}$.

2 • À chaque cycle respiratoire le plongeur consomme

$$\text{une quantité d'air : } n(z) = \frac{p(z) \Omega_0}{R T_c}.$$

Le nombre de cycles est donc : $\frac{n_i - n_s}{n(z)}$

et la durée d'utilisation :

$$\Delta t_s(z) = \frac{1}{f} \frac{n_i - n_s}{n(z)} = \frac{1}{f} \frac{n_i - n_s}{\Omega_0} \frac{R T_c}{p(z)}$$

$$\Delta t_s(z) = 1300 \text{ s}.$$

3 • En surface, n_i est inchangé. $n_s = \frac{p_s V_b}{R T_a}$ soit :

$$n_s = 16,4 \text{ mol (pratiquement inchangé)}.$$

$$\Delta t_s(\text{surface}) = \frac{1}{f} \frac{n_i - n_s}{\Omega_0} \frac{R T_s}{P_{\text{atm}}}, \text{ soit :}$$

$$\Delta t_s(\text{surface}) = 3930 \text{ s}.$$

En première approximation, si on considère n_s inchangé :

$$\frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = \frac{T_c}{T_a} \frac{P_{\text{atm}}}{p(z)};$$

$$\text{A.N. : } \frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = 0,33.$$

6 Échauffement à volume constant

1 • On écrit l'équation d'état en remarquant que la quantité de matière et le volume sont constants :

$$(P_0 + \Delta P)V = n R(T_0 + \Delta T) \text{ et } P_0 V = n R T_0 \text{ d'où :}$$

$$n R \frac{\Delta T}{V_0} \text{ ou : } \Delta P = \frac{P_0}{T_0} \Delta T.$$

$$\text{A.N. : } \Delta P = 3,3 \cdot 10^2 \text{ Pa} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ bar}$$

2 • L'équation d'état d'une phase condensée parfaite est : $V = C^{\text{te}}$. P et T sont donc découplés et la pression reste égale à P_0 .

3 • Par définition : $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = \alpha V$.

Si on suppose P constant :

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT \text{ donc : } \ln \frac{V}{V_0} = \alpha(T - T_0) + C(P).$$

La constante d'intégration n'est constante que vis-à-vis de V , d'où la notation $C(P)$.

L'état initial (P_0, V_0, T_0) impose : $C(P) = 0$ pour $P = P_0$.

On dérive par rapport à P à T constant :

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = C'(P) \text{ et, par définition :}$$

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dP} = -\chi_T \text{ donc : } C(P) = -\chi_T (P - P_0) + K(V).$$

$C(P)$ étant nul pour $P = P_0$, on en déduit : $K(V) = 0$.

$$\text{L'équation d'état cherchée et donc : } \ln \frac{V}{V_0} = \alpha T - \chi_T P$$

Au cours de l'évolution isochore :

$$V_{\text{final}} = V_0, \text{ donc : } 0 = \alpha \Delta T - \Delta P, \text{ d'où :}$$

$$\Delta P = \frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T$$

A.N. : $\Delta P = 39 \text{ bar}$.

Si le mercure (ou tout autre liquide) du thermomètre atteint le haut de la colonne, la pression augmente considérablement et fait éclater le tube de verre (on suppose que le verre se dilate moins que le liquide).

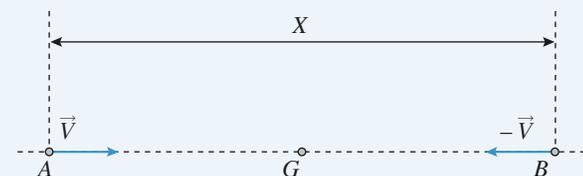
Le modèle de la phase condensée idéale est très proche de la réalité pour l'étude de la dilatation et de la compressibilité. En revanche, même si ces deux coefficients tendent l'un et l'autre vers 0, leur rapport ne tend pas vers 0, et la suppression peut prendre des valeurs très importantes.

7 Fusion thermonucléaire

1 • On se place dans le référentiel barycentrique \mathcal{R}^* , dans lequel les deux particules se dirigent vers leur barycentre G , immobile. Dans \mathcal{R}^* , les vitesses initiales des deux particules (lorsque leur distance est infinie) sont égales à $\frac{v_0}{2}$. Si x est la distance entre les centres, l'énergie

$$\text{potentielle d'interaction est : } \mathcal{E}_p = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 x};$$

à l'instant initial, $x \rightarrow \infty$ et $\mathcal{E}_p = 0$.



La valeur minimale de x est obtenue lorsque les deux particules rebroussement chemin dans \mathcal{R}^* , c'est-à-dire lorsque leurs vitesses dans \mathcal{R}^* sont nulles. La conservation de l'énergie mécanique entre la position initiale et la position de distance minimale s'écrit donc :

$$2 \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{V_0}{2} \right)^2 \right] + 0 = 0 + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}.$$

$$\text{On en déduit : } d = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 m V_0^2}.$$

2 • v_0 est de l'ordre de la vitesse d'agitation thermique, soit : $m v_0^2 \approx m u^2 = 3 k_B T$.

La charge de chaque noyau est $+e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ (charge élémentaire). Ces réactions sont donc possibles si :

$$T \approx \frac{e^2}{3\pi\epsilon_0 k_B d} \text{ soit } T \approx 5 \cdot 10^9 \text{ K}.$$

3 • Avec cette nouvelle condition, on peut poser $v_0 \approx 4u$, soit $m v_0^2 \approx 48 k_B T$. On obtient alors $T \approx 3 \cdot 10^8$ K.

C'est encore supérieur à la valeur constatée.

Un modèle plus exact doit prendre en compte l'effet Tunnel, qui ne peut être expliqué que par la physique quantique. En physique quantique, la conservation de l'énergie peut ne pas être respectée, à la condition que cela se produise pendant une durée suffisamment brève. Certains noyaux peuvent alors franchir la barrière de répulsion coulombienne à des températures où cela serait impossible selon la physique classique.

8 Tamis moléculaire

1 • Si on veut que la taille du trou ne modifie pas la distribution des vitesses, il faut que l'agitation thermique continue de régir les phénomènes (hypothèse du chaos moléculaire) : les chocs entre particules ne doivent pas être perturbés. Pour cela, les dimensions du trou doivent être faibles devant la distance moyenne parcourue par une particule entre deux chocs (que l'on appelle « libre parcours moyen »). Ainsi, si le trou est suffisamment petit, il n'y a pas de mouvement d'ensemble des particules vers le trou.

2 • Il faut faire la différence entre les particules qui passent de (E) à (E') et celles qui passent de (E') à (E). Comme la température est identique dans les deux enceintes, les vitesses quadratiques moyennes le sont aussi. Notons Ox un axe orthogonal à la surface de séparation et orienté de E vers E' et utilisons le modèle simplifié classique :

Nous supposons que toutes les particules ont une vitesse égale à la vitesse quadratique u et que les vitesses sont orientées selon les trois directions parallèles à Ox , Oy et Oz , dans les deux sens, avec une égale probabilité pour chaque orientation.

Les molécules arrivant sur le trou d'aire S pendant une durée infinitésimale dt sont, avec ce modèle, contenues dans un cylindre droit de base S et de hauteur $u dt$, donc de volume $Su dt$. $\frac{N}{V}$ représentant le nombre de molé-

cules par unité de volume, ce cylindre contient $\frac{N Su dt}{V}$

molécules dont $\frac{N Su dt}{6V}$ ont la vitesse correctement orientée pour passer à travers le trou.

Pendant la durée T , il est donc passé $\frac{N Su dt}{6V}$ molécules de E vers E' (correspondant à une diminution de N) et donc $\frac{N' Su dt}{6V}$ de E' vers E , correspondant à une augmentation de N . La variation infinitésimale de N est donc :

$$dN = \frac{N' Su dt}{6V} - \frac{N Su dt}{6V},$$

$$\text{d'où le résultat : } \frac{dN}{dt} = \frac{Su}{6V} (N' - N).$$

$$\mathbf{3 •} \text{ On a de même } -\frac{dN'}{dt} = (N' - N) \frac{Su}{6V}.$$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt} (N + N') = 0$$

$N + N' = NA$ (conservation du nombre de particules).

$$\text{D'où : } -\frac{dN}{dt} = (2N - NA) \frac{Su}{6V}$$

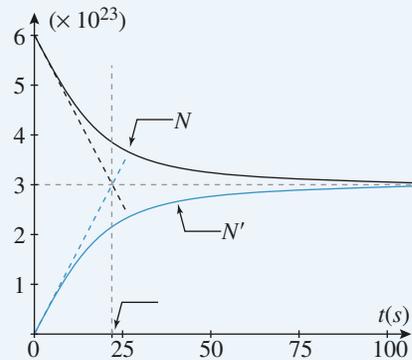
$$\frac{dN}{dt} + \frac{SuN}{3V} = NA \frac{Su}{6V}.$$

À $t = 0$, $N = N_A$, donc :

$$N(t) = \frac{N_A}{2} \left(1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \right)$$

$$\text{et } N'(t) = \frac{N_A}{2} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_C}\right) \right) \text{ avec } \tau_C = \frac{3V}{Su}.$$

Les courbes sont données ci-dessous : N et N' tendent bien vers $\frac{N_A}{2}$ à l'infini (équilibre statistique).



4 • Le temps caractéristique du phénomène est

$$\tau_C = \frac{3V}{Su} : \text{ lorsque } t \text{ est de l'ordre de grandeur de}$$

quelques τ_C , l'équilibre statistique est établi.

L'application numérique donne ici $\tau_C \approx 21$ s.

On peut faire les remarques suivantes :

- τ_C est d'autant plus grand que S est petit : si le trou est petit, l'équilibre statistique s'établit lentement ;
- τ_C est d'autant plus grand que u est faible : l'équilibre s'établira d'autant plus vite que l'agitation thermique (donc u) est importante. On se souvient que u est proportionnel à \sqrt{T} et inversement proportionnel à \sqrt{m} . Ceci est bien en accord avec une analyse qualitative du phénomène ;
- τ_C est d'autant plus grand que V est grand : plus la densité moléculaire est faible, plus le libre parcours moyen est important et donc grand devant les dimensions du trou.

5 • a. Puisque (E') est ouvert d'un autre trou par rapport aux questions précédentes, on peut penser que :

- N' est toujours inférieur à N (il l'était déjà au 3) ;

- N' passe par un maximum inférieur à $\frac{N_A}{2}$

(à $t = 0$, et pour $t \rightarrow \infty$, $N' = 0$) ;

- N est toujours décroissante (comme en 3)) ;

- les pentes à l'origine de N et N' sont opposées :

pour $t = 0$, il n'y a pas encore de particules en (E') donc le deuxième trou n'intervient pas pour $t = 0^+$.

Les instructions MAPLE pour le tracé, ainsi que les courbes sont données ci-dessous (elles sont tracées en

fonction de $u = \frac{1}{2\tau_C}$) :

```
eqs:=D(x)(u)=(y(u)-x(u)),D(y)(u)=(x(u)-2*y(u)) ;
```

```
# définition de l'ensemble des équations définissant le système
```

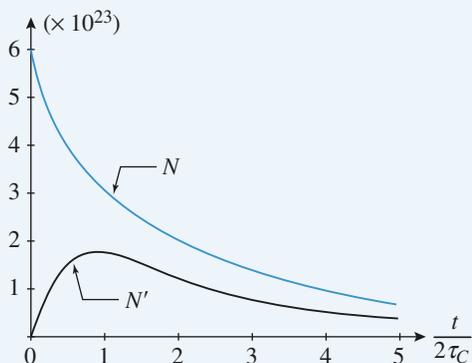
```
Z:=dsolve({eqs,x(0)=6*10^23,y(0)=0},{x(u),y(u)},numeric) ;
```

```
# solutions données sous forme numérique
```

```
with(plots): # ouverture du package plot. odeplot
```

```
(Z,[[u,x(u)],[u,y(u)]],0,5) ;
```

```
# tracé des solutions
```

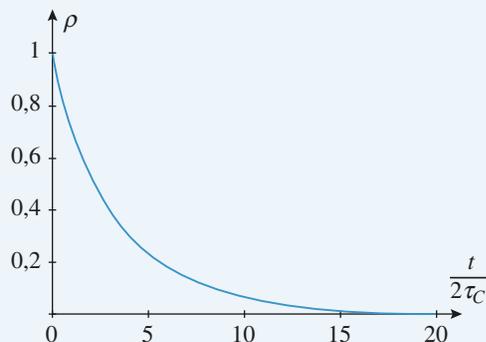


En effet, on a alors :

$$\frac{dN}{dt} = (N' - N) \frac{1}{2\tau_C} \quad \text{et} \quad \frac{dN'}{dt} = (N - 2N') \frac{1}{2\tau_C},$$

$$\text{soit :} \quad \frac{dN}{du} = (N' - N) \quad \text{et} \quad \frac{dN'}{du} = (N - 2N').$$

b. Pour $t = 0^*$, $\rho = 1$. Lorsqu'un temps suffisamment long (devant τ_C) se sera écoulé, les particules de l'isotope le plus lourd seront majoritaires dans (E') puisque τ_C est fonction croissante de la masse m des particules. La courbe donnant $\rho(u)$ est tracée ci-dessous :



c. Ce type de séparation isotopique est utilisé pour les deux isotopes naturels de l'uranium ^{235}U et ^{238}U .

Les minerais sont d'abord transformés en gaz UF_6 ; les $^{235}\text{UF}_6$ et $^{238}\text{UF}_6$ passent ensuite dans des séries de « tamis moléculaires » dont le principe repose sur les phénomènes décrits dans cet exercice (on procède aussi par ultracentrifugation de ces gaz).

LES OBJECTIFS

- Expression de la pression en un point d'un fluide au repos.
- Déterminer la résultante des forces de pression sur un solide.
- Savoir exprimer cette résultante au moyen du théorème d'Archimède lorsque celui-ci peut s'appliquer.

LES PRÉREQUIS

- Notions de pression dans un fluide et de forces pressantes.
- Équilibre mécanique d'un système soumis à plusieurs forces.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Gradient d'un champ scalaire.
- Surfaces : plan tangent et normale en un point.
- Intégrales de surface.

ESSENTIEL

Pression dans un fluide

• Considérons, à l'intérieur d'un fluide au repos, le système S constitué par le fluide situé à l'intérieur de la surface fermée Σ . Les phénomènes microscopiques internes au fluide ont une action sur S équivalente à une force surfacique.

À travers l'élément de surface d'aire dS situé en M , le fluide extérieur exerce sur S une force élémentaire $d\vec{F}$ telle que :

$$d\vec{F} = -P(M) dS \vec{n} = -P(M) d\vec{S}$$

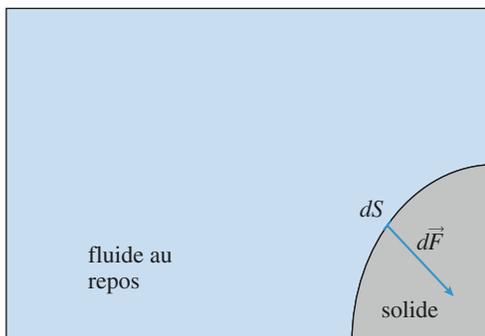
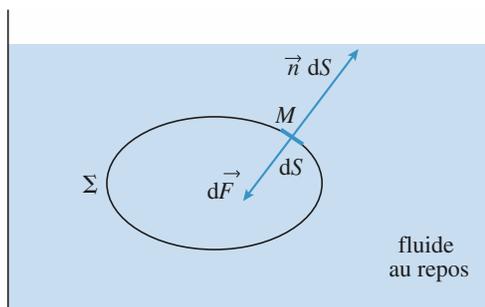
où \vec{n} est le vecteur unitaire de la normale à Σ , orientée vers l'extérieur.

$P(M)$, grandeur scalaire définie en tout point du fluide, est la **pression**. Elle est indépendante de l'orientation de $d\vec{S}$.

• La pression permet également d'exprimer la force qui s'exerce sur une paroi immergée :

$d\vec{F} = P(M) dS \vec{n}$, \vec{n} représentant le vecteur unitaire de la normale à la paroi, orientée du fluide vers la paroi.

• En USI, la pression s'exprime en pascal.



$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}^{-2}$. On utilise souvent le bar : $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. On peut retenir qu'une pression de 1 bar correspond à une force de 10 N par cm^2 .

- Nous considérerons que la pression est une fonction continue des coordonnées, que le fluide soit homogène ou non. C'est en particulier le cas à l'interface entre deux fluides.
- Si le fluide n'est pas au repos, il existe des forces surfaciques tangentes à la surface, liées à la viscosité du fluide.
- Si le champ de pression est uniforme, la résultante des forces de pression sur une surface fermée est nulle.

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 7

Relation fondamentale de la statique des fluides

- Dans le cas d'un champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ (axe z selon la verticale ascendante) la loi fondamentale de la statique des fluides s'écrit :

$$\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g} \text{ soit : } \frac{dP}{dz} = -\rho g$$

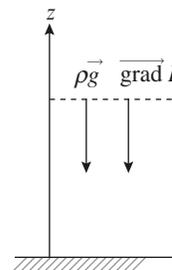
- Dans le cas plus général d'un fluide soumis à un champ de force de densité volumique \vec{f}_v , cette relation devient :

$$\vec{\text{grad}} P = \vec{f}_v$$

- Dans un fluide au repos soumis uniquement au champ de pesanteur \vec{g} , les surfaces isobares, orthogonales à $\vec{\text{grad}} P$ (et donc à \vec{g}) sont des plans horizontaux.

- Dans un fluide **incompressible** de masse volumique constante ρ soumis uniquement à un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$, le champ de pression a pour expression :

$$P = P_0 - \rho g z$$



► Pour s'entraîner : ex. 4, 7 et 8

Atmosphère isotherme

- L'étude de l'atmosphère isotherme conduit à la loi d'évolution de la pression en fonction de l'altitude :

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right),$$

où $H = \frac{RT}{Mg}$ est la hauteur caractéristique des variations de pression ; $H \approx 8,5 \text{ km}$ pour la température ambiante.

- Cette loi peut être interprétée comme traduisant la compétition entre l'énergie potentielle de pesanteur, mgz , et l'énergie d'agitation thermique, $k_B T$; on la généralise ainsi :

Dans un système macroscopique en équilibre à la température T , la probabilité de trouver une particule dans un état d'énergie E est proportionnelle au facteur de Boltzmann :

$$\exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right), \text{ où } k_B \text{ est la constante de Boltzmann, } k_B = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}.$$

► Pour s'entraîner : ex. 2, 3 et 9

Théorème d'Archimède

- Les forces pressantes exercées par un fluide quelconque au repos sur un corps placé en son sein ont une résultante, appelée poussée d'Archimède, opposée au poids du « fluide déplacé ».
- La poussée est appliquée au centre d'inertie C du « fluide déplacé », appelé centre de poussée.

- Ce résultat ne suppose pas que le fluide soit homogène : on peut l'appliquer à l'étude de l'équilibre d'un corps flottant, totalement immergé dans le fluide inhomogène constitué par un liquide surmontée de l'atmosphère. Dans ce cas, il est usuel de négliger la masse de « l'air déplacé » devant celle du « liquide déplacé ».

► **Pour s'entraîner : ex. 3, 5, 6, 8 et 9**

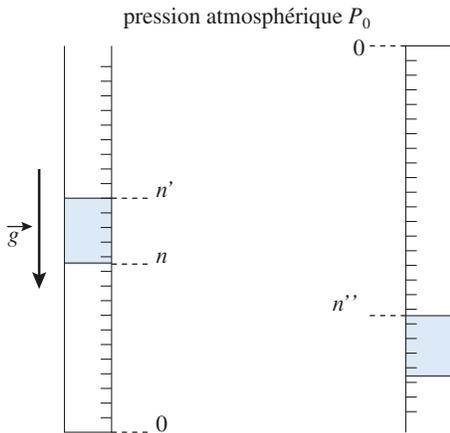
Conseils et pièges à éviter

- Ne pas confondre pression et force pressante.
- La force pressante est orientée. Pour déterminer la résultante des forces pressantes, il ne faut pas additionner (ou intégrer) les normes des forces pressantes mais leurs composantes sur des directions fixes.
- Ne pas appliquer inconsidérément la formule « toute faite » $P = P_0 - \rho g z$ sans être sûr que les conditions sont réunies : masse volumique uniforme, pesanteur uniforme et axe des z orienté vers le haut.
- Ne pas oublier les hypothèses du théorème d'Archimède : Le solide doit être totalement immergé dans le fluide. Pour ne pas l'appliquer inconsidérément, rien de tel que de bien en comprendre la démonstration.
- Se souvenir que, lorsqu'elle est définie, la force d'Archimède n'est autre que la résultante des forces de pression. Ne JAMAIS, dans un bilan de forces, compter la force d'Archimède ET les forces de pression !

1 Mesure de la pression atmosphérique

Un tube cylindrique de faible section en verre, fermé à l'une de ses extrémités est ouvert à l'autre bout. Il porte une graduation millimétrique. Le zéro de cette graduation correspond à l'extrémité fermée.

Le tube étant vertical et l'ouverture en haut, un index de mercure isole une certaine quantité d'air à 0 °C. On note n et n' les divisions correspondant aux extrémités de l'index de mercure.



On retourne le tube ; on attend l'équilibre thermique. On lit la position n'' de l'extrémité supérieure de l'index de mercure.

En déduire la pression P_0 en millimètres de mercure, puis en pascal.

A.N. : $n = 500$ mm, $n' = 600$ mm et $n'' = 650$ mm .

La masse volumique de mercure est :

$$\rho = 13,6 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} .$$

Conseils

- Les forces qui assurent la cohésion de l'index sont des forces de tension superficielle. Nous admettons que leur résultante est nulle, et que l'index de mercure se comporte comme un solide glissant sans frottement dans le tube.

- Bien faire l'inventaire des forces qui s'exercent sur l'index de mercure.

- Les températures initiale et finale sont égales.

2 Atmosphère isotherme

Une atmosphère en équilibre isotherme est constituée d'un gaz parfait de masse molaire M et de température $T = 293$ K . Le champ de pesanteur, \vec{g} , est supposé uniforme.

Données : $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$;
 $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

1 • En appliquant la relation fondamentale de la statique des fluides, déterminer l'expression de la pression $P(z)$ à l'altitude z ; on prendra $P(z=0) = P_0 = 1 \text{ bar}$.

2 • En déduire la densité particulaire $n^*(z)$ à l'altitude z en fonction de P_0 , k_B , T , g , z et m , masse d'une molécule de gaz.

Calculer l'épaisseur, H , de la couche atmosphérique telle que $n^*(H) = \frac{n^*(0)}{e}$ ($\ln e = 1$) .

Calculer l'épaisseur, h , de la couche atmosphérique telle que $n^*(h) = \frac{n^*(0)}{10}$.

3 • Exprimer la probabilité élémentaire $d\mathcal{P}(z)$ de trouver une molécule à l'altitude z (à dz près) en fonction de m , g , k_B , T et z .

Conseils

- Comment se projette la loi fondamentale de la statique des fluides ? Comment s'exprime la masse volumique d'un gaz parfait en fonction de la pression ?

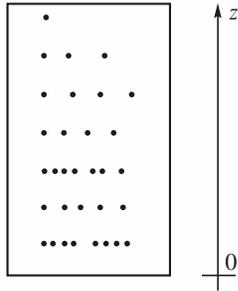
- La densité particulaire $n^*(z)$ est égale au nombre de particules par unité de volume. On l'obtient en exprimant le nombre dN de particules dans un volume élémentaire cylindrique de base S et de hauteur dz .

- Exprimer $d\mathcal{P}(z)$ en fonction du nombre $dN(z)$ de particules à l'altitude z et du nombre total N de particules. Comment exprimer ensuite $d\mathcal{P}(z)$ en fonction de $n^*(z)$? On pourra raisonner sur une colonne d'atmosphère de section S et de hauteur infinie.

3 Expérience de Jean Perrin

Le physicien français Jean Perrin a réalisé au début du siècle une expérience permettant de déterminer le nombre d'Avogadro. Cette détermination lui a valu, ainsi que ses autres travaux, le prix Nobel en 1926.

Il prépara, dans un récipient plein d'eau, une suspension de petites sphères de latex de rayon $a = 0,212 \mu\text{m}$. Il observa ensuite au microscope optique la répartition statistique de ces sphères en fonction de « l'altitude » z .



L'expérience est réalisée à la température $T = 293 \text{ K}$ constante. La masse volumique de l'eau est $\rho = 1,003 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$ et celle du latex $\mu = 1,194 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$. On donne $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1 • Par analogie avec une atmosphère gazeuse isotherme (cf. exercice 2), montrer que le nombre de sphères contenues dans un volume $d\tau$ de surface S et de hauteur dz est $dN = A(T) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) dz$, où H est une hauteur caractéristique du problème que l'on exprimera en fonction de a , ρ , μ , T , g et k_B .

Calculer H numériquement ($k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$).

2 • On compte les sphères contenues dans une colonne cylindrique de section S et de hauteur très grande devant H en commençant par le sommet de la colonne.

Soit $N(z)$ le nombre de sphères comptées entre le sommet et l'altitude z . Déterminer $N(z)$ en fonction de $N(0)$ et des autres données.

Jean Perrin mesura $N(0) = 100$ et $N(90 \mu\text{m}) = 17$. En déduire une estimation de la valeur numérique de N_A .

- Conseils**
- Faire le bilan des forces auxquelles est soumise chaque bille de latex à l'altitude z . Quelle est l'énergie potentielle correspondante ? En déduire le facteur de Boltzmann correspondant, puis $dN(z)$.
 - En quoi l'hypothèse « hauteur » H est-elle importante ? En fonction de cette hypothèse, par quelle intégrale peut-on exprimer $N(z)$?

4 Pression à l'intérieur d'une planète fluide

On adopte un modèle simplifié pour représenter une planète : on l'assimile à une sphère isolée de rayon R

constituée d'un fluide incompressible de masse volumique ρ uniforme.

1 • Rappeler l'expression du champ de gravitation $\vec{g}(M)$ à l'intérieur de la planète, à une distance r du centre. On exprimera ce résultat en fonction de la pesanteur à la surface g_0 , de R et de r .

2 • En supposant la pression nulle à la surface, déterminer la pression à une distance r du centre, puis la pression au centre. Faire l'application numérique pour la Terre. ($\rho = 5,8 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $R = 6,4 \cdot 10^6 \text{ m}$).

Commenter le résultat et critiquer le modèle.

Conseils

- Question 1 : Voir, dans le cours d'électromagnétisme, les analogies entre le champ de gravitation et le champ électrostatique. Pour le calcul de \vec{g} , on utilise le théorème de GAUSS.
- Question 2 : Attention : ρ est uniforme mais pas \vec{g} !
- Si $\vec{OM} = r \vec{e}_r$, on rappelle que le gradient d'une fonction $f(r)$ qui ne dépend que de r s'écrit : $\vec{\text{grad}} f = f'(r) \vec{e}_r$.
- La solution d'une équation différentielle d'ordre 1 dépend d'une constante fixée par une condition imposée. En quels points la pression est-elle connue *a priori* ?

5 Un glaçon dans un verre à ras bord...

On place dans trois verres un glaçon et on les remplit à ras bord, l'un d'eau, l'autre de jus de fruit et le troisième d'un apéritif alcoolisé. Que se passe-t-il lorsque le glaçon a fondu ?

Masses volumiques :

glace : $\rho_g = 0,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, eau liquide : $\rho_e = 10^3 \text{ kg/m}^3$, jus de fruit : $\rho_j = 1,05 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, apéritif : $\rho_a = 0,95 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$.

Conseils

Il faut comparer le volume de liquide déplacé par le glaçon au volume d'eau liquide obtenue par la fonte du glaçon.

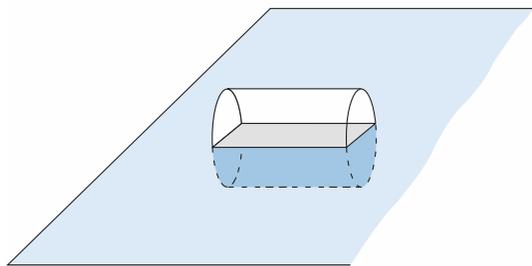
6 Oscillations d'un bouchon de liège

Un bouchon de liège, homogène, de forme cylindrique, flotte horizontalement à la surface de l'eau. On donne sa longueur, $h = 5 \text{ cm}$, et son rayon, $r = 1 \text{ cm}$.

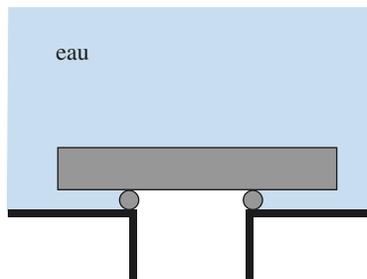
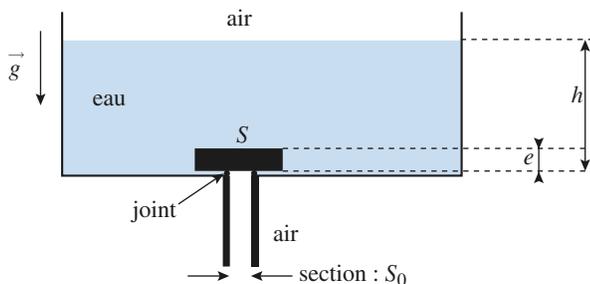
1 • À l'équilibre il est à moitié enfoncé ; déterminer sa masse volumique ρ .

2 • Déterminer la période des petites oscillations verticales de ce bouchon à la surface de l'eau.

La masse volumique de l'eau est $\rho_{H_2O} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$. On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.



Position horizontale



Conseils

- Quelle est la condition d'équilibre du bouchon ? Comment, dans ce cas, exprime-t-on la résultante des forces de pression sur le bouchon ?
- On admet que la résultante des forces de pression s'exprime toujours par la poussée d'Archimède lorsque le solide est en mouvement lent.
- Il faut exprimer le volume d'eau déplacée en fonction de l'altitude z du centre du bouchon. Pour cela, il est indispensable de faire un schéma précis mettant clairement en évidence cette relation. On se souviendra que l'aire d'un secteur circulaire d'ouverture 2α est égale à αR^2 .
- Pour étudier les **petits** mouvements autour de la position d'équilibre, on fait un développement à l'ordre 1 autour de cette position. Une quantité f fonction de z s'exprime par :

$$f(z) = f(0) + f'(0) z$$

Conseils

- Peut-on appliquer la relation d'Archimède au bouchon ? Est-il complètement immergé dans un fluide au repos ? quelle est la fonction du joint ?
- Si on ne peut appliquer le théorème d'Archimède, il reste à évaluer les forces pressantes sur chaque face du bouchon.
- Que peut-on dire de la résultante des forces pressantes sur la paroi verticale ?

7 Bouchon d'évier

On tente de boucher un évier avec un bouchon de liège, cylindrique, d'aire S et d'épaisseur e . L'évier s'évacue par un trou de section S_0 (inférieure à S !) entouré d'un joint de caoutchouc qui assure l'étanchéité lorsque le bouchon est en place.

On note ρ et ρ_0 les masses volumiques respectivement du liège et de l'eau.

L'eau recouvre entièrement le bouchon, comme indiqué sur la figure. La pellicule d'eau située entre le fond et le bouchon a une épaisseur négligeable devant e .

À quelle condition le bouchon reste-t-il plaqué au fond ?

8 Plongée libre (sans bouteille)

D'après Concours communs Mines - Ponts MP 2004

L'eau où le plongeur évolue est considérée comme un liquide homogène et incompressible, de masse volumique $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, en équilibre dans le champ de pesanteur $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ uniforme avec $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. La surface libre de l'eau (cote $z = 0$) est en contact avec l'atmosphère, de pression constante $P_{\text{atm}} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$.

1 • Déterminer, littéralement et numériquement, la pression $p(z)$ de l'eau en un point de cote z ; tracer le graphe de $p(z)$.

2 • On assimile l'air contenu dans les poumons du plongeur à un gaz parfait ; cet air est caractérisé par une pression $p(z)$ identique à celle de l'eau à la cote z , un volume $V(z)$ (capacité pulmonaire) variable (la cage thoracique se déforme sous l'effet de la pression), et enfin par une température T_1 , constante et indépendante de la profondeur. Calculer la capacité pulmonaire du plongeur à une cote z sachant que celui-ci, avant de plonger, gonfle ses poumons à leur capacité maximale V_M puis bloque sa respiration.

On donne $z = -10$ m et $V_M = 7 \times 10^{-3} \text{ m}^3$. On définit le poids apparent du plongeur (et l'on nomme flottabilité) comme la résultante de la poussée d'Archimède et des forces de pesanteur. Comment varie la flottabilité lorsque la profondeur augmente? Diminue-t-elle ou augmente-t-elle?

3 • Afin de faciliter leur descente lors des premiers mètres, les plongeurs utilisent souvent un lest, plaque de plomb de volume négligeable, accrochée à une ceinture et facilement larguable. Ce lest ne doit pas être trop lourd car un surlestage peut inciter à descendre à une profondeur excessive. On appelle m la masse du plongeur, $V^*(z)$ le volume de son corps et V_0 le volume de son corps hors celui de la cage thoracique, de sorte que $V^*(z) = V_0 + V(z)$. Quelle masse m_1 de lest choisir si l'on adopte comme règle de sécurité le fait que le plongeur doit avoir une flottabilité nulle à la profondeur de 5 mètres?

Application numérique: $V_0 = 0,077 \text{ m}^3$ et $m = 80 \text{ kg}$.

Conseils

- D'après l'expression de \vec{g} , quelle est l'orientation de l'axe Oz ?
- Le corps, hors cage thoracique, est incompressible. Il est donc simple d'exprimer le volume du plongeur en fonction de la profondeur.

9 Ascension d'un ballon-sonde

Un ballon-sonde, de masse m , sert à emmener à haute altitude un appareillage en vue d'effectuer des mesures.

L'enveloppe du ballon contient n moles de gaz parfait (H_2 , $M_{\text{H}_2} = 2 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$).

L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait, de masse molaire $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, en équilibre isotherme à la température $T_0 = 273 \text{ K}$. La pression atmosphérique est $P_0 = 1 \text{ bar}$.

1 • Quelle est la force ascensionnelle F_z ressentie par le ballon? Évaluer la quantité de matière minimale n_0 assurant le décollage de celui-ci pour $m = 50 \text{ kg}$, puis le volume V_0 correspondant, à l'altitude nulle de départ.

2 • Le volume du ballon (initialement flasque) ne peut dépasser une valeur V_1 sans que celui-ci n'éclate.

Montrer que cela implique l'existence d'une altitude maximale atteinte par le ballon, z_1 , que l'on exprimera en fonction de :

$$n, n_0, V_0, V_1 \text{ et } H = \frac{RT_0}{M_{\text{air}}g}.$$

3 • En fait, le ballon possède une soupape qui lui permet, au-delà de l'altitude z_1 , d'évacuer du gaz à volume V_1 constant.

Montrer que la force ascensionnelle s'annule alors pour une altitude z_2 supérieure à z_1 .

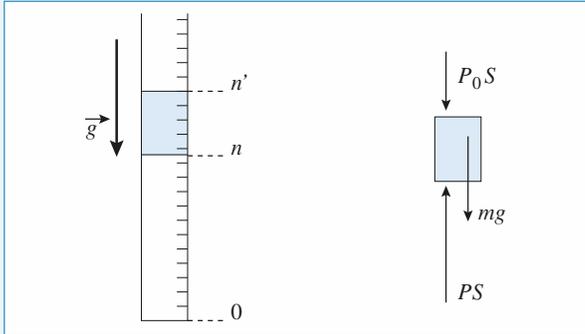
Donnée : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Conseils

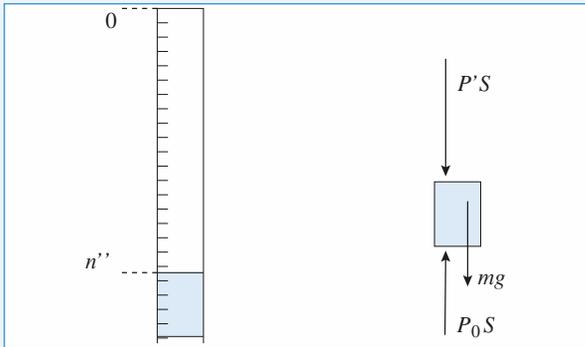
- 1) C'est la poussée d'Archimède qui permet au ballon de monter.
- 2) On utilisera l'expression de la pression d'équilibre de l'atmosphère isotherme.
- 3) La force ascensionnelle n'étant plus constante, il faut chercher à quelle altitude elle s'annule.

1 Mesure de la pression atmosphérique

Appelons $m = \rho S (n' - n)$, la masse de l'index.



Première position



Seconde position

L'index étant en équilibre, cela donne :

- pour la position 1 : $PS = P_0 S + mg$, avec P la pression de l'air dans le tube ;

- pour la position 2 : $P'S = P_0 S - mg$, avec P' la pression de l'air dans le tube.

La quantité de matière est toujours la même donc :

$$\frac{PV}{T} = \frac{P'V'}{T'}, \text{ avec } V = Sn \text{ et } V' = Sn''.$$

On attend toujours l'équilibre thermique, donc :

$$T = T' \text{ et } PV = P'V'.$$

On obtient ainsi :

$$[P_0 + \rho g (n' - n)]n = [P_0 - \rho g (n' - n)]n''.$$

En posant $P_0 = \rho g H_0$, cela donne :

$$[H_0 + (n' - n)]n = [H_0 - (n' - n)]n''$$

et donc :

$$H_0 = \frac{(n' - n)(n'' + n)}{n'' - n}.$$

A.N. : $H_0 = 767$ mm de mercure soit : $P_0 = 1,04 \cdot 10^5$ Pa .

2 Atmosphère isotherme

1 • P ne dépend que de l'altitude z (O_z orienté vers le haut), et :

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\rho g ;$$

les autres projections (sur (Ox) et (Oy)) du gradient étant nulles, P ne dépend que de l'altitude z .

Pour un gaz parfait :

$$\rho(z) = \frac{MP(z)}{RT} \text{ et } \frac{dP(z)}{P(z)} = -\left(\frac{Mg}{RT}\right),$$

soit, en intégrant entre l'altitude 0 et l'altitude z :

$$P(z) = P(0) \exp\left[-\frac{Mg}{RT}z\right].$$

2 • À l'altitude z , la densité particulière $n^*(z)$ est le nombre de particules présentes dans un volume mésoscopique $d\tau$ rapporté à ce volume : $dN(z) = n^*(z)d\tau$.

En exprimant l'équation d'état du gaz :

$$P(z)d\tau = \frac{dN(z)RT}{N_A} = dN(z)k_B T,$$

on obtient $n^*(z) = \frac{P_0}{k_B T} \exp\left[-\frac{Mg}{RT}z\right]$ en tenant compte de

la relation $\frac{M}{R} = \frac{m}{k_B}$.

Pour $n^*(H) = \frac{n(0)}{e}$, on obtient $H = \frac{k_B T}{mg} = \frac{RT}{Mg}$.

A.N. : $H \approx 8,4$ km.

Pour $n^*(h) = \frac{n(0)}{10}$, on obtient $h = \frac{k_B T}{mg} \ln 10$.

A.N. : $h \approx 19$ km.

3 • La probabilité $d\mathcal{P}$ de trouver une particule dans la tranche comprise entre les altitudes z et $z + dz$ est égale au rapport entre le nombre de particules présentes à cette altitude et le nombre total de particules.

On considère, à l'altitude z un volume mésoscopique $d\tau$, de base S et de hauteur dz , soit $d\tau = Sdz$.

Ce volume comprend $dN(z)$ particules et la colonne de base S en comprend N , soit $d\mathcal{P}(z) = \frac{dN(z)}{N}$.

Or $dN(z) = n^*(z)Sdz$ (voir la question 2)),

et $N = S \int_0^\infty n^*(z)dz = S \frac{P_0}{mg}$, après intégration.

D'où : $d\mathcal{P}(z) = \frac{mg}{k_B T} \exp\left[-\frac{mg}{k_B T}z\right] dz$.

3 Expérience de Jean Perrin

1 • Chaque sphère subit, en plus de son poids, une poussée d'Archimède égale à $\vec{F}_A = -m_0 \vec{g}$ où m_0 représente la masse du volume d'eau déplacé par la sphère. Ainsi la sphère est soumise à la force résultante $R = mg + \vec{F}_A = \frac{4}{3} \pi a^3 (\mu - \rho) \vec{g}$; cette force dérive de l'énergie potentielle :

$$\mathcal{E}_p = \frac{4}{3} \pi a^3 (\mu - \rho) g z.$$

On a montré dans l'exercice précédent que la probabilité de trouver la particule à l'altitude z est :

$$d\mathcal{P}(z) = \frac{mg}{k_B T} \exp\left[-\frac{mg}{k_B T} z\right] dz.$$

Les billes de latex, comme les molécules d'air, sont en équilibre à la température T ; par analogie on écrira :

$$d\mathcal{P}(z) = \frac{4}{3} \pi a^3 (\mu - \rho) \frac{g}{k_B T} \exp\left[-\frac{4\pi a^3 (\mu - \rho) g}{3k_B T} z\right] dz.$$

On obtient bien une loi de la forme :

$$dN(z) = A(T) \exp\left[-\frac{4\pi a^3 (\mu - \rho) g}{3k_B T} z\right] dz,$$

et :
$$\frac{1}{H} = \frac{4}{3} \frac{4\pi a^3 (\mu - \rho) g}{3k_B T}.$$

L'application numérique donne $H = 53 \mu\text{m}$. Cette valeur justifie *a posteriori* le choix de $90 \mu\text{m}$ pour l'écart de mesures (cf. ci-dessous).

En fait, Jean Perrin fit une série de mesures de $30 \mu\text{m}$ en $30 \mu\text{m}$ à l'aide de photographies de la suspension en équilibre.

2 • Au-delà de quelques H , la probabilité de trouver une sphère devient négligeable.

$N(z)$ est égale à la somme des dN , pour les altitudes comprises entre z et le sommet de la colonne. Comme la probabilité de trouver une sphère devient négligeable au-delà de quelques H , on peut tout aussi bien étendre la sommation de z à l'infini.

$$N(z) = A(T) \int_z^\infty \exp\left(-\frac{u}{H}\right) du = H A(T) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

$$N(0) = H A(T) \text{ d'où : } N(z) = N(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right)$$

L'utilisation des deux mesures permet d'écrire :

$$z = -H \ln \frac{N(90)}{N(0)} \text{ et } N_A = \frac{RT}{\frac{4}{3} \pi a^3 (\mu - \rho) g z} \ln \frac{N(0)}{N(90)}.$$

A.N. : $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

4 Pression à l'intérieur d'une planète fluide

1 • On reprend le raisonnement classique du calcul du champ électrique \vec{E} créé par une distribution à symétrie sphérique, avec les analogies :

$$\rho_{\text{électrique}} \rightarrow \rho_{\text{massique}} \text{ et } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \rightarrow -\mathcal{G}$$

(Constante de gravitation)

Posons $\vec{OM} = r \vec{e}_r$. La symétrie de la répartition des masses impose : $\vec{g} = -g(r) \vec{e}_r$.

On applique le théorème de GAUSS à une sphère Σ de centre O et de rayon r prise à l'intérieur de la planète :

Flux à travers Σ du champ de gravitation = $-4\pi \mathcal{G} \times$ (masse à l'intérieur de Σ)

$$-4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathcal{G} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \text{ soit : } g(r) = \frac{4}{3} \pi \mathcal{G} r \rho$$

Comme $g_0 = \frac{4}{3} \pi \mathcal{G} R \rho$, on déduit : $\vec{g} = -\frac{g_0 r}{R} \vec{e}_r$.

2 • Comme, par symétrie, P ne dépend que de r , on peut écrire la relation fondamentale de la statique des fluides sous la forme :

$$\vec{\text{grad}} P = \frac{dP}{dr} \vec{e}_r = -\frac{\rho g_0 r}{R} \vec{e}_r \text{ d'où l'équation différentielle : } \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho g_0 r}{R}$$

$$\text{tielle : } \frac{dP}{dr} = -\frac{\rho g_0 r}{R}$$

La solution, compte-tenu de la condition aux limites $P(R) = 0$ est :

$$P(r) = \frac{\rho g_0 r}{R} (R^2 - r^2)$$

Et la pression au centre : $P(0) = \rho g_0 R$

Pour la Terre, on obtient, avec $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$: $P(0) = 4 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, soit $4 \cdot 10^6 \text{ bars}$. (Un calcul plus précis, avec 2 chiffres significatifs ou plus, n'a bien entendu aucune signification pour un modèle aussi grossier.)

Commentaires :

- La Terre est partiellement fluide : le noyau est essentiellement constitué de fer fondu. Même la croûte et le manteau, solides, sont légèrement déformables et il n'est pas déraisonnable de les assimiler à des fluides. Le modèle a donc une certaine pertinence.
- La valeur de $P(0)$ justifie que l'on puisse considérer comme nulle la pression à la surface.
- Selon le modèle admis actuellement, le noyau intérieur (la « graine ») est solide en raison de la très forte pression.

5 Un glaçon dans un verre à ras bord...

Soit m la masse d'eau qui constitue le glaçon de volume V :

$$m = \rho_g V.$$

On appelle ρ_ℓ la masse volumique du liquide qui remplit le verre, V_i le volume immergé du glaçon.

La poussée d'Archimède qui agit sur le glaçon est donnée par $\pi = \rho_\ell V_i g$.

Le glaçon flotte, donc π compense le poids du glaçon :

$$\pi = mg = \rho_\ell V_i g.$$

Soit $\rho_g V = \rho_\ell V_i$ (on vérifie qu'avec les trois liquides proposés on a bien $V_i < V$).

Quand le glaçon fond, la glace qui le composait occupe le volume V_{final} avec $V_{\text{final}} = \frac{m}{\rho_e}$.

Le verre déborde si $V_{\text{final}} > V_i$, soit :

$$\frac{m}{\rho_e} > \frac{m}{\rho_\ell} \text{ ou } \rho_\ell > \rho_e.$$

Conclusion : Lorsque le glaçon fond, le verre de jus de fruit va déborder, le verre d'apéritif n'est plus rempli à ras bord ; seul le verre d'eau reste rempli à ras bord sans déborder.

6 Oscillations d'un bouchon de liège

1 • Le bouchon est soumis :

- à son poids, $\pi r^2 h \rho g$;
- à la poussée d'Archimède :

$$\frac{1}{2} \pi r^2 h \rho_{H_2O} g,$$

le facteur $\frac{1}{2}$ rendant compte du fait que le bouchon est à moitié enfoncé ;

En toute rigueur, le « fluide déplacé est constitué de deux volumes égaux d'eau et d'air, mais nous avons négligé la masse d'air déplacé, environ 1 000 fois plus faible que celle de l'eau déplacée.

À l'équilibre, la somme vectorielle est nulle, ce qui donne $\rho = 0,5 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

2 • On doit admettre que la poussée d'Archimède est une bonne approximation de la force exercée par l'eau sur le cylindre lorsque celui-ci oscille lentement.

Si on suppose, de plus, que le mouvement du cylindre est uniquement un mouvement vertical de translation (impulsion initiale donnée verticalement à l'aplomb du centre d'inertie), le théorème du centre d'inertie donne, en notant z la cote du centre d'inertie sur la verticale ascendante, avec $z_{\text{équilibre}} = 0$:

$$\pi r^2 h \rho \ddot{z} = -\pi r^2 h \rho g + \rho_{H_2O} g V_{\text{immergé}}(z).$$

On étudie de petites oscillations ; on peut alors écrire :

$$V_{\text{immergé}}(z) = V_{\text{immergé}}(0) + z \left(\frac{dV_{\text{immergé}}}{dz} \right)_{z=0}$$

au premier ordre en z .

Comme $-\pi r^2 h \rho g + \rho_{H_2O} g V_{\text{immergé}}(0) = 0$, cela donne :

$$\pi r^2 h \rho \ddot{z} = \rho_{H_2O} g z \left(\frac{dV_{\text{immergé}}}{dz} \right)_{z=0}$$

ce qui correspond bien à l'équation différentielle d'un oscillateur

harmonique, à condition que $\left(\frac{dV_{\text{immergé}}}{dz} \right)_{z=0}$ soit négatif.

Le schéma ci-dessous permet de déterminer $V_{\text{immergé}}(z)$:

$$V_{\text{immergé}} = h \left(\text{aire du secteur circulaire} - \text{aire du triangle} \right)$$

$$V_{\text{immergé}} = 2 \left[h \left(\frac{\alpha}{2} r^2 - \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha \cos \alpha \right) \right]$$

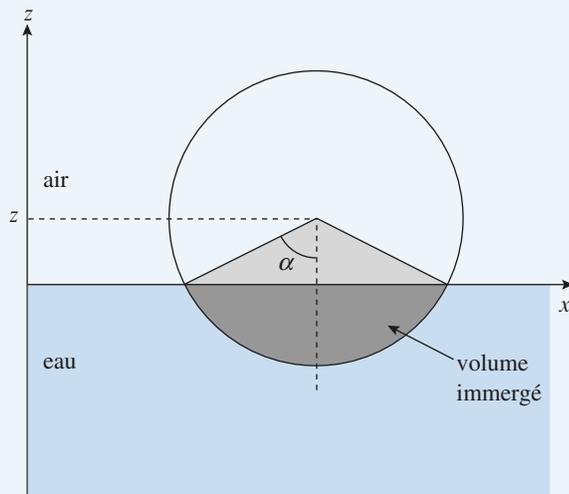
$$= h(\alpha r^2 - r^2 \cos \alpha \sin \alpha)$$

avec $z = r \cos \alpha$ soit $= \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{1}{r \sin \alpha}$:

$$\frac{dV_{\text{immergé}}}{dz} = \frac{dV_{\text{immergé}}}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dz} = -\frac{r h (1 - \cos 2\alpha)}{\sin \alpha}$$

la position $z = 0$ correspond à $\alpha = \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\left(\frac{dV_{\text{immergé}}}{dz} \right)_{z=0} = -2 r h.$$



On obtient donc $\ddot{z} + \frac{2\rho_{H_2O} g}{\pi \rho r} z$.

La période des petites oscillations vaut alors :

$$T = \frac{2\pi}{\left(\frac{2\rho_{H_2O} g}{\pi \rho r} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

A.N. : $T \approx 0,2 \text{ s}$.

7 Bouchon d'évier

On ne peut pas appliquer le théorème d'Archimède au bouchon. En raison du joint, même de très petite épaisseur, le bouchon n'est pas entièrement immergé dans un fluide à l'équilibre. Il est clair que la pression n'a pas la même valeur de part et d'autre du joint, dans l'eau et dans l'air.

Déterminons les forces pressantes sur le bouchon en notant P_0 la pression atmosphérique et avec Oz , axe vertical ascendant :

• Sur la face supérieure : $\vec{F}_1 = -S[P_0 + \rho_0 g(h - e)] \vec{e}_z$.

• Sur la face inférieure :

$\vec{F}_2 = +(S - S_0)(P_0 + \rho_0 g h) \vec{e}_z + S_0 P_0 \vec{e}_z$.

La résultante des forces pressantes est :

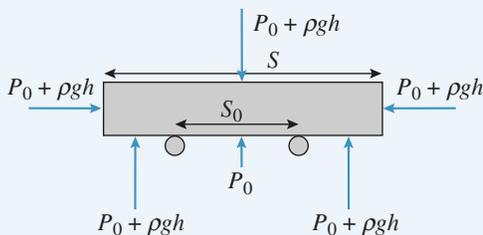
$\vec{F}_{\text{pression}} = \rho_0 g(Se - S_0 h) \vec{e}_z$.

Le poids du bouchon étant égal à $\rho S e g$, il reste plaqué au fond si :

$$\rho S e g > \rho_0 g(Se - S_0 h)$$

$$\text{ou encore si : } h > e \frac{S}{S_0} \left(1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right).$$

On remarque que cette condition est toujours vérifiée pour $\rho > \rho_0$ (le bouchon ne peut flotter).



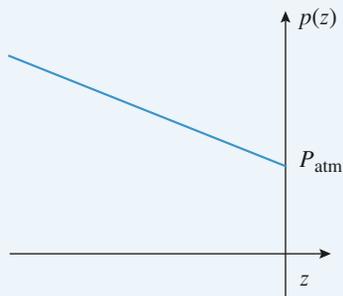
8 Plongée libre (sans bouteille)

1 • D'après l'expression $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ l'axe des z est orienté vers le haut. ρ étant uniforme, la relation fondamentale de la statique des fluides s'écrit donc :

$$p(z) = P_{\text{atm}} - \rho g z \text{ car } p(0) = P_{\text{atm}}.$$

Numériquement :

$$p(z) = 1,013 \cdot 10^5 - 9,81 \cdot 10^3 z \text{ avec } P \text{ en Pa et } z \text{ en m.}$$



2 • L'air contenu dans les poumons subit une compression isotherme. Comme il est assimilé à un gaz parfait :

$$p(z) V(z) = C^{\text{ste}} = P_{\text{atm}} V_M$$

$$\text{d'où } V(z) = \frac{P_{\text{atm}} V_M}{P_{\text{atm}} - \rho g z}$$

$$\text{A.N. : } V(-10 \text{ m}) = 3,61 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Le poids du plongeur reste constant.

La poussée d'Archimède, proportionnelle au volume du plongeur diminue lorsque la profondeur augmente. La flottabilité, comptée positivement vers le haut, diminue donc lorsque la profondeur augmente.

3 • Exprimons la flottabilité :

$$\vec{P}_{\text{archi}} + m \vec{g} = [\rho(V_0 + V(z)) - (m + m_1)]g \vec{e}_z.$$

(On n'a pas tenu compte du volume supplémentaire dû au lest.)

La flottabilité est nulle si $\rho(V_0 + V(z)) = m + m_1$

$$\text{soit si } m_1 = \rho \left(V_0 + \frac{P_{\text{atm}} V_M}{P_{\text{atm}} - \rho g z} \right) - m$$

$$\text{A.N. : } m_1 = 1,7 \text{ kg.}$$

9 Ascension d'un ballon-sonde

1 • La force ascensionnelle résulte du poids du ballon, de celui du gaz contenu dans l'enveloppe et de la poussée d'Archimède exercée par l'air :

$$F_z = [(\rho_{\text{air}}(z) - \rho_{\text{H}_2}(z))V(z) - m]g,$$

où $V(z)$ désigne le volume du ballon à l'altitude z :

$$V(z) = \frac{nRT_0}{P(z)}.$$

Remarques

La pression $P(z)$ désigne la pression effective moyenne vue par le ballon à l'altitude z . On sait qu'elle évolue avec une caractéristique H très grande devant les dimensions du ballon : cette notation n'est pas ambiguë.

On néglige le volume de l'appareillage devant le volume du ballon.

Pour chaque gaz, $P = \rho \frac{RT_0}{M}$; d'où :

$$\rho_{\text{air}} = \frac{P(z) M_{\text{air}}}{RT_0} = M_{\text{air}} \frac{n}{V(z)},$$

$$\text{et : } \rho_{\text{H}_2} = \frac{P(z) M_{\text{H}_2}}{RT_0} = M_{\text{H}_2} \frac{n}{V(z)}.$$

La force ascensionnelle peut donc s'écrire :

$$F_z = [n(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2}) - m]g.$$

Le décollage est possible si la force ascensionnelle est positive pour $z = 0$.

$$\text{On en déduit avec } n_0 = \frac{m}{M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2}} :$$

$$V_0 = \frac{mRT_0}{P_0(M_{\text{air}} - M_{\text{H}_2})}.$$

Pour $T_0 = 273 \text{ K}$ et $P_0 = 10^5 \text{ Pa}$, on a :

$$V_0 \approx 42 \text{ m}^3$$

(environ 2 m de rayon pour un ballon sphérique, ce qui est correct).

Ce volume est déjà important pour une charge assez faible, car les masses volumiques entrant en jeu dans le terme de poussée sont celles des gaz.

La force ascensionnelle, constante pour ce modèle, est donc

$$F_z = mg \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right).$$

2 • Le volume du ballon à l'altitude z s'écrit :

$$V(z) = \frac{nRT_0}{P(z)}.$$

Or, on peut, comme $T = \text{cte}$, utiliser le modèle de l'atmosphère isotherme pour lequel :

$$P(z) = P_0 \exp \left[-\frac{z}{H} \right].$$

$$\text{D'où, } V(z) = \frac{nRT_0}{P_0} \exp \left[\frac{z}{H} \right].$$

Sachant que $V_0 = \frac{nRT_0}{P_0}$, on obtient :

$$V(z) = V_0 \frac{n}{n_0} \exp \left[\frac{z}{H} \right].$$

Lorsque $V = V_1$, le ballon éclate ; ceci se produit à l'altitude :

$$z_1 = H \ln \left(\frac{n_0 V_1}{n V_0} \right).$$

3 • Avec la soupape, V reste égal à V_1 au-delà de z_1 , et la quantité de matière $n(z)$ contenue dans l'enveloppe diminue. La force ascensionnelle n'est plus constante et vaut :

$$F_z = mg \left(\frac{n(z)}{n_0} - 1 \right) = mg \left[\frac{V_1}{V_0} \exp \left(-\frac{z}{H} \right) - 1 \right].$$

Celle-ci s'annule pour $z_2 = H \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right)$ et on vérifie que

$z_2 > z_1$ et la quantité de matière $n(z)$ continue dans l'enveloppe...

3

Premier principe de la thermodynamique. Bilans d'énergie

LES OBJECTIFS

- Notion d'énergie interne.
- Échanges d'énergie par travail et par transfert thermique.
- Bilan énergétique pour un système fermé.
- Bilan d'énergie dans le cas de la détente de Joule-Thomson.
- Expression du travail reçu par un fluide.
- Loi de LAPLACE pour une évolution adiabatique et quasistatique.

LES PRÉREQUIS

- Mécanique : travail d'une force, énergie cinétique, énergie potentielle.
- Notion de pression.
- Équation d'état d'un gaz parfait.
- Propriétés d'une phase condensée idéale.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Développements limités ou développement de Taylor à l'ordre 1.
- Équation différentielle d'ordre 1.
- Notion de dérivée partielle d'une fonction de plusieurs variables.

ESSENTIEL

◀ Vocabulaire

On parle :

- d'un **système isolé**, lorsqu'il n'échange ni matière, ni énergie avec le milieu extérieur ;
- d'un **système fermé**, lorsqu'il n'échange pas de matière avec le milieu extérieur ;
- d'un **système ouvert**, dans les autres cas.

◀ Énergie d'un système thermodynamique

• Énergie interne

L'énergie interne U d'un système (S) est la somme de son énergie cinétique d'agitation $\mathcal{E}_{K_{\text{agitation}}}$ et de son énergie potentielle interne $\mathcal{E}_{P_{\text{int}}}$.

$$U = \mathcal{E}_{K_{\text{agitation}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{int}}}.$$

L'énergie interne est une grandeur extensive : si (S_1) et (S_2) sont deux systèmes disjoints, l'énergie interne $U_{S_1 \cup S_2}$ du système ($S_1 \cup S_2$) est la somme des énergies internes de (S_1) U_{S_1} et (S_2) U_{S_2} :

$$U_{S_1 \cup S_2} = U_{S_1} + U_{S_2}.$$

Pour un système à l'équilibre thermodynamique interne, l'énergie interne est une fonction d'état, c'est-à-dire qu'elle dépend d'un petit nombre de variables, ses paramètres d'état.

• Cas d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait, l'énergie interne molaire ne dépend que de la température : $\frac{U}{n} = f(T)$.

Pour un gaz parfait monoatomique : $U = \frac{3}{2} nRT$.

Pour un gaz parfait diatomique : $U \approx \frac{5}{2} nRT$ aux températures usuelles. Nous prendrons généralement cette valeur pour l'air (constitué de deux gaz diatomiques).

L'énergie interne d'un gaz polyatomique est toujours supérieure à celle d'un gaz monoatomique.

• Cas d'une phase condensée

Pour une phase condensée idéale l'énergie interne ne dépend que de la température.

• Énergie totale

L'énergie totale est définie par :

$$\mathcal{E} = U + \mathcal{E}_{K_{\text{macro}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}.$$

Elle permet de traiter un problème liant mécanique et thermodynamique sans devoir le traiter au niveau microscopique.

◀ Premier principe de la thermodynamique

• Transferts énergétiques

Il existe deux formes de transfert d'énergie pour un système :

- un transfert thermique Q par contact avec un corps de température différente de celle du système ;
- un transfert par un travail W mesurable directement fourni au système.

• Conventions et unités

En thermodynamique les conventions sont toujours les suivantes.

Soit un système (S) fermé :

- le travail W est le travail des forces (ou actions) macroscopiques extérieures sur (S) . Il est algébrique.

Un travail positif correspond à un travail reçu par (S) , un travail négatif correspond à un travail fourni par (S) ;

- de même, le transfert thermique (ou transfert de chaleur) Q correspond à un transfert d'énergie de l'extérieur vers le système à travers la surface délimitant le système. Il est positif si la « chaleur » est reçue par le système, négatif sinon ;
- le travail et le transfert thermique se mesurent tous les deux en joules (symbole : J).

• Premier principe pour un système immobile

- Pour un système fermé macroscopiquement au repos, le bilan d'énergie dans une transformation quelconque s'écrit :

$$\Delta U = W + Q.$$

- Le transfert thermique Q ne peut pas être mesuré mais il est calculé par la différence entre ΔU et W .

• Premier principe pour un système en mouvement

- Pour un système fermé (S) d'énergie cinétique macroscopique le bilan d'énergie dans une transformation quelconque s'écrit :

$$\Delta(U + \mathcal{E}_{K_{\text{macro}}}) = W + Q.$$

Pour utiliser la notion d'énergie totale, nous pouvons aussi l'écrire sous la forme :

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta(U + \mathcal{E}_{K_{\text{macro}}} + \mathcal{E}_{P_{\text{ext}}}) = W_{\text{autre}} + Q$$

où $\mathcal{E}_{\text{p ext}}$ représente l'énergie potentielle d'interaction entre le système et l'extérieur et W_{autre} le travail des forces extérieures ne dérivant pas d'une énergie potentielle.

• Remarques sur le premier principe de la thermodynamique

- Nous pouvons appliquer le premier principe entre l'instant initial et l'instant final d'une transformation, même si le système n'est pas en équilibre thermodynamique interne entre ces deux états.
- Les notations $\Delta U = U_2 - U_1$ et dU pour une transformation infinitésimale signifient que la variation de U ne dépend pas du chemin suivi pour aller de (1) à (2). Il est inutile de connaître le chemin suivi de (1) à (2) pour calculer la variation de l'énergie interne U .
- Les notations W ou Q (ou δW et δQ pour une transformation infinitésimale) signifient qu'il est nécessaire de connaître le chemin suivi pour définir ces grandeurs. Il n'existe pas de fonction d'état dont δQ ou δW est la différentielle.

Un exemple de travail: le travail des forces de pression dans le cas particulier d'une transformation lente

• Expression du travail élémentaire

Lors d'une transformation élémentaire au cours de laquelle le système fluide reste dans un état proche d'un état d'équilibre thermodynamique interne, le travail élémentaire δW reçu par ce fluide est :

$$\delta W = -P dV$$

où P représente la pression du fluide et dV sa variation de volume au cours de la transformation. δW est positif lors d'une compression du fluide ($dV < 0$) et δW est négatif lors d'une détente du fluide ($dV > 0$).

• Évolution entre deux états

$$W = \int_{V_1}^{V_2} -P dV \quad \text{travail reçu par le système « fluide » lors}$$

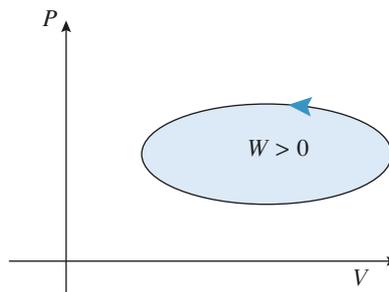
d'une *évolution* où tous les états intermédiaires sont proches de l'équilibre. Une telle évolution est dite « quasistatique ».

➔ Pour s'entraîner : ex. 7 et 12

• Représentation graphique

Lors d'une *transformation cyclique lente* d'un fluide, l'aire du cycle, dans le diagramme de Clapeyron, mesure la valeur absolue du travail W :

- si le cycle est parcouru dans le sens direct, ce travail est positif
- dans le cas contraire, le travail est négatif.



Bilans énergétiques dans quelques cas usuels

• Transformation isochore

Lors d'une transformation isochore, le travail des forces de pression est nul et la variation d'énergie interne est égale au transfert thermique :

$$\Delta U = Q_V.$$

L'indice V rappelle que la transformation se déroule à volume constant.

• Transformation monobare. Enthalpie H

- Fonction enthalpie: $H = U + PV$.
- Dans le cas d'une transformation monobare où la pression extérieure, constante, est égale à la pression initiale et à la pression finale, le transfert thermique reçu par le système s'écrit :

$$Q_P = \Delta H.$$

• Transformation adiabatique

Les parois d'un récipient sont dites *athermanes* si elles interdisent tout échange de chaleur entre l'intérieur et l'extérieur du récipient.

Au contraire, si elles permettent facilement ces échanges, elles sont alors qualifiées de parois *diathermanes*.

Le caractère adiabatique ou diathermane d'une paroi n'est pas intrinsèque, mais dépend de la durée de l'expérience. Si la transformation est suffisamment rapide, les échanges thermiques n'ont pas le temps de se produire et nous pouvons considérer cette transformation comme adiabatique. Aucune paroi ne peut interdire les échanges thermiques sur une durée très longue; il est simplement possible de les ralentir en choisissant le matériau qui constitue la paroi.

► Pour s'entraîner : ex. 3 et 8

◀ Capacités calorifiques (ou capacités thermiques)

• Capacité calorifique à volume constant

La capacité calorifique à volume constant C_V est définie par :

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$$

Dans le cas particulier d'une transformation isochore infinitésimale : $\delta Q = dU = C_V dT$.

• Capacité calorifique à pression constante

La capacité calorifique à volume constant C_P est définie par :

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P$$

Dans le cas particulier d'une transformation isochore infinitésimale : $\delta Q = dH = C_P dT$.

• Cas d'un gaz parfait

Pour un gaz parfait quelconque, une variation infinitésimale dT de la température conduit à une variation infinitésimale de l'énergie interne dU telle que :

$$dU = C_V dT = n C_{V,m} dT.$$

$C_{V,m}$ est la capacité thermique molaire à volume constant.

► Pour s'entraîner : ex. 2, 8 et 11

De même, une variation infinitésimale dT de la température conduit à une variation infinitésimale de l'enthalpie dH telle que :

$$dH = C_P dT = n C_{P,m} dT.$$

$C_{P,m}$ est la capacité thermique molaire à pression constante.

► Pour s'entraîner : ex. 6

Les capacités thermiques molaires (elles s'expriment en $\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$) du gaz parfait satisfont à la relation de Mayer :

$$C_{P,m} = C_{V,m} + R \text{ soit } C_{P,m} = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \text{ et } C_{V,m} = \frac{R}{\gamma - 1} \text{ avec } \gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}};$$

• pour un gaz parfait monoatomique :

$$C_{V,m} = \frac{3}{2}R, \quad C_{P,m} = \frac{5}{2}R \text{ et } \gamma = \frac{5}{3} \approx 1,67$$

• pour un gaz parfait diatomique (dont l'air) dans les conditions usuelles :

$$C_{V,m} \approx \frac{5}{2}R, \quad C_{P,m} \approx \frac{7}{2}R \text{ et } \gamma \approx \frac{7}{5} = 1,4.$$

• **Cas d'une phase condensée**

Pour une phase condensée idéale, $C_P \approx C_V$ et l'énergie interne ne dépend que de la température :

$$dH \approx dU = C dT .$$

► Pour s'entraîner : ex. 6

Application aux compressions et détentes de gaz

• **Compression ou détente isotherme d'un gaz parfait**

Lors d'une transformation isotherme, l'énergie interne d'un gaz parfait est constante. On en déduit :

$$W = -Q = n R T \ln \frac{P_{\text{finale}}}{P_{\text{initiale}}} = n R T \ln \frac{V_{\text{initial}}}{V_{\text{final}}} .$$

• **Compression ou détente adiabatique quasistatique d'un gaz parfait**

Au cours d'une transformation adiabatique, suite continue d'états d'équilibre interne (ou quasistatique), un gaz parfait suit la loi de LAPLACE :

$$P V^\gamma = C^{\text{ste}} \quad \text{ou} \quad T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{\text{ste}} \quad \text{ou} \quad T V^{\gamma-1} = C^{\text{ste}} .$$

► Pour s'entraîner : ex. 1, 3, 8 et 9

• **La détente de Joule-Gay-Lussac**

L'énergie interne d'un gaz reste constante au cours de la détente de **Joule-Gay-Lussac** (détente adiabatique dans le vide) $\Delta U = U_2 - U_1 = 0$.

► Pour s'entraîner : ex. 12

• **La détente de Joule-Thomson**

L'enthalpie d'un gaz reste constante au cours de la détente de **Joule-Thomson** (détente adiabatique à faible vitesse en régime stationnaire d'un gaz dans une conduite horizontale, à travers une paroi poreuse) :

$$\Delta U = H_2 - H_1 = 0 .$$

Cette détente est dite isenthalpique.

► Pour s'entraîner : ex. 4 et 5

Conseils et pièges à éviter

- Le premier principe s'applique à un système fermé. Un volume fixe ne caractérise pas en général un système fermé.
- L'énergie interne d'un gaz parfait dépend de la température selon la loi :

$$dU = n C_{v, m} dT .$$

Bien que $C_{v, m}$ soit appelée «capacité calorifique molaire à volume constant» cette relation est toujours vraie, que le volume soit constant ou non.

Il en est de même pour l'enthalpie : $dH = C_{p, m} dT$ que la transformation soit isobare ou non.

- Ne pas appliquer la relation de LAPLACE à une évolution adiabatique sans s'assurer que tous les états intermédiaires sont définis (évolution quasistatique).
- Lors d'une évolution où les états intermédiaires ne sont pas définis, on peut écrire le premier principe sous forme de bilan, mais pas sous forme infinitésimale ($\Delta U = W + Q$ et non $dU = \delta W + \delta Q$) .
- Ne pas confondre isotherme et adiabatique ! En effet :
 - Au cours d'une compression adiabatique un gaz voit sa température augmenter.
 - Pour qu'une compression soit isotherme, il y a nécessairement des transferts thermiques, la transformation n'est donc pas adiabatique.

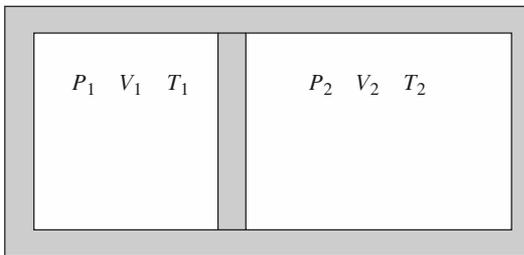
1 Oscillations adiabatiques

Un cylindre de section S est séparé par un piston étanche de masse m couissant sans frottement. Un gaz parfait de rapport γ constant remplit les deux parties (1) et (2). Le système est initialement à l'équilibre :

$$T_1 = T_2 = T_0; P_1 = P_2 = P_0; V_1 = V_0 \text{ et } V_2 = 2 V_0.$$

À la suite d'une perturbation, le piston est légèrement écarté de sa position d'équilibre. Déterminer la fréquence des petites oscillations.

Comment évoluent ces oscillations avec un modèle plus réaliste ?



Conseils

- Le système complet est-il homogène? Quels sous-systèmes homogènes peut-on considérer ?
- Les transformations sont adiabatiques. Peut-on appliquer la loi de LAPLACE ?
- On peut repérer la position du piston par une abscisse x , nulle à l'équilibre.
- Par petites oscillations, on suppose que l'amplitude des oscillations est suffisamment faible pour faire un développement limité à l'ordre 1 en x . Cela revient à linéariser les équations.
- Pour faire un développement à l'ordre 1, il faut préparer la relation en faisant apparaître un terme en $(1 + \varepsilon)^m$, ε étant une quantité sans dimension petite devant 1.
- Ce problème a un aspect thermodynamique (évolutions adiabatiques) et un aspect mécanique (RFD appliquée au piston mobile).

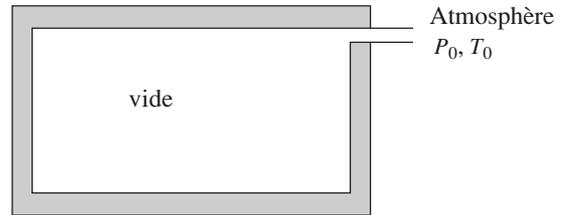
2 Remplissage d'un réservoir

Un réservoir initialement vide est mis en communication avec l'atmosphère (pression P_0 et température T_0) par un petit robinet qui laisse l'air entrer lentement. Au bout d'un certain temps, on ferme le robinet et l'air intérieur se met à l'équilibre interne. Déterminer sa température.

On considérera que l'air est un gaz parfait de rapport γ constant et que la durée de l'expérience est suffisam-

ment brève pour pouvoir considérer les parois du réservoir comme adiabatiques.

Quelle est l'hypothèse la plus contestable ?



Conseils

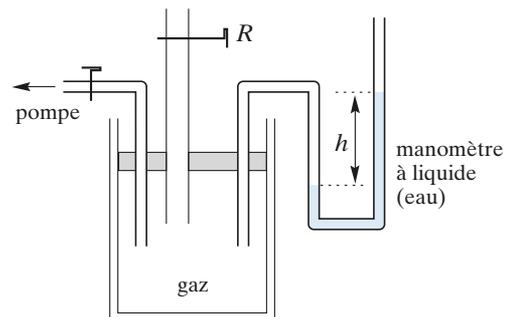
- Comme toujours, un bilan d'énergie suppose la définition précise d'un système fermé.
- Le réservoir définit-il un système fermé ?
- L'évolution est adiabatique et l'écoulement est lent. Peut-on appliquer la relation de LAPLACE ?
- Considérer l'air qui passe de l'atmosphère au réservoir, et qui occupe initialement un volume V_0 dans l'atmosphère.

3 Expériences de Clément-Desormes

Un récipient d'une capacité de quelques dm^3 est muni d'une pompe, d'un robinet R et d'un manomètre à eau.

Initialement ce récipient contient de l'air sous la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0 de l'air extérieur. On comprime très légèrement ce gaz grâce à la pompe, puis on réalise les opérations suivantes :

- *opération 1* : on laisse le récipient sans y toucher durant plusieurs heures puis on lit la dénivellation h_1 du manomètre (h_1 est de l'ordre de quelques cm) ;
- *opération 2* : on ouvre le robinet R et on le referme aussitôt ;
- *opération 3* : on laisse le récipient quelques heures sans y toucher puis on lit la dénivellation h_2 .



1 • Pour chaque opération, analyser le processus expérimental et proposer un modèle pour chaque transformation subie par le gaz qui reste à l'intérieur de la bouteille.

2 • L'expérience permet de mesurer le rapport

$$\gamma = \frac{C_{P,m}}{C_{V,m}}$$
 des capacités calorifiques molaire d'un gaz.

L'air est supposé parfait et de rapport γ constant.

a. Tracer dans un diagramme de Clapeyron (P, V) la suite de transformations que subit le gaz resté dans la bouteille à la fin de l'expérience. On notera :

p_1 la surpression correspondant à h_1 ;

p_2 la surpression correspondant à h_2 ;

θ l'abaissement de température correspondant à l'opération 3.

On ne s'intéressera qu'aux opérations 2 et 3.

b. Calculer γ en fonction de h_1 et h_2 .

Effectuer l'application numérique avec $h_1 = 18,2$ cm et $h_2 = 5,0$ cm.

Conseils

- Quelle est la température dans le récipient après « quelques heures » ?
- Quelle est la pression dans le récipient juste après l'ouverture du robinet ?
- Le récipient permet-il de définir un système fermé ?
- Le gaz qui s'échappe subit une transformation brusque, mais le gaz qui reste subit une détente « douce ». Comment peut-on le traduire quantitativement ?
- Ne pas oublier que $p_1 \ll P_0$ et $p_2 \ll P_0$. On peut simplifier le calcul en faisant des développements à l'ordre 1 en $\frac{p}{P_0}$.

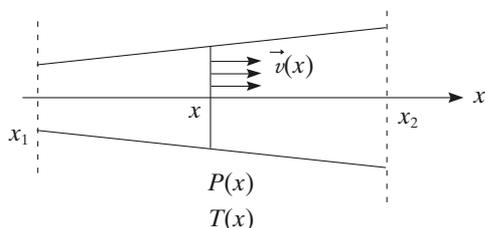
4 Étude d'une tuyère

On étudie l'écoulement d'un gaz dans une tuyère horizontale isolée thermiquement du milieu extérieur.

En régime permanent, dans une section droite de la tuyère les vitesses d'écoulement sont égales et normales à la section. La pression et la température y sont uniformes et indépendantes du temps :

– à l'entrée de la tuyère, $x = x_1$: $P_1 = 3$ bars ; $T_1 = 300$ K ;

– à la sortie de la tuyère, $x = x_2$: $P_2 = 1$ bar ; $T_2 = 250$ K.



1 • Montrer que lorsqu'une mole de gaz passe de l'entrée à la sortie de la tuyère, on peut, pour toute abscisse x ,

$$\text{écrire } H_m(x) + \frac{1}{2} M v^2(x) = \text{cte}.$$

$H_m(x)$ est l'enthalpie molaire du gaz à l'abscisse x et M est la masse molaire du gaz.

2 • Si l'on suppose $v(x_1)$ négligeable, calculer $v(x_2)$.

Données : $M = 32$ g.mol⁻¹ ; $\gamma = 1,4$.

On supposera le gaz parfait.

3 • Le gaz sortant de la tuyère est utilisé pour actionner une turbine. À l'entrée de la turbine, il a une pression P_2 , une température T_2 et une vitesse v_2 . À la sortie, la pression et la température sont inchangées, et la vitesse est nulle. Calculer le travail récupéré par la turbine pour le passage d'une mole de gaz.

Conseils

- Revoir la démonstration de la détente de JOULE-THOMSON. Il suffit de la reprendre en tenant compte de l'énergie cinétique.
- Que vaut l'enthalpie d'un gaz parfait ?
- Quelle relation y a-t-il entre la variation d'énergie cinétique du gaz et le travail récupéré ?

5 Étude d'une machine

Question préliminaire

Dans un tube cylindrique horizontal, indéformable, aux parois adiabatiques, un gaz se détend à travers une paroi poreuse ; la pression et la température passant de P_1 , T_1 en amont de la paroi à T_2 , P_2 en aval de la paroi.

On suppose que l'écoulement est suffisamment lent pour que la variation d'énergie cinétique d'une quantité donnée de fluide entre la partie amont et la partie aval soit négligeable.

1 • Montrer que la détente est isenthalpique.

2 • On remplace, dans le tube, la paroi poreuse par une machine (turbine, compresseur, etc.). Au cours de son passage par la machine, une mole de fluide échange, avec le milieu extérieur, un travail autre que celui des forces de pression, noté τ'_m , et une quantité de chaleur Q_m . Comment est transformée la relation précédente ? On notera H_m l'enthalpie molaire du gaz.

A. Compression d'un fluide parfait

De l'air (assimilé à un gaz parfait) est prélevé dans l'atmosphère à la température T_0 , sous la pression P_0 . Il est comprimé de façon adiabatique et lente jusqu'à la pression P_f .

1 • Exprimer la température finale du gaz, T_f , en fonction de T_0 et de $x = \frac{P_f}{P_0}$.

2 • a. Exprimer ΔH_m , la variation d'enthalpie molaire de ce gaz, en fonction de T_0 , x et $C_{P,m}$.

b. Cette compression est réalisée par un compresseur : quel travail, τ' , doit-il fournir ?

c. A.N. : Calculer numériquement τ' .

Données : $T_0 = 288 \text{ K}$; $P_0 = 1 \text{ bar}$; $P_f = 12 \text{ bars}$

$C_{P,m} = 29 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$; $\gamma = 1,4$.

3 • Cette compression est réalisée dans deux compresseurs : l'air traverse un premier compresseur qui le comprime de P_0 à P_1 , puis un échangeur où il se refroidit de façon isobare, sous la pression P_1 , jusqu'à T_0 et traverse enfin un second compresseur qui le comprime de P_1 à P_f .

a. Exprimer le travail molaire τ_m que doit fournir l'ensemble des compresseurs, en fonction de $C_{P,m}$, T_0 , P_1 , P_0 , P_f et γ .

b. Pour quelle valeur P_{1m} de P_1 , exprimée en fonction de P_0 et P_f , ce travail est-il minimal ?

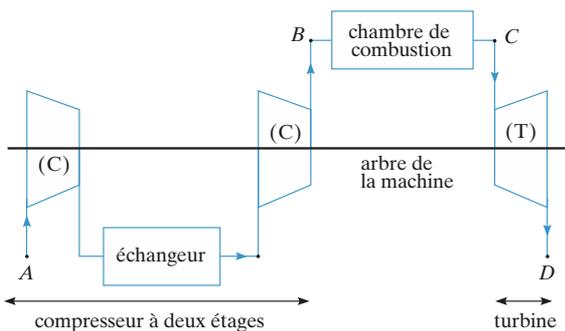
c. Calculer les valeurs de P_{1m} et du travail molaire minimal pour les valeurs numériques données en **2) b)**.

B. Turbine à gaz

Soit le dispositif schématisé ci-dessous.

L'air prélevé dans l'atmosphère, en A ($P_A = 1 \text{ bar}$ et $T_A = 288 \text{ K}$), est comprimé jusqu'à la pression P_B ($P_B = 12 \text{ bars}$), dans un compresseur (C) à deux étages selon le processus du **A. 3) b)**. Entre les deux étages, l'air est refroidi de façon isobare jusqu'à T_A (échangeur).

Dans la chambre de combustion, l'air est chauffé de façon isobare jusqu'à $T_C = 1\,050 \text{ K}$. Dans la turbine (T), l'air est détendu de façon adiabatique et lente jusqu'à $P_D = P_A$.



Le tableau suivant donne la pression P et la température T du fluide dans les différents états :

état	P (bar)	T (K)
A	1	288
B	12	586
C	12	1 050
D	1	524

1 • Quelle est l'expression numérique du travail molaire τ_C , reçu par le fluide de la part du compresseur à deux étages (C) ?

2 • Calculer le travail molaire τ_{Tm} reçu par la turbine (T).

3 • Le compresseur à deux étages et la turbine étant solidaires du même axe de rotation de la machine, déterminer le travail utile molaire τ_{Tm} récupéré sur cet axe (arbre de la machine).

4 • Calculer Q_m , la quantité de chaleur molaire reçue par l'air pendant la combustion. (On négligera les modifications du fluide pendant cette combustion.)

5 • En déduire le rendement $\eta = \frac{|\tau_{um}|}{Q_m}$.

Conseils

1) De quelle détente s'agit-il ?

2) Comment la démonstration est-elle modifiée ?

A. 1) Quelle loi les conditions expérimentales décrites permettent-elles d'appliquer ?

2) Peut-on utiliser la question préliminaire ?

3) a) Quel(s) travail(travaux) doit-on prendre en compte ? Le travail des forces de pression de l'échangeur est-il intéressant ?

B. Chaque élément de la machine peut être traité séparément en utilisant la question préliminaire.

6 Détermination d'une capacité thermique massique

On établit, à pression constante, un courant gazeux dans un serpentin métallique de débit massique D_m (D_m représente la masse de gaz qui traverse une section de serpentin par unité de temps).

Le serpentin est plongé dans un calorimètre rempli d'eau, de capacité thermique totale C (cette capacité inclut l'eau, le calorimètre et ses accessoires). Le gaz, initialement chauffé dans un four, arrive dans le calorimètre à une température T_1 . En régime stationnaire, le gaz sort du calorimètre à la température T_2 , pratiquement égale à celle du calorimètre.

1 • Lorsqu'on interrompt le courant gazeux, on constate que la température T du calorimètre diminue, ce qui indique l'existence de « fuites thermiques ».

En admettant que les pertes thermiques par unité de temps sont proportionnelles à l'écart de température ($T - T_0$) entre la température T du calorimètre et celle T_0 (supposée constante) du milieu extérieur (on désignera par k la constante de proportionnalité), déterminer la loi d'évolution de la température T du calorimètre en fonction du temps t , de C , k , T_0 et T_2 .

2 • Calculer la valeur de la capacité thermique massique à pression constante c_P du gaz en fonction de k , D_m , T_0 , T_1 et T_2 .

3 • Données: $C = 4 \text{ kJ.K}^{-1}$ et $D_m = 0,47 \text{ g.s}^{-1}$. On a mesuré les températures $T_0 = 293 \text{ K}$, $T_1 = 373 \text{ K}$ et $T_2 = 310 \text{ K}$.

Déterminer la valeur numérique du coefficient k sachant que dix minutes après avoir coupé le courant gazeux, la température T du calorimètre a diminué de 2 K .

En déduire la capacité c_P du gaz (dioxyde de carbone).

Conseils

- Quel système choisir pour étudier l'effet des fuites ? Sur quelle fonction d'état du système doit-on travailler ? Quels échanges énergétiques y a-t-il entre le système et son milieu extérieur ?
- Définir un nouveau système en régime stationnaire et raisonner de manière analogue à la détente de Joule-Thomson.

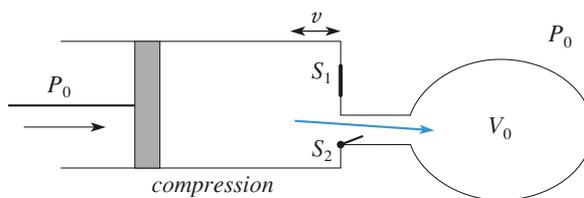
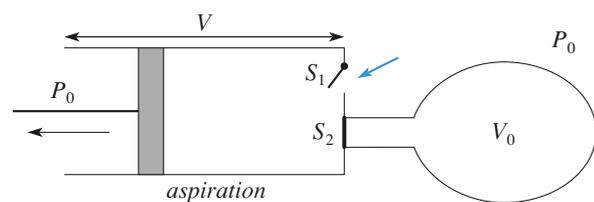
7 Utilisation d'une pompe

Un réservoir de volume V_0 contient initialement de l'air (assimilable à un gaz parfait) à la pression P_0 . On peut augmenter cette pression en y refoulant de l'air à l'aide d'une pompe. La pompe est constituée d'un cylindre dans lequel coulisse (sans frottement) un piston actionné par un moteur.

Le volume maximal du cylindre est V (le piston est alors en début de course, à gauche), le volume minimal du cylindre est v (le piston est en fin de course, à droite).

Lorsque le piston se déplace vers la gauche, les soupapes S_1 et S_2 sont d'abord fermées, puis S_1 s'ouvre dès que la pression de l'air résiduel contenu dans le cylindre devient égale à la pression atmosphérique P_0 ; l'air extérieur est alors aspiré dans la pompe.

Lorsque le piston se déplace vers la droite, S_1 se ferme, l'air contenu dans le cylindre est comprimé; puis S_2 s'ouvre dès que la pression de l'air du cylindre devient égale à celle de l'air contenu dans le réservoir, l'air du cylindre est alors refoulé dans le réservoir.



On suppose qu'au cours des diverses transformations l'air décrit une suite continue d'états d'équilibre thermodynamique internes à température constante (transformation isotherme).

1 • a. Calculer la pression P_k de l'air contenu dans le réservoir après k allers et retours du piston.

b. Quelle est la valeur limite P de P_k quand k devient très grand ? Retrouver cette valeur sans passer par le calcul des pressions intermédiaires.

2 • On suppose dorénavant $v = 0$.

a. Exprimer la pression P_k en fonction de P_0 , V , V_0 et k .

b. Calculer le travail W_k que fournit le moteur pour effectuer k allers et retours du piston.

Conseils

- Il est vivement recommandé de représenter le $k^{\text{ième}}$ cycle sur un diagramme $(P_{\text{cyl}}, V_{\text{cyl}})$ où P_{cyl} représente la pression à l'intérieur du cylindre et V_{cyl} le volume du cylindre. Le cycle doit comporter 4 phases successives et les pressions P_{k-1} et P_k doivent y apparaître.
- À chaque étape, le système comprimé ou détendu est différent.
- Quel est le travail total des forces dues à la pression atmosphérique au cours d'un cycle du piston ?
- Rappel de la somme des termes d'une série géométrique :

$$S = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = S = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

8 Détente brusque d'un gaz

De l'air, considéré comme un gaz parfait de rapport γ constant ($\gamma = 1,4$) et de masse molaire $M = 29 \text{ g}$, est enfermé dans un cylindre muni d'un piston mobile circulaire, de rayon $a = 2 \text{ cm}$ et de masse m . On note $X(t)$ l'abscisse du piston à la date t , l'origine étant prise au fond du cylindre.

Le milieu extérieur est caractérisé par sa pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ et sa température $T_0 = 300 \text{ K}$, constantes. Le cylindre et le piston sont fabriqués avec un matériau de masse volumique $r = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ et de capacité thermique volumique $c = 1,0 \cdot 10^3 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$.

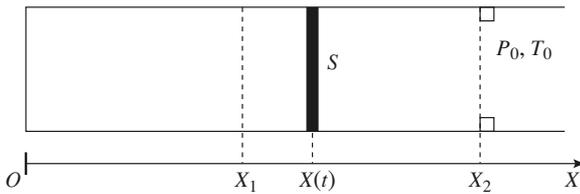
L'état initial est défini par : Pression du gaz : $P_1 = 4P_0$, température de l'ensemble : T_0 ; $X = X_1 = 20$ cm .

On libère le piston, le gaz se détend jusqu'à ce que le piston s'arrête brutalement sur une butée. Le volume occupé par le gaz est alors déterminé par :

$$X = X_2 = 2 X_1 .$$

Nous admettons que, pendant la détente, on peut considérer que la pression et la température du gaz sont définis à chaque instant et uniformes si sa durée τ_0 , X et la vitesse de propagation des ondes sonores

$$c_{\text{son}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \text{ sont telles que : } c_{\text{son}} t_0 \gg X .$$



1 • On suppose que le gaz est homogène et que la vitesse (au sens macroscopique) du gaz situé à l'abscisse x est une fonction linéaire de x : $v(x, t) = \frac{x}{X(t)} \dot{X}(t)$.

Exprimer l'énergie cinétique (macroscopique) $d\mathcal{E}_K$ de la tranche de gaz comprise entre les abscisses x et $x + dx$.

En déduire l'énergie cinétique totale du gaz $\mathcal{E}_{K \text{ gaz}}(t)$ en fonction de la masse de gaz m_{gaz} et de $X(t)$.

2 • Nous supposons que :

- si la pression et la température sont définis à chaque instant et uniformes dans le cylindre ;
- il n'y a aucun échange thermique entre le gaz, le piston et le cylindre ;
- le mouvement du piston jusqu'au choc contre la butée s'effectue sans frottement.

a. Déterminer la pression P_2 et la température T_2 du gaz à l'instant où le piston atteint l'abscisse X_2 . Au moyen d'un bilan d'énergie, exprimer la vitesse maximale V_{max} du piston en fonction de ρ , e , M , X_1 , P_0 , $T_0 R$ et γ .

En déduire une estimation grossière de la durée t_0 de la détente.

b. Le piston a une épaisseur égale à 1 cm. Calculer V_{max} et l'ordre de grandeur de τ_0 . L'hypothèse « quasistatique » est-elle justifiée ?

c. Lors du choc sur la butée, le cylindre reste parfaitement rigide et le piston s'échauffe uniformément. Calculer les températures $T_{3 \text{ piston}}$ et $T_{3 \text{ gaz}}$ du piston et du gaz lorsque le système est au repos. (On considérera que l'hypothèse quasistatique est justifiée pour la détente).

3 • On tient compte maintenant des frottements entre le cylindre et le piston. La vitesse maximale n'est plus que de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, les autres données étant inchangées. En supposant, pour simplifier, que ces frottements n'échauffent que le piston, calculer les températures finales $T_{4 \text{ piston}}$ et $T_{4 \text{ gaz}}$ du piston et du gaz lorsque le système est au repos.

4 • L'étude de la diffusion thermique (au programme de seconde année) montre que, après une durée t , la zone sensible aux variations de température a une épaisseur de l'ordre de $\delta = \sqrt{Dt}$, D étant un coefficient caractéristique du matériau. On prendra pour le matériau du cylindre (verre) $D = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

a. Déterminer l'épaisseur δ au bout de 4 ms et au bout de 40 s . Exprimer la capacité thermique de la pellicule d'épaisseur δ sur la face interne du cylindre et, dans les deux cas, comparer la capacité thermique correspondante à celle du gaz. Conclure.

b. Les échanges thermiques entre le gaz et la paroi du cylindre sont régis par la loi dite de NEWTON :

$$\mathcal{P}_{\text{th}} = h S [T_p(t) - T(t)]$$

\mathcal{P}_{th} représentant la puissance thermique cédée par la paroi au gaz, $T(t)$ la température (supposé uniforme) du gaz, $T_p(t)$ celle de la face interne de la paroi, et S l'aire de cette face interne ; h est une constante que l'on prendra égale à $10 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.

En prenant comme origine des temps l'instant du choc, déterminer $T(t)$. Pour simplifier les calculs (de toutes façons approchés) :

- on ne tiendra pas compte des échanges thermiques du gaz avec le piston ;
- on supposera la capacité thermique de la couche d'épaisseur δ constante et infiniment grande devant celle du gaz.

Calculer numériquement la constante de temps de la loi $T(t)$ et la valeur de T 10 minutes après la détente.

Conseils

- Caractériser l'évolution du gaz pendant la détente. Quelles relations relient P , V et T ?
- Un bilan d'énergie n'a de sens que relatif à un système fermé clairement délimité. Selon le cas, on choisira le gaz seul ou l'ensemble {cylindre + gaz + piston}. Quel système choisir si on veut considérer le travail cédé par l'atmosphère au cours de la détente ?
- Pendant la détente, le piston est rigide et ne reçoit pas de transfert thermique.
- Pour une première estimation de la durée, on peut considérer que la vitesse est constante.
- Le cylindre peut-il échanger du travail ?
- Les frottements modifient-ils l'énergie interne finale du système {cylindre + gaz + piston} ?

9 Stabilité de l'atmosphère

L'air est considéré comme un gaz parfait de rapport γ constant et de masse molaire M . La verticale est repérée par un axe Oz ascendant : $\vec{g} = -g \vec{e}_z$. À l'équilibre, la température de l'air suit une loi $T_{\text{eq}}(z)$ connue.

1 • Si $P(z)$ représente la pression, et $P'(z)$ sa dérivée, déterminer le rapport $\frac{P'(z)}{P(z)}$.

2 • À la suite d'une perturbation, une bulle d'air, initialement à l'altitude z_0 s'élève jusqu'à l'altitude $z_0 + \zeta$. La bulle se met à l'équilibre mécanique avec l'air ambiant à cette nouvelle altitude, et, nous supposons que cette opération est suffisamment rapide pour être adiabatique.

En supposant ζ suffisamment petit, déterminer la masse volumique $\rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta)$ de la bulle, puis la masse volumique $\rho_e(z_0 + \zeta)$ de l'air ambiant à cette même altitude.

En déduire une condition portant sur la fonction $T(z)$ pour que l'atmosphère soit à l'équilibre. Commenter la valeur obtenue.

Conseils

- Comment exprime-t-on la masse volumique d'un gaz parfait en fonction de M , P et T ?
- La transformation subie par la bulle permet-elle d'appliquer la loi de LAPLACE ?
- Comment expliciter cette loi avec les variables P et ρ ?
- Si ζ est suffisamment petit, on peut exprimer $P(z_0 + \zeta)$ par un développement de Taylor à l'ordre 1.
- Pour exprimer la dérivée de ρ_e , on peut utiliser la dérivée logarithmique.
- Le système est stable si les forces qui s'exercent sur la bulle tendent à la ramener vers sa position initiale.

10 Chauffage d'une enceinte

D'après Concours communs Mines - Ponts

On se propose de maintenir un local à température constante T_c (température de consigne). La température extérieure est uniforme et vaut $T_e < T_c$.

À l'instant t , la température du local est notée T et l'on admet que la déperdition d'énergie thermique (« déperdition de chaleur ») est proportionnelle à la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur.

Le volume de l'enceinte est constant, le coefficient calori-

métrique global à volume constant, ou *capacité thermique* du local, est noté C . La puissance thermique fournie à l'extérieur (flux thermique sortant) s'exprime alors sous la forme $\frac{\delta Q}{\delta t} = \alpha C(T - T_e)$ (loi de Newton).

Détermination de α

Pour déterminer les déperditions thermiques, on arrête le chauffage pendant une durée Δt , durant laquelle la température du local passe de T_i à T_f , la température extérieure restant inchangée et égale à T_e .

1 • Préciser l'unité de α ; établir son expression :

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{T_i - T_e}{T_f - T_e} .$$

2 • Calculer la valeur de α pour $\Delta t = 3$ heures, $T_i = 294,0$ K, $T_f = 286,0$ K et $T_e = 281,0$ K.

Mise en route du chauffage

3 • Quelle est la puissance de chauffe nécessaire au maintien du local à la température $T_i = T_c = 294$ K ? On donne $C = 10^7$ J.K⁻¹.

La température du local est maintenue dans l'intervalle de régulation $\mathcal{D} = [T_R - \theta ; T_R + \theta]$ au moyen de relais thermostatiques du type tout ou rien.

Ces derniers mettent en route le dispositif de chauffage dès que T atteint la valeur $T_R - \theta$ et l'arrêtent dès que T atteint la valeur $T_R + \theta$ par valeur croissante. Les grandeurs T_R et θ sont respectivement la température de régulation et l'amplitude de régulation.

Notant P_c la puissance de chauffe (indépendante du temps), on pose aussi $T_{\text{RM}} = T_e + \frac{P_c}{\alpha C}$.

4 • Quel est le sens physique de T_{RM} ? Montrer qualitativement que, lorsque le système fonctionne normalement ($T_R = T_c = 294$ K), la température T du local est une fonction périodique du temps. Montrer alors que l'intervalle \mathcal{D} des valeurs possibles de T_R est :

$$T_e + \theta \leq T_R \leq T_{\text{RM}} - \theta .$$

Calculer numériquement \mathcal{D} pour $P_c = 15$ kW et $\theta = 0,1$ K.

5 • Exprimer la période, Θ , et donner sa valeur numérique.

6 • On note Δt_1 la durée, au sein de la période Θ , pendant laquelle le système de chauffage est actif.

Établir l'expression du facteur de forme de la source $\eta = \frac{\Delta t_1}{\Theta}$. Calculer sa valeur numérique. En déduire la puissance moyenne de chauffe ($T_R = T_c = 294$ K).

Conseils

Détermination de α

- Définir le système étudié et choisir la fonction d'état à partir de laquelle on établira le bilan énergétique.

Mise en route du chauffage

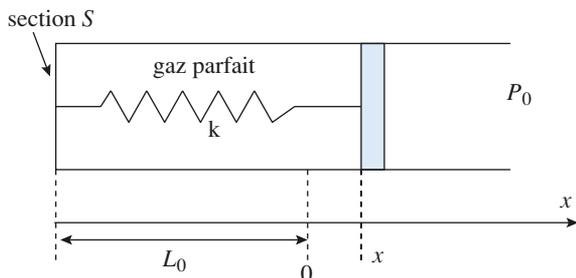
- Établir un nouveau bilan énergétique tenant compte du chauffage. Que devient-il si T reste constante égale à T_i ?
- Pour comprendre le fonctionnement, on pourra tracer $P_c = f(T)$. À quel dispositif électronique cette courbe fait-elle penser ?
- Pour faire l'étude quantitative, exprimer le bilan énergétique et l'intégrer suivant que le chauffage fonctionne ou non entre $T_R - \theta$ et $T_R + \theta$, ou $T_R + \theta$ et $T_R - \theta$.
- Les questions 5) et 6) sont des applications de la question 4).

11 Capacité calorifique d'un système complexe

Un gaz parfait (quantité de matière n) est enfermé dans un cylindre (de section S) fermé par un piston mobile, retenu par un ressort de raideur k , de longueur à vide L_0 . Initialement, le gaz est à la pression atmosphérique P_0 , température T_0 et la longueur de cylindre occupée par le gaz vaut L_0 .

On note C_V la capacité calorifique molaire à volume constant du gaz (doc. 1).

Même si cette hypothèse est discutable, on négligera dans cet exercice la capacité thermique du ressort.



Doc. 1

On suppose que le système {gaz + ressort} est en permanence en état d'équilibre thermodynamique interne; on repère le déplacement du piston par sa cote x .

- 1 • On fait évoluer lentement la température: comment est représentée cette transformation en diagramme de Clapeyron (P, x) ? Examiner les cas particuliers.

- 2 • Quand la température T varie de dT , x varie de dx . Calculer dx en fonction de dT .

- 3 • Exprimer (en fonction de la variable x) l'énergie interne du système {gaz + ressort}. En déduire la variation infinitésimale de l'énergie interne dU en fonction de la variation de température dT .

- 4 • Calculer le transfert thermique δQ nécessaire pour faire varier la température de dT . En déduire la capacité calorifique C_K du système {gaz + ressort}. Examiner à nouveau les cas limites.

Conseils

- 1) Il suffit d'écrire l'équation d'équilibre du piston.
- 3) Dans l'expression de l'énergie interne U intervient l'énergie potentielle des forces intérieures, donc celle du ressort.
- 4) Il faut toujours commencer par calculer le travail et se servir du premier principe pour obtenir les échanges thermiques.

12 Transformations d'un gaz réel

Dans un certain domaine de température et de pression, le dioxygène O_2 est bien représenté par l'équation de Van de Waals:

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

Son énergie interne molaire est donnée par:

$$U_m = U_{0,m} + C_{V,m} T - \frac{a}{V_m}$$

Avec $a = 0,170 \text{ J}\cdot\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2}$,
 $b = 5,10 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$
 et $C_{V,m} = 21,1 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 1 • On réalise une détente de Joule-Gay-Lussac avec ce gaz. L'état initial est caractérisé par: Volume $V_0 = 10 \text{ L}$; quantité de matière: $n = 10$ moles; température $T_0 = 295 \text{ K}$. L'état final est caractérisé par un volume $V_1 = 2 V_0 = 20 \text{ L}$.

Déterminer littéralement et calculer la température finale T_1 si on néglige les échanges thermiques avec les parois. À quelle condition cette dernière hypothèse est-elle réaliste? Quel serait le résultat avec le modèle du gaz parfait?

- 2 • On réalise une compression suffisamment lente pour pouvoir la considérer comme isotherme. La température restant égale à T_0 , les n moles passent de V_0 à $V_2 = \frac{V_0}{2}$. Calculer le travail et la chaleur fournis au gaz.

3 • On réalise la même compression (même état initial, même volume final), de façon suffisamment rapide pour la supposer adiabatique, le système restant cependant toujours très proche d'un état d'équilibre interne. Déterminer la température finale et le travail fourni au gaz.

Conseils

- Revoir le dispositif expérimental de la détente de Joule-Gay-Lussac (Cours).
- Ne pas confondre énergie et énergie molaire, volume et volume molaire, etc.
- Comment s'écrit l'équation de Van der Waals pour une quantité de matière n ?
- Pour déterminer un échange thermique, il faut calculer la variation d'énergie interne et le travail.
- Question 3 : revoir la démonstration de la formule de LAPLACE pour un gaz parfait. Il faut utiliser la même méthode pour établir une relation simple entre V et T .

1 Oscillations adiabatiques

Chaque partie du système subit une évolution adiabatique. Si la vitesse du piston est faible devant la vitesse de propagation du son, on peut considérer que la pression et la température y sont uniformes et définis à tout instant. On peut donc appliquer la relation de LAPLACE.

Repérons la position du piston par l'abscisse x , nulle à l'équilibre et orientée de la gauche vers la droite.

Les volumes des compartiments (1) et (2) deviennent :

$$V_1 = V_0 + Sx \quad \text{et} \quad V_2 = 2V_0 - Sx$$

L'application de la loi de LAPLACE se traduit par :

$$P_1 V_1^\gamma = P_1 V_0^\gamma \left(1 + \frac{Sx}{V_0}\right)^\gamma = P_0 V_0^\gamma$$

Sx étant petit devant V_0 (petites oscillations), on obtient

$$\text{après un D.L. à l'ordre 1 : } P_1 = P_0 \left(1 - \frac{\gamma Sx}{V_0}\right)$$

$$\text{On obtient de même : } P_2 = P_0 \left(1 - \frac{\gamma Sx}{2V_0}\right)$$

Écrivons maintenant la RFD appliquée au piston :

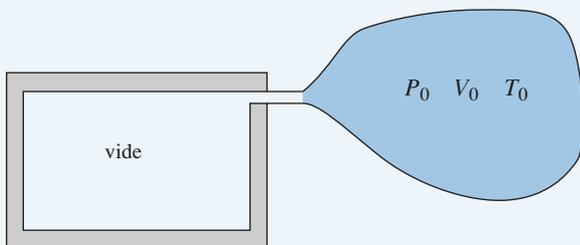
$$m \ddot{x} = P_1 S - P_2 S = - \frac{3\gamma P_0 S^2}{2V_0} x$$

On a un mouvement oscillant sinusoïdal de fréquence :

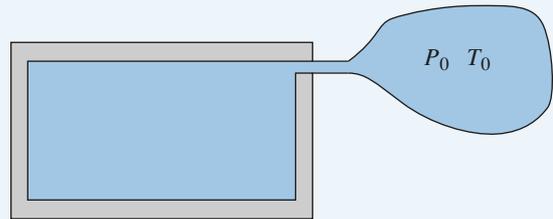
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3\gamma P_0 S^2}{2V_0}}$$

Une étude plus réaliste devrait tenir compte des échanges thermiques à travers les parois et des frottements. Si ceux-ci sont faibles, on observe des oscillations amorties de pseudo-fréquence voisine de f et le système tend vers l'état d'équilibre initial.

2 Remplissage d'un réservoir



État initial : Tout le gaz constituant le système est contenu dans le volume V_0 , à l'extérieur.



État intermédiaire : le gaz se répartit entre un volume extérieur plus petit que V_0 et le réservoir.



État final : tout le gaz est contenu dans le réservoir.

Considérons le système fermé constitué par le gaz qui se trouve dans le réservoir à la fin de l'expérience. Dans l'état initial, il occupe un volume V_0 .

La partie du gaz qui est restée dans l'atmosphère est toujours à l'équilibre thermique et mécanique avec celle-ci.

Ce système est limité, du côté de l'atmosphère, par une paroi fictive où la température est égale à T_0 des deux côtés. Le gaz subit donc une transformation adiabatique.

Bien que l'écoulement soit lent, le gaz passe brusquement de la pression P_0 à une pression plus faible lors de son passage par le robinet ; son évolution n'est pas quasistatique et on ne peut pas utiliser la relation de LAPLACE.

La paroi du réservoir est immobile. Le seul travail est donc le travail des forces de pression atmosphérique, qui s'appliquent sur une surface qui « balaye » le volume V_0 . Le travail reçu par le système est donc :

$$W = + P_0 V_0 .$$

Ce travail est bien positif, car la « paroi » se déplace dans le sens de la force pressante.

Les échanges thermiques étant nuls, on peut écrire :

$$\Delta U = W , \text{ soit : } n C_{V,m} (T_{\text{finale}} - T_0) = P_0 V_0$$

$$\text{avec } n = \frac{P_0 V_0}{R T_0} \quad \text{et} \quad C_{V,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$$

$$\text{On en déduit : } T_{\text{finale}} - T_0 = (\gamma - 1) T_0$$

$$\text{et donc : } T_{\text{finale}} = \gamma T_0 .$$

On remarque que ce résultat est indépendant de la pression finale.

L'hypothèse la plus contestable est celle de l'adiabaticité des parois : La capacité thermique du gaz intérieur est suffisamment faible pour qu'il soit difficile de négliger le transfert thermique vers la face interne des parois. La température finale est donc comprise entre T_0 et γT_0 , et doit tendre vers T_0 pour un temps suffisamment long.

3 Expérience de Clément-Desormes

1 • Le tableau ci-dessous explicite chaque opération :

opération	analyse et conclusions
compression initiale	La compression rapide du gaz correspond à une augmentation de température sans échange thermique.
1 refroidissement isochore	<p>Les échanges thermiques étant lents devant la mise en équilibre de pression, il faut laisser le récipient quelques heures afin que la température de l'air intérieur soit de nouveau égale à T_0. Le volume reste inchangé.</p> <p>Le gaz a été comprimé donc $P_1 > P_0$. Puisque h_1 est de l'ordre de quelques cm, $P_1 - P_0$ est de l'ordre de quelques millibars (1 bar correspond à 10 m d'eau).</p>
2 détente adiabatique	<p>Puisque $p_1 = P_1 - P_0$ est faible, l'ouverture du robinet va provoquer la fuite d'une petite quantité de gaz jusqu'à ce que la pression intérieure soit égale à P_0.</p> <p>Le gaz restant à l'intérieur de la bouteille a subi une détente rapide : on peut considérer que les échanges thermiques n'ont pas eu lieu et la température de ce gaz a baissé.</p> <p><i>Attention :</i> Le système considéré ici est différent de celui de l'opération 1. Il s'agit toujours d'un système fermé mais de quantité de matière moindre.</p> <div style="text-align: center;"> <p>Le diagramme illustre la détente adiabatique en deux états. À l'état initial, le robinet est ouvert et une petite quantité de gaz (n moles) s'échappe. À l'état final, le robinet est fermé et le gaz restant ($n_0 - n$ moles) est à la même température T_0 que précédemment.</p> </div> <p>La transformation des $n_0 - n$ moles n'est pas isochore.</p>
3 échauffement isochore	<p>De même qu'en 1, il s'agit d'une phase de mise en équilibre thermique jusqu'à la température T_0. Le gaz s'est échauffé, à volume constant, depuis un état initial de pression P_0 : P_2 est donc supérieure à P_0.</p> <p>Durant cette opération, le récipient contient $(n_0 - n)$ moles de gaz à la température T_0; or, durant l'opération 2, le récipient contenait n_0 moles à la température T_0. Ainsi $P_2 < P_1$ et $h_2 < h_1$.</p>

Compte tenu des valeurs faibles des surpressions, on peut considérer que les deux systèmes étudiés (n_0 moles pour 1 et $n_0 - n$ moles pour 2 et 3) subissent des transformations telles que chaque état intermédiaire peut être considéré comme un état d'équilibre thermodynamique interne.

2 • a. On considère le système constitué des $n_0 - n$ moles de gaz présentes en fin d'expérience dans le récipient. Comme les transformations sont des suites d'états d'équilibre thermodynamique interne ($p_1 \ll P_0$, $p_2 \ll P_0$), que le gaz est parfait et que γ est constant, la loi de Laplace peut s'appliquer pour ces évolutions adiabatiques, soit $PV^\gamma = \text{cte}$. Sachant que $\gamma > 1$, la pente en un point d'une adiabatique est supérieure (en valeur absolue) à celle d'une isotherme, en effet on a :

$$d(\ln PV^\gamma) = \frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0,$$

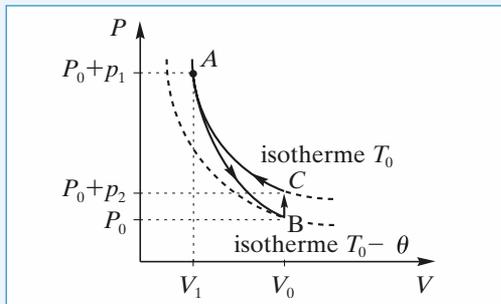
$$\text{d'où } \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{adiabatique}} = -\gamma \frac{P}{V}$$

$$d(\ln PV) = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = 0, \text{ d'où } \left(\frac{dP}{dV}\right)_{\text{isotherme}} = -\frac{P}{V}.$$

Juste avant l'ouverture du robinet, le point représentatif du système des $n_0 - n$ moles d'air est en A de coordonnées $[V_1, (P_0 + p_1)]$, si V_1 est le volume occupé par les n moles qui vont sortir.

Pendant l'ouverture, le système subit une transformation adiabatique quasistatique caractérisée par $PV^\gamma = C^{\text{ste}}$. Le système atteint le point B , de coordonnées (P_0, V_0) .

Après la fermeture du robinet, la gaz contenu dans le récipient subit un échauffement isochore (il y a transfert thermique à travers les parois du récipient). Il atteint le point C , de volume V_0 et situé sur l'isotherme T_0 qui passe également par A .



b. On considère le système fermé constitué des $(n_0 - n)$ moles qui restent dans le récipient. On peut écrire :

• Pour la transformation adiabatique AB :

$$T^\gamma P^{1-\gamma} = C^{\text{ste}},$$

$$\text{soit } (P_0 + p_1)^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_0^{1-\gamma} (T_0 - \theta)^\gamma$$

$$\text{ou encore : } \left(1 - \frac{p_1}{P_0}\right)^{1-\gamma} = \left(1 - \frac{\theta}{T_0}\right)^\gamma$$

En outre, comme $p_1 \ll P_0$ et $\theta \ll T_0$, la relation ci-dessus conduit, après un D.L. à l'ordre 1 à :

$$(1 - \gamma) \frac{p_1}{P_0} = -\gamma \frac{\theta}{T_0};$$

• pour l'échauffement isochore BC : $\frac{P}{T} = C^{\text{ste}}$

$$\text{d'où } \frac{P_0}{T_0 - \theta} = \frac{P_0 + p_2}{T_0} \text{ soit : } 1 + \frac{p_2}{P_0} = \left(1 - \frac{\theta}{T_0}\right)^{-1}$$

et, puisque $p_2 \ll P_0$ et $\theta \ll T_0$: $\frac{\theta}{T_0} = \frac{p_2}{P_0}$;

• ainsi, en éliminant $\frac{\theta}{T_0}$ des deux relations obtenues,

on en déduit :

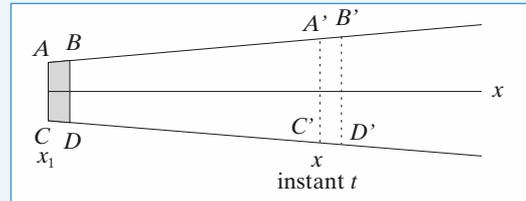
$$(1 - \gamma) \frac{p_1}{P_0} = -\gamma \frac{p_2}{P_0},$$

$$\text{d'où } \gamma = \frac{p_1}{p_1 - p_2} = \frac{h_1}{h_1 - h_2}, \text{ soit } \gamma = 1,4.$$

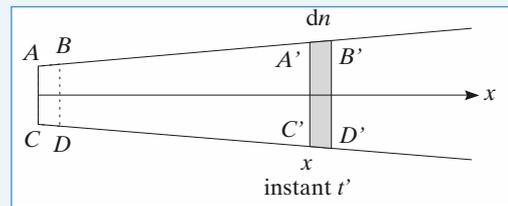
Remarque : L'expérience de Clément-Desormes donne des résultats peu précis. Les déterminations de γ se font actuellement à partir de la mesure de la vitesse du son dans le gaz considéré.

4 Étude d'une tuyère

1 • À l'instant t , la tranche contenant dn moles est en $x = x_1$. Elle est caractérisée par U_1, T_1, P_1, H_1 et v_1 .



• À l'instant t ($t' > t$) elle est à l'abscisse x . Elle est caractérisée par $U(x), T(x), P(x), H(x)$ et $v(x)$.



Pour calculer $U(x) - U_1$, on va considérer la tranche de gaz $ACA'C'$ à l'instant t . À l'instant t' , cette tranche s'est déplacée et occupe un volume $BDB''D''$.

Le système étudié étant fermé et l'écoulement permanent, on a nécessairement $B'' = B'$ et $D'' = D'$.

$T(x)$ et $P(x)$ sont indépendants du temps et la masse totale de la tranche $ACA'C'$ est invariante.

On applique le premier principe entre les instants t et t' à la tranche précédente :

- $Q = 0$, puisque les parois sont adiabatiques ;
- en amont le gaz reçoit un travail $W_1 = P_1 V_{ABCD}$;

- en aval il reçoit le travail :

$$W(x) = -P(x)V_{A'B'C'D'};$$

$$\begin{aligned} & \bullet (\mathcal{E}_{K_{BB'DD'}} - \mathcal{E}_{K_{AA'CC'}}) + (U_{BB'DD'} - U_{AA'CC'}) \\ & = P_1 V_{ABCD} - P(x) V_{A'B'C'D'} \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{E}_{P, \text{ext}} = \text{cte}$;

$$\text{or } \begin{cases} U_{BB'DD'} = U_{BDA'C'} + U_{A'B'C'D'} \\ U_{AA'CC'} = U_{ABCD} + U_{BDA'C'} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} \mathcal{E}_{K_{BB'DD'}} = \mathcal{E}_{K_{BDA'C'}} + \mathcal{E}_{K_{A'B'C'D'}} \\ \mathcal{E}_{K_{AA'CC'}} = \mathcal{E}_{K_{ABCD}} + \mathcal{E}_{K_{BDA'C'}} \end{cases}$$

Ainsi, puisque toutes ces grandeurs sont indépendantes de temps :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{K_{A'B'C'D'}} + U_{A'B'C'D'} + P(x) V_{A'B'C'D'} \\ = \mathcal{E}_{K_{ABCD}} + U_{ABCD} + P_1 V_{ABCD} . \end{aligned}$$

$$\text{Or } \begin{cases} \mathcal{E}_{K_{A'B'C'D'}} = \frac{1}{2} dm v(x)^2 = \frac{1}{2} dn M v(x)^2 \\ \mathcal{E}_{K_{ABCD}} = \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} dn M v_1^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_{A'B'C'D'} = dn V_m(x) \\ V_{ABCD} = dn V_{m_1} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} U_{A'B'C'D'} = U_m(x) \cdot dn \\ U_{ABCD} = U_{m_1} \cdot dn . \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \frac{1}{2} M v(x)^2 + U_m(x) + P(x) V_m(x) \\ = \frac{1}{2} M v_1^2 + U_{m_1} + P_1 V_{m_1} . \end{aligned}$$

Comme $U_m(x) + P(x) V_m(x) = H_m(x)$, on a effectivement bien :

$$H_m(x) + \frac{1}{2} M v^2(x) = \text{cte} .$$

- 2 •** $H_{m_2} + \frac{1}{2} M v_1^2 = H_{m_1}$ le gaz est parfait, donc :

$$\begin{aligned} H_{m_1} - H_{m_2} &= \frac{R\gamma}{\gamma-1} - 1 (T_1 - T_2) , \text{ soit :} \\ v_2 &= \left[\frac{2}{M} \frac{R\gamma}{\gamma-1} (T_1 - T_2) \right]^{\frac{1}{2}} . \\ v_2 &= 301,5 \text{ ms}^{-1} . \end{aligned}$$

- 3 •** Si l'on suppose que l'énergie cinétique du gaz en amont de la turbine lui est intégralement transmise :

$$\frac{1}{2} M v_2^2 = W_{\text{turbine}} .$$

$$\text{Ainsi } W_{\text{turbine}} = \frac{\gamma R}{\gamma-1} (T_1 - T_2)$$

$$W_{\text{turbine}} = 1\,455 \text{ J} .$$

5 Étude d'une machine

Question préliminaire

- 1 •** Il s'agit d'une détente de Joule-Thomson.

Le lecteur pourra se reporter à son cours ou à la démonstration donnée à l'exercice 4 (il suffit d'écrire $\mathcal{E}_K(x) = \mathcal{E}_{K_1}$ pour retrouver la démonstration du cours).

- 2 •** Avec les notations de l'exercice 4 :

$-U_{ACA'C'} + U_{BDB'D'}$ = $\tau' + Q + P_1 V_{ABCD} - P(x) V_{A'B'C'D'}$: c'est lors de l'application du premier principe à la tranche de gaz passant de $ACA'C'$ à $BDB'D'$ qu'interviennent le travail τ' (autre que celui des forces de pression) et le transfert thermique Q échangés au niveau de l'élément (compresseur, turbine, etc.).

La relation $\Delta H = 0$ du **1**) devient $\Delta H = \tau' + Q$, où ΔH représente la variation d'enthalpie d'une tranche de gaz entre l'aval et l'amont de l'élément de machine étudié.

Si la branche contient n moles, cette relation devient :

$$n \Delta H_m = n \tau'_m + n Q_m$$

$$\text{soit : } \Delta H_m = \tau'_m + Q_m$$

- A • 1** On est dans les conditions d'application de la loi de Laplace. Ainsi :

$$P_0^{1-\gamma} T_0^\gamma = P_f^{1-\gamma} T_f^\gamma \text{ et } T_f = x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_0 .$$

- 2 • a.** Pour un gaz parfait (pour lequel $C_{P,m}$ est constant)

$$\Delta H_m = C_{P,m} \Delta T , \text{ soit :}$$

$$\Delta H_m = C_{P,m} (x^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1) T_0 .$$

- b.** D'après la question préliminaire et en tenant compte du caractère adiabatique de la transformation :

$$\tau'_m = \Delta H_m .$$

- c.** $\tau'_m = 8,64 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- 3 • a.** Seuls les travaux échangés au niveau des compresseurs sont intéressants : le travail au niveau de l'échangeur n'est pas fourni par la machine, il ne « coûte » donc rien.

$$\begin{aligned} \tau_m = \tau_{1m} + \tau_{2m} &= C_{P,m} \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] T_0 \\ &+ C_{P,m} \left[\left(\frac{P_f}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] T_0 \end{aligned}$$

en utilisant les résultats du **1**) et du **2**).

$$\text{Soit } \tau = C_{P,m} T_0 \left[\left(\frac{P_0}{P_1} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + \left(\frac{P_1}{P_f} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 2 \right] .$$

- b.** Il suffit d'annuler $\frac{d\tau_m}{dP_1}$. On obtient, après un calcul sans difficulté, $P_1 = \sqrt{P_0 P_f}$.

c. $P_1 = 3,5 \text{ bars}$. $\tau_m = 7,12 \text{ kJ.mol}^{-1}$. L'intérêt du compresseur à deux étages apparaît ici, puisque $\tau < \tau'$: le travail total à fournir pour passer de P_0 à P_f est inférieur d'environ 20 %.

B • 1 τ_{c_m} a été calculé à la question précédente :

$$\tau_{c_m} = 7,12 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

2 • τ_T est donné par le résultat de la question préliminaire :

$$\begin{aligned} \tau_{T_m} &= \Delta H_m = C_{P,m} (T_D - T_C) \\ \tau_{T_m} &= -15,25 \text{ kJ.mol}^{-1}. \end{aligned}$$

3 • Le travail utile récupéré sur l'axe vaut $\tau_u = -(\tau_T + \tau_c)$, puisque la turbine et le compresseur à deux étages sont solidaire :

$$\tau_{u_m} = 8,13 \text{ kJ.mol}^{-1}.$$

4 • L'air est chauffé de façon isobare; or $\Delta H = Q_P$ pour une telle évolution. Ici on a donc :

$$\begin{aligned} Q_m &= \Delta H_{m,BC} = C_{P,m} (T_C - T_B) \\ Q_m &= 13,46 \text{ kJ.mol}^{-1}. \end{aligned}$$

5 • Le rendement d'un moteur est défini par le rapport entre le travail utile récupéré et le coût énergétique correspondant :

$$\eta = \frac{\tau_u}{Q} = 0,60.$$

6 Détermination d'une capacité thermique massique

1 • Puisque le débit gazeux est interrompu, on s'intéresse au système {calorimètre + accessoires + eau}.

On sait que pour des phases condensées, la variation d'énergie interne et celle de l'enthalpie sont quasiment égales :

$$dU = dH = CdT.$$

Si on réalise un bilan énergétique sur la fonction H en considérant que l'expérience se fait à pression constante, on peut écrire $dH = \delta Q_P$. Or le seul échange thermique du système avec le milieu extérieur correspond aux fuites thermiques :

$$\delta Q_P = -k(T - T_0) dt, \text{ soit } CdT = -k(T - T_0) dt$$

$\frac{dT}{T - T_0} = -\frac{k}{C} dt$. En intégrant, compte tenu de la condition initiale $T(t=0) = T_2$:

$$T = T_0 + (T_2 - T_0) e^{-\frac{kt}{C}}.$$

Remarques : On vérifie que si $t \rightarrow +\infty$, $T \rightarrow T_0$: le calorimètre est alors en équilibre thermique avec le milieu extérieur.

$\tau = \frac{C}{k}$ est le temps caractéristique de cette mise en équilibre :

• si k est grand, les fuites sont importantes et τ est petit (mise en équilibre rapide) ;

• si C est grand, la capacité du système à emmagasiner de l'énergie thermique est grande, et la mise en équilibre lente.

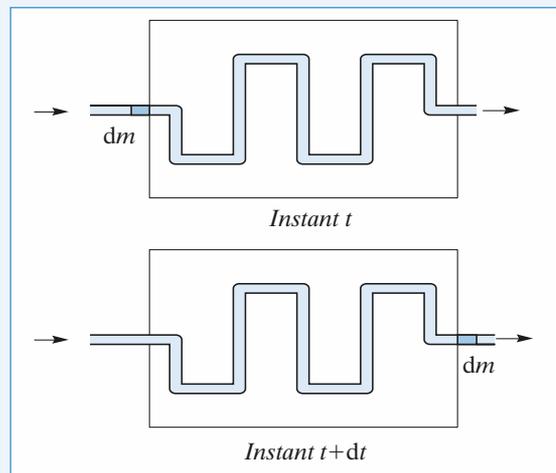
2 • Soit le système constitué, en régime permanent, à l'instant t , du calorimètre, de l'eau, de ses accessoires, de la masse M de gaz présente dans le serpentin dans le calorimètre et de la masse dm qui entrera dans le calorimètre durant l'intervalle dt ci-après.

Entre les instants t et $t + dt$, la masse dm entre à la température T_1 et une autre quantité de matière de même masse dm (régime stationnaire) sort à la température T_2 du calorimètre.

On raisonne de nouveau sur l'enthalpie du système et on fait un bilan énergétique :

$$dH_{\text{système}} = dH_{\{\text{calorimètre} + \text{eau} + \text{accessoires}\}} + dH_{M+dm}$$

or $dH_{\{\text{calorimètre} + \text{eau} + \text{accessoires}\}} = 0$, car $dT = 0$ en régime stationnaire, et $dH_{M+dm} = c_P dm(T_2 - T_1)$ tout se passe entre l'instant t et l'instant $t + dt$ comme si une même masse dm était passée de T_1 à T_2 : ceci n'est vrai qu'en régime stationnaire où $H_M = \text{cte}$.



Ainsi, puisque :

$$\delta Q_P = -k(T_2 - T_0) dt,$$

on a : $c_P dm(T_2 - T_1) = -k(T_2 - T_0) dt$,

or $dm = D_m dt$ et finalement :

$$c_P = -\frac{k}{D_m} \frac{(T_2 - T_0)}{(T_2 - T_1)}.$$

$$\mathbf{3 \bullet} \quad k = \frac{C}{\Delta t} \ln \left(\frac{T_2 - T_0}{T_2 - \Delta T - T_0} \right)$$

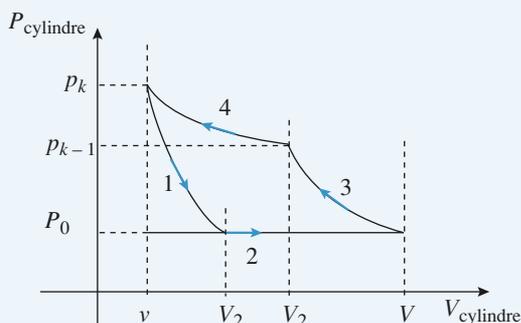
avec $\Delta T = 2 \text{ K}$ et $\Delta t = 600 \text{ s}$.

$$k = 0,83 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}.$$

$$\bullet c_P = 476 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

7 Utilisation d'une pompe

1 • a. Représentons le $k^{\text{ième}}$ cycle du piston sur un diagramme représentant la pression dans le cylindre en fonction du volume du cylindre.



• Étape 1 : détente isotherme du gaz initialement contenu dans le volume v à la pression P_{k-1} . S_1 s'ouvre pour le volume V_1 où la pression atteint la valeur P_0 .

• Étape 2 : Aspiration d'air atmosphérique.

• Étape 3 : compression du gaz initialement contenu dans le volume V à la pression P_0 . S_2 s'ouvre pour le volume V_2 où la pression atteint la valeur P_{k-1} . La compression étant isotherme :

$$P_0 V = P_{k-1} V_2$$

• Étape 4 : Compression du gaz contenu dans le cylindre et dans le réservoir, le volume de ce système passant de $V_2 + V_0$ à $V_0 + v$. La compression étant isotherme :

$$P_{k-1} (V_2 + V_0) = P_k (V_0 + v)$$

En éliminant V_2 entre ces deux équations, on obtient la relation de récurrence :

$$P_k = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_{k-1} \frac{V_0}{V_0 + v}.$$

On obtient successivement les pressions :

$$P_0$$

$$P_1 = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_0 \frac{V_0}{V_0 + v}.$$

$$P_2 = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_1 \frac{V_0}{V_0 + v}.$$

...

$$P_k = P_0 \frac{V}{V_0 + v} + P_{k-1} \frac{V_0}{V_0 + v}.$$

En éliminant successivement P_{k-1} , P_{k-2} , ..., P_1 , on obtient :

$$P_k = P_0 \frac{V_0}{V_0 + v} \left[1 + \frac{V_0}{V_0 + v} + \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^2 + \dots + \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^{k-1} \right] + P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k.$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$P_k = P_0 \frac{V}{V_0 + v} \left[\frac{1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k}{1 - \frac{V_0}{V_0 + v}} \right] + P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k,$$

$$\text{soit, } P_k = P_0 \frac{V}{v} \left[1 - \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k \right] + P_0 \left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k.$$

b. Quand k devient très grand, P_k tend vers la limite :

$$P = P_0 \frac{V}{v}$$

Cette pression est atteinte lorsque la soupape S_2 ne s'ouvre plus, même lorsque le piston est en fin de course à droite ; pour retrouver la relation ci-dessus, il suffit donc de réécrire la relation (1) (qui donne la condition d'ouverture de S_2) avec :

$$V_2 = v \text{ et } P_{k-1} = P, \text{ soit } P v = P_0 V.$$

2 • On suppose $v = 0$.

a. Reprenons le résultat de la question 1) a) :

Sachant que $\left(\frac{V_0}{V_0 + v} \right)^k \approx 1 - k \frac{v}{V_0}$ lorsque v est très petit, on obtient :

$$P_k = P_0 \left(1 + k \frac{V}{V_0} \right).$$

(Relation que l'on peut aussi retrouver par un calcul direct.)

b. Calculons le travail des forces de pression au cours du $m^{\text{ième}}$ cycle du piston. Le travail de la force de pression atmosphérique P_0 est nul puisque, au cours d'un aller et retour, le volume balayé par le piston est nul :

$$-P_0 \Delta V - P_0 (-\Delta V) = 0.$$

Dans le cylindre, l'air subit une transformation isotherme :

• lorsque le piston se déplace vers la gauche, la soupape S_1 est constamment ouverte (puisque $v = 0$) ; l'air s'engouffre dans le cylindre à pression constante P_0 , son volume augmente de V , d'où :

$$W_{m1} = -P_0 V = -nRT;$$

• lorsque le piston se déplace vers la droite, l'air est comprimé dans le cylindre du volume V au volume V_2 (S_2 fermée), d'où :

$$W_{m2} = -nRT \ln \frac{V_2}{V} = -P_0 V \ln \frac{P_0}{P_{m-1}}.$$

Ensuite (S_2 ouverte), l'air du cylindre et du réservoir est comprimé du volume $(V_0 + V_2)$ au volume V_0 :

$$W_{m3} = -(n + n_{m-1}) RT \ln \frac{V_0}{V_0 + V_2} = -P_m V_0 \ln \frac{P_{m-1}}{P_m}.$$

Au total, le travail des forces de pression pour le $m^{\text{ième}}$ cycle de piston vaut donc :

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} + W_{m3} = -P_0 V \left(1 + \ln \frac{P_0}{P_{m-1}} \right) - P_m V_0 \ln \frac{P_{m-1}}{P_m},$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$W_m = V_0 [P_m \ln P_m - P_{m-1} \ln P_{m-1} - (P_m - P_{m-1})(1 + \ln P_0)]$$

puisque l'on a $(n + n_{m-1}) RT = P_0 V + P_{m-1} V_0 = P_m V_0$

On peut ainsi en déduire le travail W_k des forces de pression pour k allers et retours du piston :

$$W_k = \sum_{m=1}^k W_m = P_k V_0 \ln \frac{P_k}{P_0} - (P_k - P_0) V_0.$$

Ce travail W_k correspond au travail fourni par le moteur de la pompe.

8 Détente brusque d'un gaz

1 • Le gaz étant homogène, la tranche dx de gaz a une masse $dm = m_{\text{gaz}} \frac{dx}{X(t)}$ et une énergie cinétique

$$d\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} dm v^2(x, t).$$

$$\text{On en déduit: } d\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} m_{\text{gaz}} \frac{x dx}{X^2} \dot{X}^2$$

$$\text{et } \mathcal{E}_{K \text{ gaz}} = \frac{m_{\text{gaz}} \dot{X}^2}{2X^2} \int_{x=0}^x x dx \text{ d'où:}$$

$$\mathcal{E}_{K \text{ gaz}}(t) = \frac{1}{4} m_{\text{gaz}} \dot{X}^2(t)$$

2 • a. Le gaz contenu dans le cylindre subit une détente adiabatique, supposée quasistatique (puisque P et T sont définis à tout instant). Connaissant le rapport des volumes (le volume double), on applique les relations de LAPLACE:

$$T_2 = T_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma-1} \text{ soit } T_2 = 227 \text{ K}$$

$$P_2 = P_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma} \text{ soit } P_1 = 1,52 \text{ bar.}$$

La vitesse maximale du piston est obtenue juste avant le choc sur la butée. Effectuons donc un bilan d'énergie entre l'instant initial et juste avant le choc, lorsque le piston arrive en X_2 .

La force exercée par l'atmosphère sur le piston est simple à exprimer, contrairement à la force exercée par le piston sur le gaz situé à l'intérieur. Considérons donc le système {gaz + cylindre + piston}.

Le cylindre et le piston sont ici assimilés à des phases condensées. En l'absence d'échanges thermiques, leur énergie interne est constante, d'où :

$$\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} = n_{\text{gaz}} C_{V, m} (T_2 - T_1).$$

Les échanges thermiques étant nuls et le seul travail étant celui de l'atmosphère (négatif), le bilan d'énergie s'écrit :

$$\Delta U + \Delta \mathcal{E}_{K \text{ gaz}} + \Delta \mathcal{E}_{K \text{ piston}} = W_{\text{atmosphère}}$$

$$n_{\text{gaz}} C_{V, m} (T_2 - T_1) + \left(\frac{1}{4} m_{\text{gaz}} + \frac{1}{2} m\right) (V_{\text{max}}^2 - 0) =$$

$$- P_0 \pi a^2 (X_2 - X_1)$$

$$\text{avec } n_{\text{gaz}} = \frac{P_1 V_1}{R T_1} = \frac{4 P_0 \pi a^2 X_1}{R T_0} \text{ et } m_{\text{gaz}} = M n_{\text{gaz}}.$$

On obtient après simplifications :

$$\frac{4 P_0 X_1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{1}{2^{\gamma-1}}\right) - \frac{1}{2} V_{\text{max}}^2 \left(\rho e + \frac{P_0 M X_1}{2 R T_0}\right)$$

$$= P_0 X_1$$

$$V_{\text{max}}^2 = \frac{2 P_0 X_1 \left(5 - \gamma - \frac{4}{2^{\gamma-1}}\right)}{(\gamma - 1) \left(\rho e + \frac{P_0 X_1 M}{2 R T_0}\right)}.$$

Pour une estimation grossière, on peut supposer que la vitesse moyenne est de l'ordre de V_{max} , d'où :

$$\tau_0 \approx \frac{X_2 - X_1}{V_{\text{max}}}$$

$$\text{b. } V_{\text{max}} = 48 \text{ m.s}^{-1}; \tau_0 \approx 4 \text{ ms.}$$

Les hypothèses sont valides si $c_{\text{son}} \tau_0 \gg X_1$ avec $c_{\text{son}} \approx 3.10^2 \text{ m.s}^{-1}$ (T étant variable, on ne peut attribuer de valeur précise à c_{son}).

On obtient $c_{\text{son}} t_0 \approx 1,2 \text{ m}$. On est à la limite de validité de l'hypothèse quasistatique.

c. Remarquons que, entre le choc et l'état de repos, on ne considère plus le piston comme un système rigide: Le choc provoque des déformations et des vibrations qui, en s'amortissant, dissipent de la chaleur. Le raisonnement qui suit permet de ne pas avoir à étudier le mécanisme de cette conversion d'énergie mécanique en énergie interne.

Effectuons des bilans d'énergie entre «juste avant le choc» et l'état final.

• Le cylindre restant parfaitement rigide et immobile, il ne fournit aucun travail. Le piston ne reçoit donc ni travail ni échange thermique pendant la durée considérée. Le bilan d'énergie pour le piston s'écrit donc :

$$\Delta U_{\text{piston}} + \frac{1}{2} m (0 - V_{\text{max}}^2) = 0$$

$$\text{d'où: } m c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = \frac{1}{2} m V_{\text{max}}^2$$

$$T_{3 \text{ piston}} = T_0 + \frac{V_{\text{max}}^2}{c}. \text{ A.N.: } T_{3 \text{ piston}} - T_0 = 1,1 \text{ K.}$$

• Pendant cette phase, le gaz est isolé :

$$\frac{1}{4} m_{\text{gaz}} V_{\text{max}}^2 = \Delta U_{\text{gaz}} = n_{\text{gaz}} \frac{R}{\gamma - 1} (T_{3 \text{ gaz}} - T_2).$$

$$T_{3 \text{ gaz}} - T_2 = \frac{(\gamma - 1) M V_{\text{max}}^2}{4 R}$$

$$\text{A.N.: } T_{3 \text{ gaz}} - T_2 = 0,79 \text{ K.}$$

3 • Le gaz subit la même détente adiabatique quasistatique que dans l'hypothèse sans frottement; T_2 est donc inchangée.

$T_{3 \text{ gaz}}$ est légèrement différente en raison de la vitesse plus faible: $T_{3 \text{ gaz}} - T_2 = 0,14 \text{ K}$.

Faisons un bilan d'énergie pour le système {cylindre + piston + gaz} entre l'état initial et l'état final de repos: $\Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{piston}} + \Delta U_{\text{cylindre}} = W_{\text{atmosphère}}$ avec $\Delta U_{\text{cylindre}} = 0$ (par hypothèse, le cylindre ne s'échauffe pas).

Les frottements se manifestent par des échanges énergétiques entre le cylindre et le piston. Ils n'interviennent donc pas dans un bilan relatif à un système qui inclut ces deux éléments.

$$n_{\text{gaz}} \frac{R}{\gamma - 1} (T_{3 \text{ gaz}} - T_0) + m c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = - P_0 \pi a^2 (X_2 - X_1)$$

$$\frac{4P_0 X_1}{(\gamma-1)T_0} (T_{3 \text{ gaz}} - T_0) + e \rho c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = -P_0 X_1$$

$$e \rho c (T_{3 \text{ piston}} - T_0) = P_0 X_1 \left[\frac{4}{\gamma-1} \left(1 - \frac{T_{3 \text{ gaz}}}{T_0} \right) - 1 \right]$$

Cette relation est vraie qu'il y ait ou non des frottements. Dans les deux cas, $T_{3 \text{ gaz}}$ a pratiquement la même valeur. Avec une précision de deux décimales, on aura encore : $T_{3 \text{ piston}} - T_0 = 1,1 \text{ K}$.

4 • a. $t = 4 \text{ ms} \Rightarrow \delta = 45 \mu\text{m}$; $t = 40 \text{ s} \Rightarrow \delta = 4,5 \text{ mm}$.
Le volume de cylindre susceptible de variation de température est alors : $V = 2\pi a^2 X_1 \delta$.

La capacité thermique de ce volume est :

$$C_{\text{paroi}} = \rho c V = 4\pi a X_1 \delta \rho c.$$

Le gaz échange de la chaleur à volume constant. Sa

$$\text{capacité thermique est : } C_{\text{gaz}} = n \frac{R}{\gamma-1} = \frac{4P_0 \pi a^2 X_1}{(\gamma-1)T_0}.$$

$$\frac{C_{\text{paroi}}}{C_{\text{gaz}}} = \frac{(\gamma-1)\rho c T_0}{P_0} \frac{\delta}{a} = 3,10^3 \frac{\delta}{a};$$

$$t = 4 \text{ ms} \Rightarrow \frac{C_{\text{paroi}}}{C_{\text{gaz}}} = 7; t = 40 \text{ s} \Rightarrow \frac{C_{\text{paroi}}}{C_{\text{gaz}}} = 700.$$

La capacité thermique de la paroi n'est donc jamais négligeable (4 ms correspond à la durée de la détente).

b. Écrivons le bilan d'énergie pour le gaz qui reçoit de la chaleur de la paroi, à volume constant :

$$C_{\text{gaz}} \frac{dT}{dt} = h S [T_p(t) - T(t)].$$

La capacité thermique de la paroi étant très grande, sa température est pratiquement constante (elle se comporte comme un thermostat). L'équation devient :

$$\tau \frac{dT}{dt} = -[T(t) - T_0]$$

$$\text{avec } \tau = \frac{C_{\text{gaz}}}{h S} = \frac{P_0 a}{T_0(\gamma-1)h} = 200 \text{ s}.$$

Cette valeur de τ justifie l'hypothèse adiabatique pour les deux premières phases (détente et choc).

La solution, compte tenu de la valeur initiale de T est :

$$T(t) = T_0 - (T_0 - T_2) \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

10 minutes après la détente : $t = 3\tau$ et $T = 297 \text{ K}$.

9 stabilité de l'atmosphère

1 • Il suffit d'écrire la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$P'(z) = -\rho g \text{ avec } \rho = \frac{MP}{RT} \text{ d'où : } \frac{P'(z)}{P(z)} = -\frac{Mg}{R T_e(z)}$$

2 • La bulle subit une évolution adiabatique suffisamment « douce » pour que P et T y soient toujours définis. On peut donc appliquer la loi de LAPLACE sous la forme

$$P \rho^{-\gamma} = C^{\text{ste}} \text{ ou, mieux : } P^{-\frac{1}{\gamma}} \rho = C^{\text{ste}}.$$

$$P(z_0 + \zeta)^{-\frac{1}{\gamma}} \rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta) = P(z_0)^{-\frac{1}{\gamma}} \rho_e(z_0)$$

$$\rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta) = \rho_e(z_0) \frac{P(z_0 + \zeta)^{-\frac{1}{\gamma}}}{P(z_0)^{-\frac{1}{\gamma}}}$$

ζ étant suffisamment petit : $P(z_0 + \zeta) = P(z_0) + P'(z_0) \zeta$.

$$\text{D'après la question précédente : } P'(z_0) = -P(z_0) \frac{Mg}{R T_e(z)}$$

et donc :

$$P(z_0 + \zeta) = P(z_0) \left(1 - \frac{Mg \zeta}{R T_e(z_0)} \right)$$

$$\text{d'où : } P(z_0 + \zeta)^{\frac{1}{\gamma}} = P(z_0)^{\frac{1}{\gamma}} \left(1 - \frac{Mg \zeta}{\gamma R T_e(z_0)} \right).$$

$$\text{On en déduit : } \rho_{\text{bulle}}(z_0 + \zeta) = \rho_e(z_0) \left(1 - \frac{Mg \zeta}{\gamma R T_e(z_0)} \right)$$

Pour l'air ambiant :

$$\rho_e = \frac{MP}{RT} \Rightarrow \frac{1}{\rho_e} \frac{d\rho_e}{dz} = \frac{1}{P} \frac{dP}{dz} - \frac{1}{T_e(z)} \frac{dT_e}{dz} = -\frac{Mg}{R T_e(z)} - \frac{1}{T_e(z)}$$

En faisant un nouveau développement à l'ordre 1 :

$$\rho_e(z_0 + \zeta) = \rho_e(z_0) + \frac{d\rho_e}{dz} \zeta = \rho_e(z_0) \left(1 - \frac{\zeta}{T_e(z_0)} \left(\frac{Mg}{R} + \frac{dT_e}{dz} \right) \right)$$

D'après le théorème d'Archimède, la bulle est ramenée vers sa position initiale si $\rho_{\text{bulle}} > \rho_e$ pour $\zeta > 0$.

Donc, si : $\frac{Mg \zeta}{\gamma R T_e(z_0)} < \frac{1}{T_e(z_0)} \left(\frac{Mg}{R} + \frac{dT_e}{dz} \right)$, ce qui

$$\text{revient à : } \frac{dT_e}{dz} > -\frac{(\gamma-1)Mg}{\gamma R}$$

Numériquement, on trouve une pente limite de l'ordre de -10 K.km^{-1} , assez proche de la valeur couramment retenue pour la loi $T(z)$. Avec ce modèle simple, l'atmosphère est stable si $T_e(z)$ décroît moins vite que cette valeur limite. Dans ce cas, l'air n'est plus brassé par des courants, ce qui peut provoquer des pics de pollution.

Le problème est en fait plus compliqué car il faut aussi tenir compte de l'humidité de l'air.

10 chauffage d'une enceinte

1 • $\frac{\delta Q}{\delta t}$ s'exprime en W , soit en $J \cdot s^{-1}$; C en $J \cdot K^{-1}$;

T en K ; donc α s'exprime en s^{-1} .

On peut travailler avec l'énergie interne de l'enceinte puisque son volume reste constant : $\Delta U = Q_V$.

Ainsi, avec $\delta Q_V = -\delta Q_{\text{fuites}} = -\alpha C(T - T_e) \delta t$,

et $dU = CdT$:

$$\frac{CdT}{T - T_c} = -\alpha C \delta t, \text{ soit en intégrant entre } T_i \text{ et } T_f:$$

$$\alpha = \frac{1}{\Delta t} \ln \frac{T_i - T_c}{T_f - T_c}.$$

2 • L'application numérique donne:

$$\alpha = 8,85 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \text{ ou } \alpha = 0,32 \text{ h}^{-1}.$$

3 • En travaillant toujours sur la fonction U , mais en tenant compte désormais de la puissance de chauffe:

$$dU = -\alpha C(T - T_c) dt + P_c dt = CdT.$$

Si T est maintenue à T_i , $dT = 0$ et $P_c = \alpha C(T_c - T_e)$.

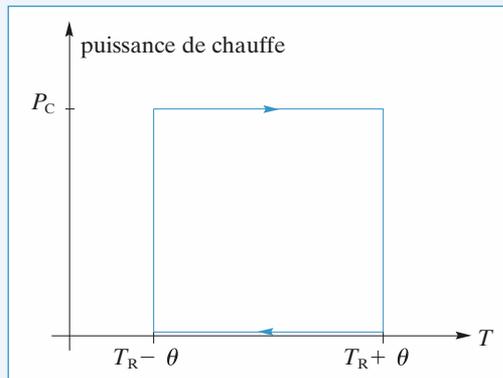
$$\text{A.N.: } P_c = 11,5 \text{ kW}.$$

4 • $T_{RM} = T_c + \frac{P_c}{\alpha C}$, soit $P_c = \alpha C(T_{RM} - T_e)$.

Ainsi, T_{RM} serait la température maximale obtenue en maintenant la puissance P_c continûment.

$$\text{A.N.: } T_{RM} = 297,95 \text{ K pour } P_c = 15 \text{ kW}.$$

• On trace la puissance de chauffe en fonction de T :



Le graphe ci-dessus correspond à un cycle d'hystérésis: lorsque T décroît de $T_R + \theta$ à $T_R - \theta$, le chauffage est coupé et il ne se met en marche qu'à partir de $T_R - \theta$ et ce jusqu'à $T_R + \theta$. Le dispositif peut être comparé à un système comportant un A.O. monté en comparateur à hystérésis.

La puissance de chauffe étant identique à chaque cycle, T_R et θ étant constants, on a bien affaire à un dispositif fonctionnant périodiquement.

• Lorsque T croît de $T_R - \theta$ à $T_R + \theta$, $P_c = 15 \text{ kW}$:

$$CdT = [P_c - \alpha C(T - T_e)] dt,$$

$$\text{soit: } \frac{CdT}{P_c - \alpha C(T - T_e)} = dt.$$

En intégrant entre $T_R - \theta$ et $T_R + \theta$ et en notant Δt_1 l'intervalle de chauffe:

$$\alpha \Delta t_1 = \ln \frac{P_c - \alpha C [(T_R - \theta) - T_e]}{P_c - \alpha C [(T_R + \theta) - T_e]};$$

soit en divisant par αC numérateur et dénominateur du logarithme:

$$\alpha \Delta t_1 = \ln \frac{T_{RM} - (T_R - \theta)}{T_{RM} - (T_R + \theta)}. \quad (1)$$

• Lorsque T décroît de $T_R + \theta$ à $T_R - \theta$, $P_c = 0$:

$$CdT = -\alpha C(T - T_e) dt,$$

et en intégrant comme ci-dessus et en notant Δt_2 le temps mis pour passer de $T_R + \theta$ à $T_R - \theta$:

$$\alpha \Delta t_2 = \ln \frac{[-T_c + (T_R + \theta)]}{[-T_c + (T_R - \theta)]}. \quad (2)$$

• De (1), on constate que T_R doit être inférieur à $T_{RM} + \theta$ et $T_{RM} - \theta$, soit:

$$T_R < T_{RM} - \theta = 297,9 \text{ K}.$$

• De (2), on constate que T_R doit être supérieur à $T_e + \theta$ et $T_e - \theta$, soit:

$$T_R > T_e + \theta = 281,1 \text{ K}.$$

5 • La période temporelle d'évolution Θ est donnée par:

$$\Theta = \Delta t_1 + \Delta t_2, \text{ soit:}$$

$$\Theta = \frac{1}{\alpha} \left[\ln \frac{(T_R + \theta) - T_c}{(T_R - \theta) - T_c} + \ln \frac{(T_{RM} - (T_R - \theta))}{(T_{RM} - (T_R + \theta))} \right],$$

$$\text{A.N.: } \Theta = 746 \text{ s, soit } 12 \text{ min } 26 \text{ s}.$$

6 • $\Delta t_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{T_{RM} - (T_R - \theta)}{T_{RM} - (T_R + \theta)} = 572 \text{ s, soit:}$

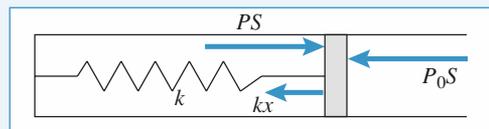
$$\eta = 0,767 \text{ et } \langle \mathcal{P} \rangle = \eta P_c = 11,5 \text{ kW}.$$

On retrouve la valeur de la puissance de chauffe obtenue à la question 3).

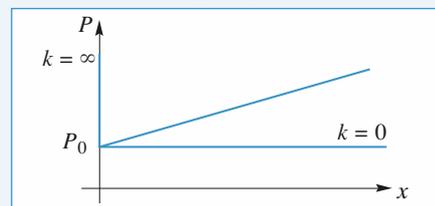
11 Capacité calorifique d'un système complexe

1 • Étudions la résultante des forces s'exerçant sur le piston:

$$+PS - kx - P_0S = 0, \text{ ce qui donne: } P = P_0 + \frac{k}{S} x.$$



Doc. 2



Doc. 3

• Si $k = 0$: $P = P_0$ en permanence. La pression étant constante, la transformation est isobare.

• Si $k = \infty$: $x = 0$ en permanence. Le volume étant constant, la transformation est isochore.

2 • Lorsque T varie de dT , x varie de dx : on cherche la relation liant dT et dx . On sait que:

$$PV = nRT, \text{ avec } V = V_0 + Sx = S(L_0 + x),$$

ainsi : $T = \frac{PV}{nR} = S \left(P_0 + \frac{k}{S} x \right) \frac{L_0 + x}{nR}$,
 et donc :

$$\frac{dT}{dx} = k \frac{L_0 + x}{nR} + \frac{S}{nR} \left(P_0 + \frac{k}{S} x \right) = k \frac{L_0}{nR} + \frac{SP_0}{nR} + 2 \frac{k}{nR} x,$$

ou encore : $dx = \frac{nR dT}{kL_0 + P_0 S + 2kx}$.

3 • L'énergie interne du système {gaz + ressort} s'écrit :

$$U = U_{\text{gaz}} + \mathcal{E}_{\text{Pint}}, \text{ avec } U_{\text{gaz}} = C_V(T - T_0) + U_0,$$

et $\mathcal{E}_{\text{Pint}} = \frac{1}{2} kx^2$.

Cela donne : $U = C_V(T - T_0) + U_0 + \frac{1}{2} kx^2$.

On en déduit donc : $dU = C_V dT + kx dx$, et donc l'expression de dU en fonction de dT :

$$dU = C_V dT + \frac{kx nR dT}{kL_0 + P_0 S + 2kx} \\ = \left(C_V + nR \frac{kx}{kL_0 + P_0 S + 2kx} \right) dT.$$

4 • On commence par calculer le travail élémentaire des forces extérieures : $\delta W = -P_0 S dx$. La variation d'énergie interne est : $dU = C_V dT + kx dx$, ce qui donne :

$$\delta Q = dU - \delta W = C_V dT + (kx + P_0 S) dx.$$

La capacité calorifique de ce système est définie par $\delta Q = C_K dT$, ce qui donne :

$$C_K = C_V + nR \frac{kx + P_0 S}{kL_0 + P_0 S + 2kx},$$

ou : $C_K = C_V + nR \frac{1}{1 + \frac{k(L_0 + x)}{P_0 S + kx}}$.

On examine les cas limites :

• si $k = 0$; la transformation est isobare :

$$C_K = C_V + nR = C_P;$$

• si $k = \infty$; la transformation est isochore : $C_K = C_V$.

12 Transformations d'un gaz réel

1 • La détente de Joule-Gay-Lussac est isoénergétique : les parois immobiles ne fournissent aucun travail et on les considère adiabatiques. Il suffit donc d'écrire : $U = n U_m$ constante, soit U_m constante. Le volume molaire passe de 10 L à 20 L.

$$C_{V,m}(T_1 - T_0) = a \left(\frac{n}{V_1} - \frac{n}{V_0} \right) = \frac{-a}{2V_0}$$

d'où : $T_1 = T_0 - \frac{na}{2C_{V,m}V_0}$.

A.N. : $T_1 - T_0 = -4,0 \text{ K}$.

Il faut faire la mesure de température dès que le gaz s'est mis à l'équilibre. Si on attend trop (de l'ordre de la minute), les échanges thermiques avec la couche interne de la paroi ne sont plus négligeables (voir la discussion de

l'exercice 8).

Si $a = 0$, on retrouve bien le résultat connu pour le gaz parfait : $T_1 = T_0$, car l'énergie interne n'est fonction que de T .

2 • L'échange thermique ne se calcule pas directement. En revanche, nous avons les moyens de calculer ΔU et W .

$$\Delta U = n \left[C_{V,m}(T_0 - T_0) - a \left(\frac{n}{V_2} - \frac{n}{V_0} \right) \right] = -\frac{n^2 a}{V_0}$$

La transformation étant une succession d'états d'équilibre interne, on peut écrire :

$$W = \int_{V_0}^{V_2} -P dV \text{ avec } P = \frac{nRT_0}{V - nb} - \frac{n^2 a}{V^2}$$

On obtient : $W = nRT_0 \ln \frac{V_0 - nb}{V_2 - nb} - n^2 a \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_0} \right)$

$$= nRT_0 \ln \frac{2V_0 - 2nb}{V_0 - 2nb} - \frac{n^2 a}{V_0}.$$

Par différence :

$$Q = \Delta U - W = -nRT_0 \ln \frac{2V_0 - 2nb}{V_0 - 2nb}.$$

A.N. : $W = 15,4 \text{ kJ}$ et $Q = -17,1 \text{ kJ}$.

3 • Pour une évolution adiabatique infinitésimale :

$$\delta W = -P dV = dU.$$

Pour le gaz étudié : $-\frac{nRT}{V - nb} dV + \frac{n^2 a}{V^2} dV$

$$= nC_{V,m} dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV.$$

Il reste : $R \frac{dV}{V - nb} + C_{V,m} \frac{dT}{T} = 0$.

Qui s'intègre en : $(V - nb)T^{C_{V,m}} = C^{\text{ste}}$

La température atteinte est donc :

$$T_3 = T_0 \left(\frac{2V_0 - 2nb}{V_0 - 2nb} \right)^{\frac{R}{C_{V,m}}}.$$

A.N. : $T = 386 \text{ K}$.

Notons que, comme $nb \ll V_0$, le résultat est très peu différent de celui obtenu avec le modèle du gaz parfait.

On obtient le travail par :

$$W = \Delta U = nC_{V,m}(T_3 - T_0) - \frac{n^2 a}{V_0}.$$

A.N. : $W = 19,0 \text{ kJ}$.

4

Second principe. Bilans d'entropie

LES OBJECTIFS

- Savoir déterminer la fonction d'état entropie d'un système.
- Savoir l'utiliser pour prévoir le sens d'une transformation, et pour déterminer un état d'équilibre.

LES PRÉREQUIS

- Équation d'état.
- Propriétés des gaz parfaits et des phases condensées.
- Énergie interne et bilans d'énergie.
- Transformations usuelles : monobare, isochore, adiabatique, monotherme.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Calcul différentiel et intégral.
- Dérivées partielles et différentielle d'une fonction de deux variables.
- Notions très sommaires de probabilités et de combinatoire.

ESSENTIEL

« Réversibilité et irréversibilité

Soit un système (S) isolé subissant une transformation entre deux états (1) et (2) quelconques. Cette transformation est dite réversible si une modification infinitésimale des paramètres du système dans l'état (2) ramène le système dans l'état (1).

« Deuxième principe de la thermodynamique

• Énoncé

À tout système thermodynamique est associée une fonction d'état, notée S , appelée entropie :

- l'entropie d'un système isolé croît jusqu'à l'établissement d'un état d'équilibre. Elle est alors maximale ;
- l'entropie d'un système est une grandeur extensive.

• Identité thermodynamique

L'identité thermodynamique lie les différentielles de l'énergie interne U et de l'entropie S . Pour un système fermé régi par une équation d'état $f(P, V, T) = 0$, elle a pour expression :

$$dS = \frac{1}{T}dU + \frac{P}{T}dV \text{ ou encore } dU = T dS - PdV .$$

De même, la différentielle de l'enthalpie s'écrit : $dH = T dS + VdP$.

Remarque : Ces relations ne sont pas des équations de bilan mais des relations mathématiques entre les différentielles de U , V et S .

Entropie du gaz parfait

• Expressions différentielles de l'entropie. Variation d'entropie

$$dS = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} \right) = n \left(C_{V,m} \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right) \quad (1)$$

$$dS = nR \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{dT}{T} - \frac{dP}{P} \right) = n \left(C_{P,m} \frac{dT}{T} + R \frac{dP}{P} \right) \quad (2)$$

$$dS = \frac{nR}{\gamma-1} \left(\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} \right) = n \left(C_{V,m} \frac{dP}{P} + C_{P,m} \frac{dV}{V} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S(V, T) &= n \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S(V_0, T_0) \\ &= nC_{V,m} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) + nR \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S(V_0, T_0) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} S(V, T) &= n \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) + S(P_0, T_0) \\ &= nC_{P,m} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - nR \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) + S(P_0, T_0) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} S(P, V) &= n \frac{R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) + n \frac{\gamma R}{\gamma-1} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S(P_0, V_0) \\ &= nC_{V,m} \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) + nC_{P,m} \ln \left(\frac{V}{V_0} \right) + S(P_0, V_0) \end{aligned} \quad (3)$$

si γ est indépendant de la température.

Ces relations ne sont pas à mémoriser, mais il **faud** savoir les retrouver très rapidement à partir de l'identité thermodynamique, de l'équation d'état, et de la définition des capacités thermiques molaires.

• Loi de Laplace

Un gaz parfait suit la loi de Laplace au cours d'une évolution isentropique où γ est supposé constant :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_2^{1-\gamma}, \quad P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma.$$

Contrairement aux précédentes, il est fortement conseillé de mémoriser ces relations très utiles.

Entropie d'une phase condensée

Pour une phase condensée idéale de capacité thermique C :

- $dU = C dT = T dS$.

- Si C est constante dans l'intervalle considéré : $S(T) = C \ln \frac{T}{T_0} + S(T_0)$.

► Pour s'entraîner : ex. 1, 8 et 9

Entropie et échanges thermiques

• Cas d'une transformation infinitésimale

Pour un système fermé décrit par l'équation d'état $f(P, V, T) = 0$, la variation d'entropie au cours d'une transformation infinitésimale entre deux états d'équilibre thermodynamique interne est reliée à l'énergie thermique échangée par la formule: $\delta Q = T dS$.

Si le système n'est pas décrit par une équation d'état $f(P, V, T) = 0$ il n'est pas systématiquement possible d'écrire « $\delta Q = T dS$ » sans analyse approfondie. C'est en particulier le cas d'un système siège de frottements internes.

► Pour s'entraîner: ex. 5

• Source de chaleur idéale ou thermostat

La température T_e d'un thermostat reste constante au cours du temps et, dans une transformation quelconque, sa variation d'entropie est donnée par $\Delta S_e = \frac{Q_e}{T_e}$ où ΔS_e est sa variation d'entropie et

Q_e l'énergie thermique reçue par le thermostat au cours de la transformation envisagée.

• Système en évolution adiabatique

L'entropie d'un système en évolution adiabatique ne peut que croître: $\Delta S = S_{\text{créée}}$.

$S_{\text{créée}}$ représente la création d'entropie due au caractère irréversible de l'évolution.

Pour une transformation irréversible: $S_{\text{créée}} > 0$ ou $\Delta S > 0$.

Pour une transformation réversible: $S_{\text{créée}} = 0$ soit $\Delta S = 0$.

• Système couplé avec un thermostat

Dans une transformation quelconque d'un système (S) couplé à une source de chaleur idéale de température T_e et une source de travail idéale, la variation d'entropie se met sous la forme:

$$\Delta S = S_{\text{échange}} + S_{\text{créée}}.$$

Le terme d'entropie d'échange est défini par $S_{\text{échange}} = \int \frac{\delta Q}{T_e}$.

L'intégrale est calculée le long du chemin réellement suivi par le système lors de son évolution.

$S_{\text{créée}}$ représente la création d'entropie due au caractère irréversible de l'évolution.

Pour une transformation irréversible, $S_{\text{créée}} > 0$.

Pour une transformation réversible, $S_{\text{créée}} = 0$ et $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T_e}$.

• Source couplé avec plusieurs thermostats

La relation précédente se généralise au cas d'un système en contact avec plusieurs thermostats de températures $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots, T_n$ qui cèdent au système des transferts thermiques $Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots, Q_n$. On peut écrire:

$$\Delta S = S_{\text{échange}} + S_{\text{créée}} \quad \text{avec} \quad S_{\text{échange}} = \sum_{i=1}^n \int \frac{\delta Q_i}{T_i}.$$

• Causes d'irréversibilité

On peut citer, entre autres:

- Les échanges thermiques: irréversibilité dues à l'inhomogénéité de la température;
- Les échanges de travail: irréversibilité due aux frottements.

Dans toutes ces transformations où l'échange de travail est associé à un phénomène irréversible, les systèmes thermodynamiques ne sont pas à l'équilibre thermodynamique interne pendant leur évolution.

► *Pour s'entraîner : ex. 2 à 7*

Interprétation statistique de l'entropie

• Entropie statistique

$S = k_B \ln \Omega$ où k_B est la constante de Boltzmann, $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ et Ω est le nombre de micro-états réalisant le macroétat étudié.

• Troisième principe de la thermodynamique

Principe de Nernst

L'entropie de tout système thermodynamique tend vers 0 quand sa température tend vers 0.

► *Pour s'entraîner : ex. 11*

Conseils et pièges à éviter

- Il faut se souvenir que l'entropie, comme l'énergie, est une fonction d'état. La variation d'entropie entre un état initial et un état final ne dépend pas du chemin entre ces deux états. Par exemple, pour un système constitué d'une quantité n de gaz parfait de rapport γ constant, la variation d'entropie a pour valeur :

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_{\text{final}}}{T_{\text{initial}}} - nR \ln \frac{P_{\text{final}}}{P_{\text{initial}}}$$

et ceci pour tout chemin, réversible ou non.

- Un système en évolution irréversible peut voir son entropie diminuer : il suffit que l'entropie créée (positive) soit compensée par une entropie échangée négative.
- Pour un système fluide régi par une équation d'état $f(P, V, T) = 0$, l'identité thermodynamique $dU = T dS - P dV$

est une relation mathématique entre les grandeurs d'état et non l'expression d'un bilan d'énergie. On l'utilise donc pour déterminer la variation de S entre deux états, **que la transformation considérée soit réversible ou non.**

- La relation $\delta Q = T dS$ pour une transformation infinitésimale suppose que le système est complètement décrit par une équation d'état $f(P, V, T) = 0$ (il faut donc que la pression et la température soient uniformes). Si, par exemple, le système est siège de frottements, son état dépend aussi de la vitesse relative de ses éléments, la relation ne s'applique pas.

1 Utilisation de tables thermodynamiques

A. Étude du dihydrogène

Les physiciens utilisent fréquemment des tables de données thermodynamiques (et des diagrammes entropiques ou enthalpiques ainsi que nous le verrons aux *chapitres* 5 et 6).

Ces tables sont construites à partir de mesures thermo-élastiques sur les gaz et les liquides. Celles-ci permettent l'établissement d'une équation d'état et le calcul de fonctions d'état telles que l'enthalpie et l'entropie.

Le *tableau* ci-dessous donne les valeurs de l'entropie molaire s du dihydrogène H_2 en $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$ pour différentes valeurs de température et de pression.

T (K) \ P (bars)	100	10	1
150	39,5	51,2	60,6
90	34,8	45,8	55,2

1 • Vérifier que le dihydrogène se comporte comme un gaz parfait monoatomique pour des valeurs de pression inférieures ou égales à 10 bars.

2 • On réalise la compression isotherme, pour $T = 150$ K, d'un kilogramme de dihydrogène de 10 bars à 100 bars. Quelle est la variation d'entropie correspondante ?

Qu'aurait-on trouvé en faisant l'hypothèse que le dihydrogène garde un comportement parfait pour ces valeurs de pression ?

Données : $R = 8,314 J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$; $\gamma = \frac{5}{3}$.

B. Étude de l'eau liquide

Le *tableau* ci-dessous donne les valeurs de l'entropie molaire s de l'eau liquide en $J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$ pour différents couples (T, P) . La valeur 0 est prise arbitrairement pour $T = 0$ °C.

T (°C) \ P (bars)	200	100	10
300	3,20	3,24	–
200	2,30	2,32	–
100	1,30	1,30	1,30

Commenter ce tableau et vérifier sa concordance avec le modèle des phases condensées donné dans le cours. On supposera la chaleur massique de l'eau constante et égale à $4,2 J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$.

Conseils

A. Quelle est l'expression de l'entropie d'un gaz parfait en variables (T, P) ? Comparer les valeurs de Δs obtenues à partir du tableau à celles que donne l'expression de l'entropie d'un gaz parfait pour des transformations isobares, puis pour des transformations isothermes.

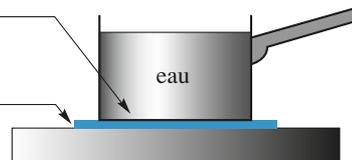
B. Que penser de l'influence de la pression ? Comment s'exprime ds pour une phase condensée ?

2 Chauffage d'une masse d'eau

On s'intéresse à une masse d'eau, m , de capacité calorifique massique constante, c . Elle est chauffée, dans une casserole, sur une plaque électrique de température constante T_p .

fond de la casserole :
bon conducteur
thermique

plaque
électrique
à T_p



Au cours de cette « expérience », l'eau passe de T_1 à T_2 . En faisant toutes les hypothèses qui paraissent raisonnables, modéliser l'évolution de l'eau et en déduire sa variation d'entropie et l'entropie créée.

Données : $c = 4,18 J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$; $m = 1$ kg ; $T_1 = 300$ K ; $T_2 = 350$ K ; $T_p = 1\ 000$ K.

Conseils

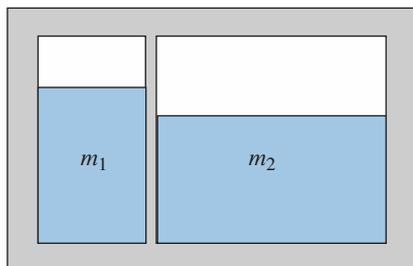
- Que penser de la pression du milieu extérieur ?
- Le fond de la casserole est bon conducteur thermique : que peut-on dire de sa température ?
- Le chauffage de l'eau est-il lent ou rapide ?
- La température de l'eau est-elle uniforme ? Peut-on considérer m comme constant ?

3 Création d'entropie et transfert thermique

Un récipient supposé adiabatique est séparé en deux compartiments contenant, l'un une masse m_1 d'eau et l'autre une masse m_2 d'eau. On suppose que l'eau est une phase condensée idéale de capacité thermique massique constante c .

Les températures initiales sont T_{1i} et T_{2i} avec $T_{1i} < T_{2i}$. La cloison qui sépare les deux masses d'eau étant faiblement diathermane, le transfert thermique entre les deux compartiments est lent et on peut supposer que les températures des deux compartiments sont homogènes à chaque instant ; ce sont deux fonctions des temps notées $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

On négligera la capacité thermique de la cloison diathermane.



1 • Quelle relation le premier principe impose-t-il entre $T_1(t)$ et $T_2(t)$? Le premier principe permet-il de prévoir le sens d'évolution et l'état final ?

2 • Exprimer l'entropie $S(t)$ du système isolé en fonction des températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$. En déduire le sens d'évolution et les températures finales. Commenter.

3 • Déterminer l'entropie créée pendant l'opération dans le cas particulier où $m_1 = m_2 = m$.

Conseils

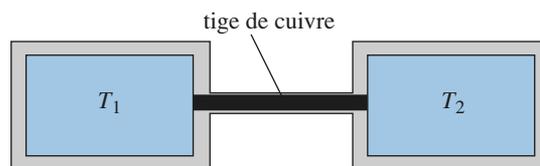
- L'entropie et l'énergie interne sont des fonctions d'état extensives.
- Quelle est l'expression de l'entropie pour une phase condensée idéale ?
- Comment évolue l'entropie d'un système isolé ?

4 Bilan d'entropie pour un conducteur thermique

Deux thermostats Θ_1 et Θ_2 de températures T_1 et T_2 ($T_1 > T_2$) sont reliés par une tige de cuivre, isolée sur ses faces latérales. Après un régime transitoire de quelques heures, le système atteint un régime permanent. La température d'un point quelconque de la tige ne dépend plus du temps.

Soit Q_1 et Q_2 les transferts thermiques de Θ_1 et de Θ_2 vers la tige pendant une durée donnée τ .

Déterminer l'entropie créée pendant cette durée τ .



Conseils

- Quelle relation relie Q_1 et Q_2 ?
- L'état de la tige est invariable. Que peut-on en déduire pour l'entropie de la tige ?
- Y a-t-il création d'entropie dans les thermostats ?
- Quelle est l'expression de l'entropie échangée par la tige ?

5 Bilan d'entropie pour un système avec frottements

Deux solides Σ_1 et Σ_2 , considérés comme des phases condensées idéales de capacités thermiques C_1 et C_2 sont en contact.

Σ_1 est immobile. Lorsqu'un opérateur exerce sur Σ_2 une force $\vec{F}_{op} = F_{op} \vec{e}_x$, Σ_2 peut glisser sur Σ_1 selon un mouvement de translation parallèle à l'axe horizontal Ox et Σ_1 exerce sur Σ_2 une force de frottement $\vec{F}_{frot} = F_{frot} \vec{e}_x$.

On admet pour la force de frottement le modèle classique des forces de frottement solide/solide :

- Si Σ_2 est en mouvement, \vec{F}_{frot} est opposée au mouvement et de norme constante égale à Φ .
- Si le système est immobile, F_{frot} est comprise entre $-\Phi$ et $+\Phi$.

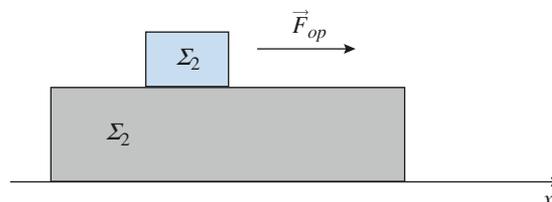
1 • Les variables d'état x et F_{frot} sont-elles reliées par une équation d'état de type $f(F_{frot}, x, T) = 0$?

2 • Entre deux états d'équilibre infiniment voisins :

- Écrire la relation entre les différentielles dU et dS pour le système constitué des deux solides.
- Écrire le premier principe et en déduire une expression de la variation infinitésimale d'entropie.

3 • On néglige les échanges thermiques entre le système constitué par les deux solides et l'extérieur.

Le système est initialement à l'équilibre thermique à la température T_A , puis Σ_2 est tiré (toujours dans le même sens) sur une distance ℓ et on attend que l'équilibre thermique se rétablisse à une température T_B . Déterminer l'entropie créée au cours de la transformation.



Conseils

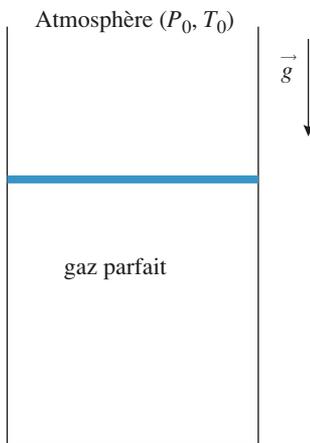
- L'énergie interne et l'entropie sont des variables extensives. Or, U et S sont connues pour chaque solide.
- Quel est le travail de l'opérateur lors d'un déplacement entre deux positions d'équilibre ? On pourra faire un bilan d'énergie mécanique.
- Peut-on résoudre la question 3 en intégrant l'expression obtenue à la question 2 ?

6 Compression et détente monothermes

Un cylindre aux parois athermanes contient n moles d'un gaz parfait dont le coefficient γ est constant. Il est fermé par un piston de masse m et de section S coulisant sans frottement, également athermane.

Dans l'état initial, le gaz, le piston et le cylindre sont à l'équilibre mécanique et thermique avec l'atmosphère, de pression P_0 et de température T_0 ; on note P_1 la pression dans le cylindre.

Dans tout cet exercice, on s'intéresse au système constitué par le cylindre, le piston et le gaz enfermé dans le cylindre.



1 • On pose un solide de masse M sur le piston, puis on laisse évoluer le système vers un nouvel état d'équilibre mécanique et thermique. La pression dans le cylindre est alors égale à P_2 .

Déterminer les échanges énergétiques entre l'atmosphère et le système, puis l'entropie créée au cours de l'opération.

2 • On enlève le solide de masse M et le gaz se détend, jusqu'à un nouvel état d'équilibre. Caractériser ce nouvel état d'équilibre et déterminer les échanges énergétiques et l'entropie créée au cours de l'opération. Conclure.

Conseils

- Pour chaque opération, quelle est la variation d'énergie interne du système ? Peut-on en déduire simplement l'échange thermique ?
- Pour chaque opération, quelle est la variation d'entropie du cylindre, du piston et du gaz ?

7 Compression et détente adiabatiques

Un cylindre vertical, de section $S = 100 \text{ cm}^2$ est rempli d'air considéré comme un gaz parfait de rapport γ constant.

Un piston de masse $m = 100 \text{ g}$ coulisse en faisant varier le volume du cylindre.

Le volume intérieur est divisé par une masse $m_0 = 0,10 \text{ kg}$ de laine d'acier (enchevêtrement serré de fils d'acier). La capacité thermique de l'acier est $c_0 = 0,44 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

À l'extérieur, l'atmosphère est à la pression constante $P_0 = 1,0 \text{ bar}$.

Dans l'état initial, l'air intérieur est à l'équilibre thermodynamique, sa température est $T_1 = 295 \text{ K}$, la pression est P_1 et il occupe un volume $V_1 = 10 \text{ litres}$. On pose alors un objet de masse $M = 9,9 \text{ kg}$ sur le piston. Celui-ci descend et se stabilise lorsque le gaz intérieur est à nouveau à l'équilibre thermodynamique ; la température est alors T_2 et la pression P_2 . On suppose que le piston reste toujours au dessus de la séparation.

On prendra $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1 • Calculer P_1 et P_2 .

2 • On suppose que :

- Les parois du cylindre sont adiabatiques.
- À l'équilibre, la laine d'acier est à la même température que l'air.
- Les frottements entre le piston et le cylindre sont négligés.

Discuter la pertinence de ces hypothèses simplificatrices. La première et la seconde sont-elles contradictoires ?

3 • Les hypothèses étant admises, déterminer, une fois l'équilibre atteint, la température T_2 et le volume V_2 occupé par l'air.

On posera $p = \frac{P_1}{(\gamma-1)} + m_0 c_0 \frac{T_1}{V_1}$ et on exprimera

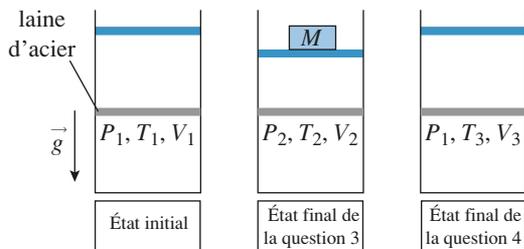
les résultats en fonction de T, V_1, P_1, P_2 et p .

4 • On enlève l'objet de masse M du piston et lorsque le nouvel équilibre thermodynamique est atteint, le volume et la température sont égaux à V_3 et T_3 .

a. Sans les calculer, comparer V_3 à V_1 et T_3 à T_1 .

b. Exprimer T_3 en fonction de T_1, p, P_1 et P_2 et calculer sa valeur. Vérifier le résultat de la question précédente.

c. Calculer l'entropie créée au cours des deux opérations. Conclure.



Conseils

- Rappelons qu'une paroi n'est jamais intrinsèquement adiabatique ou diathermane. Il faut se poser la question de la rapidité des échanges thermiques entre le gaz et les solides. Ces échanges sont d'autant plus rapides que la surface de contact est grande.
- Pour quel système faut-il faire un bilan d'énergie ? le gaz seul ou le système {gaz + laine d'acier + piston + surcharge} ? Doit-on faire un bilan sous forme infinitésimale « $dU = \delta Q + \delta W$ » ou sous la forme « $\Delta U = Q + W$ » ?
- Quelle est la dimension de p ?
- L'évolution est-elle réversible ? Peut-on utiliser la loi de LAPLACE ?
- Rappelons que l'entropie est une fonction extensive. Il suffit donc d'additionner les variations d'entropie des différentes composantes du système.

8 $S(U, V)$, fonction caractéristique

Soit un système constitué de dioxyde de carbone. Ce gaz est caractérisé par la fonction $S(U, V)$ donnée pour une quantité de matière $n = 1$ mole de gaz :

$$S(U, V) = S_0 + C_{V, m} \ln \left(\frac{U + \frac{a}{V}}{U_0 + \frac{a}{V_0}} \right) + R \ln \left(\frac{V - b}{V_0 - b} \right).$$

S_0, U_0 et V_0 sont respectivement les valeurs de l'entropie, de l'énergie interne et du volume de cette mole de gaz dans un état de référence arbitraire donné.

Données : $C_{V, m}$ est la capacité calorifique molaire à volume constant du dioxyde de carbone :

$$C_{V, m} = 28,50 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1};$$

a et b sont des constantes propres au dioxyde de carbone :

$$a = 0,37 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2} \text{ et } b = 4,30 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1};$$

R est la constante universelle : $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

1 • Donner deux expressions différentes de la différentielle, $dS(U, V)$, de l'entropie d'une mole de gaz.

En déduire, d'une part, l'expression de l'énergie interne, $U(T, V)$, d'une mole de gaz et, d'autre part, son équation d'état :

$$f(P, V, T) = 0.$$

2 • Deux moles de ce gaz subissent une détente de Joule – Gay-Lussac d'un volume initial $V = 5,00 \text{ dm}^3$ et d'une température initiale $T = 293,0 \text{ K}$ à un volume final $2V$.

a. Calculer les variations de température et d'entropie correspondantes.

b. Comparer les résultats obtenus à ceux de la détente de deux moles de gaz parfait de même capacité calorifique molaire à volume constant dans les mêmes conditions initiales.

Conseils

- 1) La fonction entropie associée à un système thermodynamique donné est-elle unique ? Peut-on alors identifier deux expressions différentes de $dS(U, V)$, membre à membre ? Comment obtenir ces deux expressions ?
- 2) Le système est constitué de deux moles de gaz : comment sont modifiées les expressions de $U(T, V)$ et $S(T, V)$?

9 Le gaz de photons

À l'intérieur d'une cavité vide dont les parois sont à l'équilibre thermique, il existe des ondes électromagnétiques dont l'intensité et la répartition des fréquences dépend de la température. À une onde électromagnétique on associe des particules (« grains d'énergie ») appelées photons et on considère que ceux-ci se comportent comme un gaz.

Des considérations théoriques amènent à poser l'expression de l'entropie, fonction du volume et de l'énergie :

$$S(V, U) = \frac{4}{3} (\sigma_0 V U^3)^{\frac{1}{4}} \text{ où } \sigma_0 \text{ est une constante}$$

universelle ; $\sigma_0 = 7,56 \cdot 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{K}^{-4}$.

1 • En déduire la relation entre l'énergie, le volume et la température, puis la relation entre pression et température.

2 • La cavité, de volume $V = 1 \text{ L}$ contient 1 mole de dihydrogène. Pour quelle température la pression de radiation est-elle égale à la pression exercée par les particules matérielles (on supposera que, pour les tempé-

ratures très élevées, les molécules de H_2 sont décomposées en protons et en électrons qui se comportent comme des gaz parfaits monoatomiques).

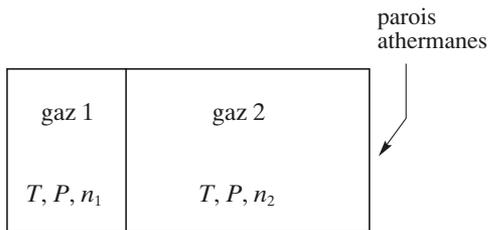
3 • Déterminer la capacité thermique à volume constant associée au rayonnement.

Conseils

- En écrivant l'identité thermodynamique, on constate que P et T peuvent être déduites des dérivées partielles de la fonction S de U et V .
- Quelle est la définition de C_V pour un fluide quelconque ?

10 Transfert de matière, irréversibilité

Un récipient, dont les parois sont athermanes, est séparé en deux compartiments par une paroi amovible; dans l'un se trouvent n_1 moles de gaz parfait occupant un volume V_1 et, dans l'autre, n_2 moles de gaz parfait occupant un volume V_2 . À l'instant initial, les deux gaz sont à l'équilibre sous la même pression P et à la même température T .



On ôte la paroi mobile et on attend l'établissement d'un nouvel équilibre thermodynamique.

- 1 • Déterminer l'état final de chacun des deux gaz.
- 2 • Déterminer l'entropie créée au cours de l'évolution par le système constitué des deux gaz.
- 3 • On pose $n_2 = xn_1$; étudier et tracer la fonction $\mathcal{S}_{\text{créée}}(x)$ pour x tendant vers zéro. Conclure quant à la réversibilité éventuelle de l'évolution.

Conseils

- 1) Réaliser un bilan énergétique pour l'ensemble des deux gaz et utiliser l'extensivité de l'énergie interne.
- 2) Réaliser un bilan entropique et utiliser l'extensivité de l'entropie.
- 3) Discuter de la pente à l'origine de la fonction $\mathcal{S}_{\text{créée}}(x)$.

11 système à deux niveaux

Soit un système de volume constant constitué d'un grand nombre N de particules en équilibre à la température T et dont chacune peut avoir deux valeurs d'énergie E_1 ou E_2 , avec $E_2 > E_1$ (système «à deux niveaux»).

Soit n_1 le nombre de particules d'énergie E_1 et n_2 le nombre de particules d'énergie E_2 .

On suppose que la répartition sur les niveaux d'énergie suit la loi statistique de Boltzmann :

$$\frac{n_2}{n_1} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{k_B T}\right).$$

- 1 • Exprimer la différentielle de l'énergie interne du système en fonction de dn_1 et $\Delta E = E_2 - E_1$.
- 2 • Exprimer la différentielle de l'entropie du système en fonction de T , ΔE et dn_1 . On utilisera la formule de Stirling $\ln(N!) = N \ln(N)$ valable pour N grand.
- 3 • Montrer alors que l'on retrouve l'identité thermodynamique.

Conseils

- 1) L'énergie interne est une grandeur extensive.
- 2) Comment s'exprime l'entropie statistique ? Combien y a-t-il de manières de réaliser l'état : $\{n_1$ particules d'énergie E_1, n_2 particules d'énergie $E_2\}$?

1 Utilisation de tables thermodynamiques

A • 1 L'entropie massique d'un gaz parfait s'exprime par :

$$s(T, P) = s(T_0, P_0) + \frac{1}{M} R \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \right) ;$$

pour un gaz parfait monoatomique $\gamma = \frac{5}{3}$, et pour le dihydrogène $M = 2 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Ainsi, en $\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, on obtient :

$$\Delta s = 4,157 \left(2,5 \ln \left(\frac{T}{T_0} \right) - \ln \left(\frac{P}{P_0} \right) \right) .$$

• On calcule la variation d'entropie correspondante pour un refroidissement isobare à la pression $P = 10 \text{ bars}$, de $T = 150 \text{ K}$ à $T = 90 \text{ K}$:

$$\Delta s = 4,157 \left(2,5 \ln \left(\frac{90}{150} \right) \right) = -5,3 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'application numérique réalisée avec le tableau donne $\Delta s = -5,4 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. L'accord est donc très bon.

• On calcule maintenant la variation d'entropie pour une compression isotherme, à $T = 150 \text{ K}$, de 1 à 10 bars :

$$\Delta s = -4,157 \left(\ln \left(\frac{10}{1} \right) \right) = -9,6 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'application numérique, réalisée avec les données du tableau, donne $\Delta s = -9,4 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; l'accord est encore bon.

2 • La lecture sur le tableau conduit à :

$$\Delta s = -11,7 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

En appliquant la relation des gaz parfaits :

$$\Delta s = -4,157 \ln \left(\frac{100}{10} \right) = -9,6 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

Le comportement du fluide n'est plus parfait.

Remarques

• Il faut noter que pour une pression de 100 bars, à ces valeurs de température, le dihydrogène est dans un état dit fluide (ou supercritique), sur lequel on reviendra dans le chapitre 5.

• Il est conseillé de vérifier la cohérence du signe d'une variation d'entropie : l'augmentation de l'ordre au cours de la transformation doit correspondre à une diminution de l'entropie (cf. la dernière partie du résumé de cours et les derniers exercices du chapitre).

Par exemple, ici, une compression isotherme – c'est-à-dire à agitation thermique constante – correspond à une diminution du volume, l'ordre du système augmente : Δs est effectivement négatif.

B • L'analyse du tableau montre que même pour des températures et des pressions élevées, l'influence de la pression est négligeable : la compression isotherme de 100 à 200 bars, à 300 °C, d'un gramme d'eau liquide correspond à une variation d'entropie de $-0,04 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Il reste à vérifier la relation $\Delta s = mc \ln \left(\frac{T_{\text{final}}}{T_{\text{initial}}} \right)$ qui découle

de l'identité thermodynamique pour une phase condensée : $dU = Tds$ et $dU = mcdT$.

Pour un refroidissement isobare de 300 °C à 200 °C, soit de 573 K à 473 K, le tableau donne :

$$\Delta s = -0,9 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ;$$

le calcul donne :

$$\Delta s = -0,8 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'accord est bon.

Pour un refroidissement isobare de 200 °C à 100 °C, soit de 473 K à 373 K, le tableau donne :

$$\Delta s = -1,0 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} ;$$

le calcul donne :

$$\Delta s = -1,0 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} .$$

L'accord est excellent.

Remarque : L'accord est d'autant meilleur que la température est proche de 100 °C, car la capacité thermique massique c est alors plus proche de la valeur $4,2 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (c n'est pas constante sur les intervalles de température étudiés).

2 Chauffage d'une masse d'eau

Afin de modéliser au mieux la situation, on fait les hypothèses suivantes relatives à l'eau, la casserole, la plaque et le milieu extérieur :

H₁ : L'ensemble {eau + casserole + plaque} subit une *transformation monobare* sous la pression atmosphérique.

H₂ : On suppose que la casserole est adaptée à ce type d'emploi (fond épais) et qu'elle repose correctement sur la plaque : dans ces conditions, on peut considérer que l'ensemble {casserole + plaque} constitue un thermostat à la température T_p .

H₃ : On suppose que l'intensité du flux thermique du thermostat vers l'eau est important (bon contact thermique) : dans ces conditions, l'échauffement de l'eau est « rapide », et les échanges thermiques vers l'extérieur sont négligeables. L'ensemble {eau + casserole + plaque} est isolé thermiquement de l'extérieur.

H₄ : On suppose que les températures T_1 et T_2 de l'eau correspondent à des températures uniformes de cette eau au début et à la fin de « l'expérience » ; les mouvements de convection dans l'eau permettent de justifier cette hypothèse.

H₅: On ne fait aucune hypothèse sur l'état de l'eau entre le début et la fin de « l'expérience ».

H₆: Le chauffage de l'eau étant rapide entre 27 °C et 77 °C (températures suffisamment éloignées de l'ébullition de l'eau), on néglige l'évaporation de l'eau et $m = \text{constante}$.

La modélisation est donc la suivante :

On est en présence de l'échauffement monobare (H₁) d'une masse d'eau (de T_1 à T_2), en contact avec un thermostat à température T_p (H₂), l'ensemble {eau + thermostat} étant isolé thermiquement de l'extérieur (H₃). La température de l'eau est bien définie au début et à la fin « l'expérience » (H₄), mais inconnue dans les états intermédiaires (H₅). L'évaporation étant négligeable (H₆), le système étudié est fermé.

L'état de l'eau étant connu au début et à la fin de l'expérience,

$$\text{on a } \Delta S = m c \ln \frac{T_2}{T_1} .$$

Le transfert thermique $m c (T_2 - T_1)$, fourni à l'eau sous la température constante T_p , donne une entropie d'échange $\mathcal{S}_{\text{échange}}$ égale à :

$$\mathcal{S}_{\text{échange}} = \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_p} .$$

On en déduit l'entropie créée :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = \Delta S - \mathcal{S}_{\text{échange}} = m c \ln \frac{T_2}{T_1} - \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_p} .$$

$$\text{A.N.: } \Delta S = m c \ln \frac{T_2}{T_1} = 0,64 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .$$

$$\mathcal{S}_{\text{échange}} = \frac{m c (T_2 - T_1)}{T_p} = 0,21 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .$$

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = \Delta S - \mathcal{S}_{\text{échange}} = 0,43 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} .$$

Cette quantité est effectivement positive.

3 Création d'entropie et transfert thermique

1 • Soit le système isolé constitué par les deux masses d'eau. Son énergie interne se conserve, d'où :

$$m_1 T_1(t) + m_2 T_2(t) = m_1 T_{1i} + m_2 T_{2i} .$$

2 • L'entropie, fonction d'état, ne dépend que de la température pour les phases condensées.

Pour une phase condensée, le volume étant constant, l'identité thermodynamique se réduit à :

$$dU = T dS \text{ avec } dU = m c dT .$$

On en déduit $dS = m c \frac{dT}{T}$, d'où : $S = m c \ln \frac{T}{T_0} + S_0$

si S_0 est l'entropie pour $T = T_0$.

L'entropie étant une fonction extensive : $S_{\text{système}} = S_1 + S_2$ soit :

$$S(t) = m_1 c \ln \frac{T_1(t)}{T_{1i}} + m_2 c \ln \frac{T_2(t)}{T_{2i}} + S(0) .$$

L'entropie de ce système isolé ne peut qu'augmenter, soit

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 , \text{ l'égalité correspondant à l'état d'équilibre final.}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{m_1 c}{T_1(t)} \frac{dT_1}{dt} + \frac{m_2 c}{T_2(t)} \frac{dT_2}{dt}$$

La relation imposée par la conservation de l'énergie se

$$\text{traduit par : } m_1 \frac{dT_1}{dt} = -m_2 \frac{dT_2}{dt} , \text{ d'où :}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{m_1 c}{T_1(t)} \frac{dT_1}{dt} \left(1 - \frac{T_1(t)}{T_2(t)} \right) \geq 0 .$$

T_{1i} étant inférieur à T_{2i} , cette condition se traduit par :

$$\frac{dT_1}{dt} > 0 \text{ et donc } \frac{dT_2}{dt} < 0 .$$

Le système cesse d'évoluer lorsque l'état d'équilibre caractérisé par $T_1 = T_2$ est atteint.

Cette température finale est donnée par :

$$T_f = \frac{m_1 T_{1i} + m_2 T_{2i}}{m_1 + m_2} .$$

On aurait obtenu directement ce résultat en considérant comme évident que le système évolue vers l'équilibre thermique. Cette loi d'évolution vers l'équilibre thermique peut être vue comme une conséquence du second principe.

3 • Il suffit de reprendre l'expression de l'entropie du système :

Comme l'entropie échangée est nulle :

$$S_{\text{créée}} = \Delta S = m_1 c \ln \frac{T_f}{T_{1i}} + m_2 c \ln \frac{T_f}{T_{2i}} .$$

$$\text{Si } m_1 = m_2 = m , \text{ alors } T_f = \frac{1}{2} (T_{1i} + T_{2i})$$

$$\text{et } S_{\text{créée}} = m c \ln \frac{(T_{1i} + T_{2i})^2}{4 T_{1i} T_{2i}} .$$

Comme $(T_{1i} + T_{2i})^2 - 4 T_{1i} T_{2i} = (T_{1i} - T_{2i})^2 > 0$, on vérifie que $S_{\text{créée}}$ est toujours positive.

4 Bilan d'entropie pour un conducteur thermique

En régime permanent, l'énergie interne du cuivre est constante. Le travail étant nul on a : $Q_1 + Q_2 = 0$.

Effectuons un bilan d'entropie pour le système {tige} .

• Le régime étant permanent, l'état de la tige est invariable et donc $\Delta S = 0$.

$$\bullet S_{\text{échange}} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = Q_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2} .$$

• ΔS étant nul, l'entropie créée dans la tige est :

$$S_{\text{créée}} = -S_{\text{échange}} \text{ soit : } S_{\text{créée}} = Q_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1 T_2} .$$

Comme il n'y a pas de création d'entropie dans le thermostat (qui est toujours en équilibre interne) l'entropie créée se limite à l'entropie créée dans la tige.

5 Bilan d'entropie pour un système avec frottements

1 • La force de frottement est indépendante de la position de S_2 mais dépend de la vitesse et de la force exercée par l'opérateur. Il n'existe donc pas d'équation d'état reliant x et F_{frot} .

2 • Dans un état d'équilibre, les deux températures sont égales : $T_1 = T_2 = T$.

• Pour chaque solide, phase condensée idéale, l'identité thermodynamique s'écrit :

$$dU_1 = T dS_1 \text{ et } dU_2 = T dS_2 .$$

U et S étant des fonctions d'état extensives, nous pouvons écrire :

$$dU = dU_1 + dU_2 = T(dS_1 + dS_2) \text{ d'où : } dU = T dS .$$

• Considérons un déplacement où x croît uniformément d'une position d'équilibre x_1 à une position d'équilibre x_2 .

Les vitesses en x_1 et en x_2 étant nulles, le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre x_1 et x_2 s'écrit :

$$\Delta \mathcal{E}_K = 0 = W_{\text{op}} + W_{\text{frot}} = W_{\text{op}} - \Phi(x_2 - x_1)$$

$$\text{d'où : } W_{\text{op}} = \Phi(x_2 - x_1) .$$

Si le déplacement s'effectue avec x décroissant uniformément, on obtient : $W_{\text{op}} = \Phi(x_1 - x_2)$.

Pour un déplacement infinitésimal entre deux positions d'équilibre : $\delta W_{\text{op}} = \Phi |dx|$ (toujours positif)

D'après le premier principe appliqué au système :

$$dU = \delta W_{\text{op}} + \delta Q = \Phi |dx| + \delta Q .$$

En comparant les deux expressions de dU , on obtient :

$$T dS = \delta Q + \Phi |dx| .$$

3 • On reprend le même raisonnement, cette fois entre deux états non infiniment voisins. Il n'est pas question d'intégrer la relation précédente car les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibre.

Le déplacement s'effectuant toujours dans le même sens :

$$W_{\text{op}} = \Phi \ell$$

Le bilan d'énergie donne :

$$\Delta U = (C_1 + C_2)(T_B - T_A) = Q + W_{\text{op}} = \Phi \ell$$

$$\text{d'où } T_B = T_A + \frac{\Phi \ell}{C_1 + C_2} .$$

Connaissant l'expression de l'entropie d'une phase condensée, la variation d'entropie est :

$$\Delta S = (C_1 + C_2) \ln \frac{T_B}{T_A} .$$

Comme l'entropie échangée est nulle :

$$\Delta S = S_{\text{créée}} = (C_1 + C_2) \ln \left(1 + \frac{\Phi \ell}{(C_1 + C_2)T_A} \right)$$

$S_{\text{créée}}$ est bien entendu positive pour cette transformation irréversible.

6 Compression et détente monothermes

1 • Pendant toute la transformation le système reçoit du travail des forces de pesanteur et des forces dues à la pression atmosphérique. Ces forces sont équivalentes à

une pression effective $\frac{(M+m)g}{S} + P_0$ égale à P_2 .

On en déduit : $W = P_2(V_1 - V_2)$ (W est bien positif lors de la compression).

En utilisant l'équation d'état : $P_2 V_2 = n R T_0 = P_1 V_1$,

$$\text{on obtient : } W = n R T_0 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) .$$

L'énergie interne d'un gaz parfait ou d'une phase condensée ne dépendant que de la température, l'énergie interne du système a une variation nulle entre l'état initial et l'état final.

$$\Delta U = W + Q = 0 , \text{ soit : } Q = -n R T_0 \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right)$$

L'entropie d'une phase condensée ne dépend que de la température, donc ΔS est nulle pour le cylindre et le piston.

Il reste la variation d'entropie du gaz :

$$\Delta S = -n R \ln \frac{P_2}{P_1} \text{ (voir les expressions de l'entropie$$

d'un gaz parfait).

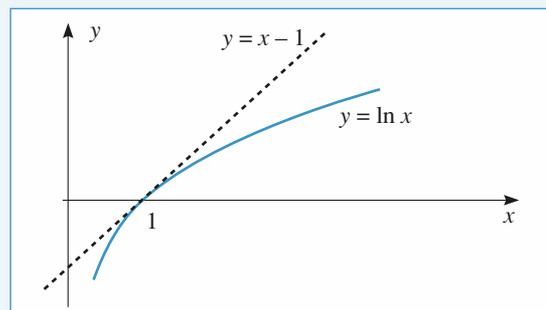
L'entropie échangée avec l'atmosphère considérée comme un thermostat de température T_0 est :

$$S_{\text{échange}} = \frac{Q}{T_0} , \text{ soit } S_{\text{échange}} = -n R \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 \right) .$$

On en déduit, par différence :

$$S_{\text{créée}} = n R \left(\frac{P_2}{P_1} - 1 - \ln \frac{P_2}{P_1} \right) .$$

Comme $\ln(x) < x - 1$ pour tout x (voir document ci-dessous), on vérifie que $S_{\text{créée}} > 0$.



2 • L'état final de la détente est identique à l'état initial de la compression : $P = P_1$ et $T = T_0$.

Le raisonnement est identique, avec cette fois

$P_{\text{effective}} = P_1$ et un travail négatif.

$$W = -n R T_0 \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right); \quad Q = n R T_0 \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\Delta S = n R \ln \frac{P_1}{P_2}; \quad S_{\text{échange}} = n R \left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right)$$

$$\text{et } S_{\text{créée}} = n R \left(\frac{P_1}{P_2} - 1 - \ln \frac{P_1}{P_2}\right),$$

qui est encore positive.

Les transformations ne sont pas réversibles. Bien que l'état final de la détente soit l'état initial de la compression, les deux transformations ne sont pas inverses car les échanges de chaleur et de travail ne sont pas opposés.

On remarque que le travail total est positif et le transfert thermique total négatif.

7 Compression et détente adiabatiques

1 • On écrit l'équilibre mécanique du piston dans l'état initial et du système {piston + surcharge} dans l'état final.
État initial : $-P_0 S - mg + P_1 S = 0$

$$\text{d'où : } P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}; \quad P_1 = 1,001 \text{ bar .}$$

$$\text{État final : } -P_0 S - (m + M)g + P_2 S = 0$$

$$\text{d'où : } P_2 = P_0 + \frac{(m + M)g}{S}; \quad P_2 = 1,1 \text{ bar .}$$

2 • On considère classiquement qu'une évolution est adiabatique si sa durée est suffisamment faible pour pouvoir négliger les échanges thermiques. Si le matériau constituant le cylindre est suffisamment isolant, il n'est pas déraisonnable de négliger le transfert thermique du gaz vers le cylindre pendant la transformation.

- En revanche, la laine d'acier, matériau très divisé, offre une grande surface de contact avec le gaz et, de plus, est constituée d'un matériau bon conducteur de la chaleur. On peut alors, pour simplifier, supposer que cet objet est, à la fin de la transformation, à l'équilibre thermique avec le gaz.

- On peut toutefois remarquer que la mise à l'équilibre entre le gaz qui est resté au dessus de la laine d'acier et celui du dessous risque d'être assez lente.

- Le passage du gaz à travers la laine d'acier se traduit par un amortissement important : le piston n'oscille pratiquement pas. La force de frottement cylindre/piston étant très petite devant la force exercée par l'extérieur sur le piston (de l'ordre de 10^3 N), il est tout à fait légitime de négliger son travail.

3 • On effectue un bilan d'énergie entre l'état initial et l'état final pour le système {gaz + laine d'acier + piston + surcharge}. En effet :

- Les états intermédiaires ne sont pas des états d'équilibre, ce qui exclut un bilan infinitésimal de la forme « $dU = dQ + \delta W$ ».

- Le gaz seul subit des échanges thermiques (inconnus *a priori*) avec la laine d'acier.

La variation d'énergie interne est : $\Delta U = W + Q$ avec, pour ce système :

- $\Delta U = \Delta U_{\text{gaz}} + \Delta U_{\text{laine d'acier}}$

$$= \frac{n R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) + m_0 c_0 (T_2 - T_1) .$$

(le piston ne recevant aucun échange thermique, son énergie interne est constante)

- $Q = 0$ (Par hypothèse)

- $W = W(\text{poids}) + W(\text{atmosphère}) = (M + m)g \frac{V_1 - V_2}{S} + P_0(V_1 - V_2) = P_2(V_1 - V_2)$

On peut aussi écrire que les forces extérieures se ramènent à la pression effective P_2 , d'où le résultat.

On en déduit, en remarquant que

$$n R = \frac{P_1 V_1}{T_1} = P_2 \frac{V_2}{T_2} :$$

$$\left(\frac{P_1 V_1}{(\gamma - 1)} + m_0 c_0 T_1\right) \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_2 V_1 - P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

soit :

$$p \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) = P_2 - P_1 \frac{T_2}{T_1} \quad \text{avec } p = 8,99 \text{ bar .}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{p + P_2}{p + P_1}; \quad \text{A.N. : } T_2 = 298 \text{ K .}$$

$$\text{On en déduit } V_2 = V_1 \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \frac{P_1 V_1}{P_2} \frac{p + P_2}{p + P_1};$$

$$\text{A.N. : } V_2 = 9,2 \text{ L .}$$

4 • a. L'évolution du système {gaz + laine d'acier} étant adiabatique et irréversible, son entropie doit augmenter. Or, on revient à la pression initiale et, à pression constante, l'entropie est une fonction croissante de la température. On en déduit :

$$T_3 > T_1 \Rightarrow V_3 > V_1 .$$

b. Le raisonnement est identique à celui de la question 3, à ceci près que la pression effective est maintenant P_1 :

$$\Delta U = \left(\frac{n R}{\gamma - 1} + m_0 c_0\right) (T_3 - T_2) = W = P_1 (V_2 - V_3) .$$

Avec les mêmes notations et en se souvenant que

$$P_1 = P_3 :$$

$$p \left(\frac{T_3}{T_1} - \frac{T_2}{T_1}\right) = P_1 \frac{V_2}{V_1} - P_1 \frac{T_3}{T_1} =$$

$$P_1 \left(\frac{P_1}{P_2} \frac{T_2}{T_1} - \frac{T_3}{T_1}\right)$$

$$\left(\frac{P_1 V_1}{(\gamma-1)} + m_0 c_0 T_1\right) \left(\frac{T_3}{T_2} - 1\right) =$$

$$P_1 V_2 - P_1 V_3 = P_1 V_2 - P_1 V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{p + \frac{P_1^2}{P_2}}{p + P_1} = \frac{\left(p + \frac{P_1^2}{P_2}\right)(p + P_2)}{(p + P_1)^2}.$$

A.N.: $T_3 = 295,2 \text{ K}$.

Étudions les variations de la fonction :

$$f(P_2) = \left(p + \frac{P_1^2}{P_2}\right)(p + P_2).$$

f est extrémale lorsque s'annule sa dérivée, soit pour $P_2 = P_1$.

Comme $f \rightarrow \infty$ pour $P_1 \rightarrow \infty$ et pour $P_2 \rightarrow \infty$, cet extremum est un minimum.

On en déduit que T_3 est minimale et égale à T_1 si $P_2 = P_1$ (c'est-à-dire si rien ne se passe !)

Dans tous les autres cas, $T_3 > T_1$, ce qui est conforme au résultat de la question 4 a.

On remarque que, avec les valeurs proposées, l'écart de température est faible. La variation relative de pression est, ici, suffisamment faible pour que l'évolution soit proche de la réversibilité. Pour $P_2 = 2 \text{ bars}$, on aurait trouvé $T_3 = 308 \text{ K}$.

c. Considérons le système {gaz + laine d'acier}. Ce système n'ayant reçu aucun transfert thermique de l'extérieur (bien entendu, les transferts internes ne sont pas pris en compte !), on peut écrire :

$$\Delta S = S_{\text{créée}}.$$

Comme l'entropie est une fonction extensive :

$$\Delta S = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{laine d'acier}}.$$

La pression initiale et la pression finale étant égales, et en utilisant les expressions de l'entropie pour un gaz parfait et pour une phase condensée (voir les rappels en début de chapitre) :

$$S_{\text{créée}} = \frac{n R \gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_3}{T_1} + m_0 c_0 \ln \frac{T_3}{T_1}$$

$$= \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} \frac{\gamma}{\gamma - 1} + m_0 c_0\right) \ln \frac{T_3}{T_1}.$$

A.N.: $S_{\text{créée}} = 0,028 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

Remarquons que si $P_2 = 2 \text{ bar}$, on obtient $S_{\text{créée}} = 1,49 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$: L'entropie créée est bien plus importante, car la transformation est plus éloignée du cas limite de la réversibilité.

8 $S(U, V)$, fonction caractéristique

1 • En différenciant $S(U, V)$:

$$dS = C_{V,m} \frac{d\left(U + \frac{a}{V}\right)}{U + \frac{a}{V}} + R \frac{dV}{V - b}$$

$$= C_{V,m} \frac{dU}{U + \frac{a}{V}} + dV \left(\frac{R}{V - b} - \frac{a C_{V,m}}{UV^2 + aV} \right).$$

$$\text{D'autre part, } dS = \frac{dU}{T} + P \frac{dV}{T}.$$

En identifiant ces deux expressions, on obtient :

$$\frac{1}{T} = C_{V,m} \frac{1}{U + \frac{a}{V}} \quad \text{et} \quad \frac{P}{T} = \frac{R}{V - b} - \frac{a C_{V,m}}{UV^2 + aV}.$$

La première expression donne :

$$U(T, V) = C_{V,m} T - \frac{a}{V} \quad (1)$$

(à une constante près).

L'élimination de U et $C_{V,m}$ des deux équations permet d'obtenir l'équation d'état du gaz : $\frac{P}{T} = \frac{R}{V - b} - \frac{a}{TV^2}$,

donc l'équation de Van der Waals pour une mole de gaz :

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT. \quad (2)$$

2 • a. La détente de Joule – Gay-Lussac se fait à énergie interne constante ce qui permet de calculer la variation de température du gaz.

En utilisant l'extensivité de U et V :

$$\frac{U(V, T)}{n} = C_{V,m} T - \frac{an}{V} \quad (3),$$

soit : avec $\Delta U = 0$,

$$nC_{V,m} \Delta T = n^2 a \left(\frac{1}{2V} - \frac{1}{V}\right), \text{ d'où } \Delta T = -\frac{na}{2VC_{V,m}}.$$

A.N.: $\Delta T = -2,6 \text{ K}$.

On peut, de la même manière, écrire l'entropie :

$$\frac{S(U, V)}{n} = \frac{S_0}{n} + C_{V,m} \ln \left(\frac{U + \frac{an}{V}}{U_0 + \frac{an}{V_0}} \right) + R \ln \left(\frac{\frac{V}{n} - b}{\frac{V_0}{n} - b} \right).$$

En utilisant (3) :

$$\Delta S = 2 C_{V,m} \ln \left(\frac{T + \Delta T}{T} \right) + 2 R \ln \left(\frac{V - b}{\frac{V}{2} - b} \right).$$

A.N.: $\Delta S = 11,16 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

b. Pour le gaz parfait :

$$\Delta T_{G,P} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta S_{G,P} = 2 R \ln 2 = 11,53 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} > \Delta S.$$

Les deux variations d'entropie sont positives conformément au deuxième principe, les systèmes étant thermiquement isolés durant leurs évolutions respectives.

Remarques : La fonction $S(U, V)$ introduite ici est caractéristique du fluide étudié ; elle contient en effet toute l'information disponible sur le système puisqu'elle permet de trouver

l'expression de l'énergie interne et l'équation d'état du gaz étudié. Ce résultat est généralisable à un fluide quelconque pour lequel $S(U, V)$ est une fonction caractéristique. Le lecteur vérifiera, par exemple, en utilisant la même méthode que :

$$S(U, V) = S_0 + C_{V,m} \ln \left(\frac{U}{U_0} \right) + R \ln \left(\frac{V}{V_0} \right)$$

est une fonction caractéristique du gaz parfait (pour une mole).

9 Le gaz de photons

1 • L'identité thermodynamique peut se mettre sous la forme :

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV.$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left(\frac{\delta S}{\delta U} \right)_V = \frac{1}{T} \text{ et } \left(\frac{\delta S}{\delta V} \right)_U = \frac{P}{T}.$$

$$\text{On en déduit : } \frac{1}{T} = \frac{4}{3} (\sigma_0 V)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4} U^{-\frac{1}{4}}$$

$$\text{d'où : } U = \sigma_0 V T^4$$

$$\frac{P}{T} = \frac{4}{3} (\sigma_0 U^3)^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} V^{-\frac{3}{4}}$$

$$\text{d'où : } P = \frac{1}{3} T \left(\frac{\sigma_0 U^3}{V^3} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\text{ou encore } P = \frac{1}{3} \frac{U}{V} = \frac{\sigma_0 T^4}{3}.$$

2 • À la température de 300 K : $P = 2,0 \cdot 10^{-6}$ Pa . La pression due au rayonnement est alors en général négligeable. Elle va devenir non négligeable à des températures telles que les molécules sont totalement dissociées ; 1 mole de H_2 donne 2 moles de protons et 2 moles d'électrons, soit 4 moles de gaz monoatomiques, supposé parfaits.

$$P_{\text{particules}} = \frac{4 n R T}{V} = P_{\text{rad}} = \frac{\sigma_0 T^4}{3}, \text{ ce qui est atteint}$$

$$\text{pour } T = \left(\frac{12 n R}{\sigma_0 V} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

A.N. : $T = 5,1 \cdot 10^6$ K . Pour comparer, la température au centre du soleil est de l'ordre de 10^7 K .

3 • Par définition : $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$ avec ici $U = \sigma_0 V T^4$.

$$\text{On en déduit : } C_V = 4 \sigma_0 V T^3.$$

10 Transfert de matière, irréversibilité

1 • Les parois du récipient étant athermanes (pas de transfert thermique, donc $Q = 0$) et indéformables (pas de transfert mécanique, donc $W = 0$), le mélange se fait de manière isoénergétique, soit :

$$\Delta U = 0.$$

Or, $U = U_{\text{gaz 1}} + U_{\text{gaz 2}}$ et :

$$0 = n_1 R \frac{1}{\gamma_1 - 1} (T_{\text{final}} - T) + n_2 R \frac{1}{\gamma_2 - 1} (T_{\text{final}} - T),$$

la température finale est égale à la température initiale.

Le volume final est $V_1 + V_2$ pour chaque gaz ; dans l'état final, les pressions partielles sont données par l'équation d'état :

$$P_1 = n_1 R T \frac{1}{V_1 + V_2} \text{ et } P_2 = n_2 R T \frac{1}{V_1 + V_2}.$$

La pression finale est :

$$P_f = P_1 + P_2 = \frac{1}{V_1 + V_2} (n_1 R T + n_2 R T).$$

Or, $n_1 R T = P V_1$ et $n_2 R T = P V_2$.

D'où : $P_f = P$.

2 • L'entropie d'échange du système constitué des deux gaz est nulle puisque l'ensemble est thermiquement isolé ; ainsi :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = \Delta S = \Delta S_{\text{gaz 1}} + \Delta S_{\text{gaz 2}}.$$

On calcule, par exemple, $\Delta S_{\text{gaz 1}}$:

$$\begin{aligned} \Delta S_{\text{gaz 1}} &= n_1 R \left[\frac{1}{\gamma_1 - 1} \ln \left(\frac{T_{\text{final}}}{T_{\text{initial}}} \right) + \ln \left(\frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}} \right) \right], \\ &= n_1 R \ln \left(\frac{V_1 + V_2}{V_1} \right), \end{aligned}$$

soit en utilisant les équations d'état :

$$\frac{V_1 + V_2}{V_1} = \frac{n_1 + n_2}{n_1},$$

cela donne :

$$\Delta S_{\text{gaz 1}} = n_1 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_1}.$$

En procédant de même pour $\Delta S_{\text{gaz 2}}$, on obtient finalement :

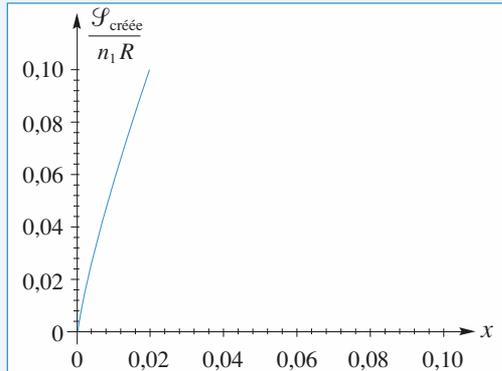
$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = n_1 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_1} + n_2 R \ln \frac{n_1 + n_2}{n_2}.$$

On remarque que cette quantité est positive conformément au deuxième principe.

3 • Avec la variable x , l'expression précédente devient :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = n_1 R \left[\ln(1+x) + x \ln \left(\frac{1+x}{x} \right) \right].$$

On trace la fonction $\frac{\mathcal{S}_{\text{créée}}}{n_1 R}$ pour des valeurs de x proches de zéro :



La tangente à l'origine de la courbe est verticale ce qui signifie que $\mathcal{S}_{\text{créée}}$ est, en zéro, un infiniment petit d'ordre inférieur à 1 : le mélange de deux gaz de natures différentes est donc foncièrement irréversible, même si l'un des deux est en très petite quantité par rapport à l'autre.

Il est donc impossible de modéliser cette transformation par une évolution réversible.

Pour bien réaliser la signification physique de ce résultat, on peut imaginer le mélange de deux gaz dont l'un est coloré (méthane et chlore par exemple).

Remarques : Lorsque x tend vers zéro, un équivalent de l'expression donnant $\mathcal{S}_{\text{créée}}$ est :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = -n_1 R x \ln(x);$$

cette quantité tend vers zéro par valeurs positives, mais moins vite que x puisque $-\ln(x)$ tend vers l'infini.

11 Système à deux niveaux

1 • L'énergie interne est une grandeur extensive et l'ensemble des particules d'énergie E_i a une énergie totale $n_i E_i$, donc :

$$U = n_1 E_1 + n_2 E_2 .$$

Soit $dU = E_1 dn_1 + E_2 dn_2$ où dU représente la variation d'énergie interne qu'accompagne la transition de dn_1 particules du niveau E_1 au niveau E_2 .

Bien sûr, puisque N est constant :

$$dn_1 = -dn_2 \text{ et } dU = -(E_2 - E_1)dn_1 = -\Delta E dn_1 .$$

2 • L'entropie statistique est donnée par :

$$S = k_B \ln \Omega ,$$

où Ω est le nombre de complexions du système. Or, pour réaliser le macroétat :

$$\{(n_1, E_1); (N - n_1, E_2)\},$$

il y a $\binom{N}{n_1}$ possibilités, soit $\Omega = \binom{N}{n_1}$.

Remarque : Ceci suppose que les particules étudiées soient discernables.

$$\text{Soit : } S = k_B \ln \binom{N}{n_1} = k_B \ln \frac{N!}{(N - n_1)! n_1!} ,$$

d'où en utilisant la relation de Stirling :

$$S = k_B [N \ln N - n_1 \ln n_1 - (N - n_1) \ln (N - n_1)] ,$$

et en différentiant :

$$dS = k_B [-dn_1 - dn_1 (\ln n_1) + dn_1 \ln (N - n_1) + dn_1]$$

$$dS = k_B dn_1 \ln \frac{N - n_1}{n_1} .$$

$$\text{Or, } \frac{N - n_1}{n_1} = \exp \left[-\frac{\Delta E}{k_B T} \right] \text{ et } dS = -\frac{\Delta E}{T} dn_1 .$$

3 • L'identification des deux relations conduit bien à $dU = TdS$ (le volume du système étant constant).

LES OBJECTIFS

- Savoir interpréter les diagrammes (P, T) et (P, V) pour un corps pur.
- Comprendre la notion de pression de vapeur saturante.
- Effectuer des bilans d'énergie et d'entropie sur des systèmes diphasés.

LES PRÉREQUIS

- Notion de fonction d'état.
- Fonctions d'état énergie, enthalpie, entropie.
- Expression du travail pour un fluide.
- Propriétés des gaz parfaits et des phases condensées.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Méthodes classiques de calcul.
- Développements limités.

ESSENTIEL

Phases d'un corps pur

- Toute phase homogène d'un corps pur est décrite par la donnée des deux *paramètres intensifs* indépendants P et T , dont dépendent les grandeurs massiques (ou molaires) correspondantes.
- Certaines grandeurs massiques, ou molaires, d'un même corps pur à une température T et sous une pression P , présentent une discontinuité lors d'un changement de phase : c'est le cas du volume, de l'enthalpie et de l'entropie massiques.

Corps pur sous deux phases

- À pression fixée, il n'existe qu'une température pour laquelle l'équilibre d'un corps pur sous deux phases est réalisé. Cette température est indépendante des quantités de corps purs dans chacune des phases.
- La pression d'équilibre liquide-vapeur d'un corps pur à la température T , notée $P_s(T)$, est appelée *pression de vapeur saturante*. Cette pression est la pression maximale que peut atteindre la vapeur pour une température donnée ; elle est indépendante des proportions respectives des deux phases.
- Tout corps pur est caractérisé par l'existence d'un point critique au-delà duquel la distinction entre phase liquide et phase gazeuse n'est plus possible. Le couple $[T_c, P_s(T_c)]$ est unique et caractéristique du corps pur étudié. Tout état situé au-delà de ce point critique est appelé *état fluide*, ou fluide hypercritique, du corps pur considéré.

• Pour la plupart des corps purs, il existe un couple unique $(P_{\text{III}}, T_{\text{III}})$ pour lequel les trois phases – solide, liquide, gaz – sont simultanément en équilibre. Le point correspondant est appelé *point triple* du corps pur considéré.

🔗 **Pour s'entraîner : tous les exercices de ce chapitre**

◀ Enthalpie de changement d'état

On appelle enthalpie massique de changement d'état à la température T (notée $\ell_{\varphi_1, \varphi_2}$) la variation d'enthalpie de l'unité de masse de corps pur lors de la transition de phase $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$ sous pression d'équilibre $P_s(T)$:

$$\ell_{\varphi_1, \varphi_2}(T) = h_{\varphi_2}(T) - h_{\varphi_1}(T),$$

où h_{φ_i} est l'enthalpie massique du corps pur sous la phase φ_i à la température T et à la pression d'équilibre $\ell_{\varphi_1, \varphi_2}(T)$ s'exprime en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

🔗 **Pour s'entraîner : ex. 1, 5, 7 et 8**

◀ Entropie de changement d'état

L'entropie massique de changement d'état d'un corps pur à la température T est la variation de l'entropie massique du corps pur lors de ce changement d'état ($\varphi_1 \rightarrow \varphi_2$) sous pression d'équilibre $P_s(T)$:

$$\Delta s_{\varphi_1, \varphi_2} = s_{\varphi_2} - s_{\varphi_1} = \frac{h_{\varphi_2} - h_{\varphi_1}}{T} = \frac{\ell_V}{T}$$

Cette variation n'est fonction que de la température ; elle s'exprime en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

🔗 **Pour s'entraîner : ex. 1, 5, 7 et 8**

◀ Système diphasé liquide-vapeur

• Titres massiques

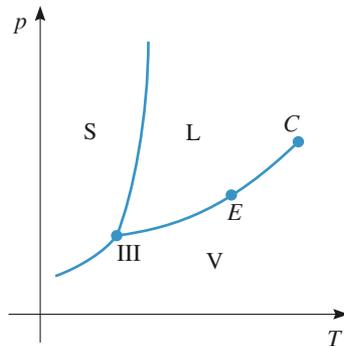
On appelle *titre massique en vapeur* la quantité : $x_{(v)} = \frac{m_{(v)}}{m}$

et *titre massique en liquide* la quantité $x_{(\ell)} = \frac{m_{(\ell)}}{m}$, $x_{(v)} + x_{(\ell)} = 1$.

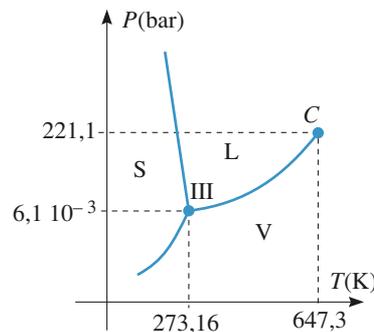
🔗 **Pour s'entraîner : ex. 5 et 7**

◀ Diagrammes de changement d'état

• Diagramme P, T

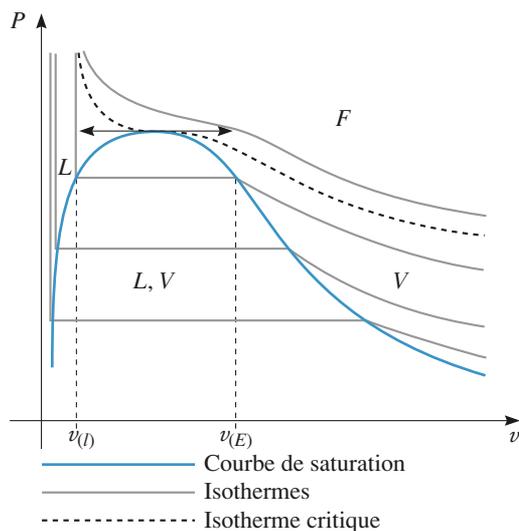


Cas le plus fréquent



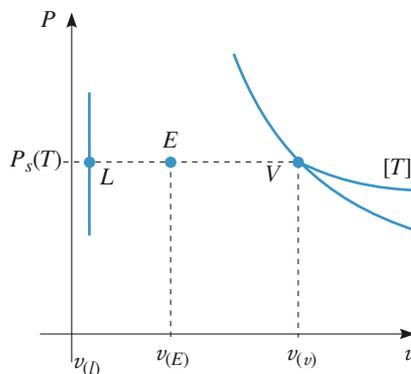
Cas de l'eau

• **Diagramme (P, v) pour un système liquide/vapeur**



Théorème des moments :

$$x_{(v)} = \frac{v - v_{(l)}}{v_{(v)} - v_{(l)}} = \frac{EL}{VL}$$



• **Vaporisation dans l'atmosphère**

- La pression partielle d'un constituant d'un mélange de gaz est égale à la pression qu'il aurait s'il occupait seul tout le volume occupé par le mélange, à la même température. La pression totale d'un mélange de gaz parfaits est égale à la somme des pressions partielles de ses constituants.
- Un liquide est en équilibre avec sa vapeur si la pression partielle de la vapeur est égale à la pression de vapeur saturante qui est une fonction croissante de la température.
- Lorsque la température est telle que la pression de vapeur saturante est égale à la pression atmosphérique, le liquide est en ébullition. La température reste alors pratiquement constante jusqu'à disparition du liquide. Si la température est inférieure à la température d'ébullition, le liquide peut s'évaporer lentement si la pression partielle de la vapeur est inférieure à la pression de vapeur saturante.

► **Pour s'entraîner : ex. 1 et 6**

Conseils et pièges à éviter

- Ne pas extrapoler abusivement les lois concernant le gaz parfait à un système diphasé liquide/vapeur ! Notamment, une transformation isotherme est également isobare si les deux phases coexistent à l'équilibre.
- La « chaleur latente massique de vaporisation » ℓ_v est la variation d'enthalpie lors d'une vaporisation dans les conditions d'équilibre à une température donnée, et donc à pression de vapeur constante. Si la vaporisation s'effectue dans d'autres conditions (à volume constant par exemple), l'échange thermique massique n'est pas égal à ℓ_v .
- Ne pas confondre enthalpie et enthalpie massique : la première est une grandeur extensive relative à un système fermé en équilibre et la seconde est une grandeur intensive ; ces deux grandeurs ne sont pas homogènes entre elles, la première s'exprime en J et la seconde en $J \cdot kg^{-1}$. Il en va de même pour volume et volume massique, entropie et entropie massique, etc.

1 Changement d'état de l'eau

Un récipient thermostaté, de volume initial $V_i = 1 \text{ L}$, est maintenu à la température $\theta_0 = 100 \text{ °C}$. Il contient de l'air sous la pression partielle $p_a = 2.10^5 \text{ Pa}$ et 1 gramme d'eau partiellement à l'état liquide et partiellement à l'état de vapeur saturante sous la pression p_e .

On négligera le volume du liquide et l'on assimilera l'air et la vapeur d'eau à des gaz parfaits. La pression de vapeur saturante de l'eau à 100 °C est de $1,01.10^5 \text{ Pa}$. On donne la constante des gaz parfaits: $R = 8,32 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

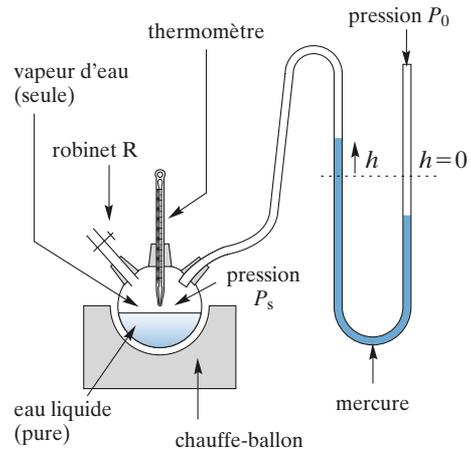
- 1 • Calculer la masse m_ℓ d'eau liquide.
- 2 • Calculer la pression initiale totale p_i qui règne dans le récipient.
- 3 • On effectue une détente isotherme réversible jusqu'à ce que la totalité de l'eau soit passée sous forme de vapeur saturante. Calculer le volume final V_f quand le liquide a juste disparu.
- 4 • Calculer la pression totale finale p_f qui règne alors dans le récipient.
- 5 • Calculer la variation ΔU_{eau} de l'énergie interne de l'eau au cours de cette opération. On notera ℓ_0 l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau à la température θ_0 et M la masse molaire de l'eau. $\ell_0 = 2,3.10^6 \text{ J.kg}^{-1}$ et $M = 28 \text{ g}$. On appellera T_0 la température thermodynamique correspondant à θ_0 .
- 6 • Calculer le travail et le transfert thermique fournis au système au cours de l'opération, ainsi que la variation d'entropie.

Conseils

- 1) Comment calculer cette masse, directement ou en cherchant celle de la vapeur ?
- 5) La variation d'enthalpie se calcule plus simplement que la variation d'énergie interne.

2 Diagramme pression-température de l'eau

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant la pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température à l'aide du dispositif ci-après.



- 1 • Indiquer précisément comment effectuer les mesures.
- 2 • Préciser l'expression de la pression de vapeur saturante en fonction de P_0 et h .
- 3 • Dans quelle gamme de température, ce dispositif est-il utilisable ?

Conseils

- 1) Comment être sûr que l'équilibre liquide-vapeur est établi à chaque mesure ? Par quelles mesures commencer : les hautes ou les basses températures ?
- 2) Appliquer la relation de la statique des fluides (quelle hypothèse fait-on implicitement ?).
- 3) Peut-on descendre au-dessous de la température ambiante ? aller au-dessus de la température d'ébullition de l'eau ?

3 Courbe de refroidissement

La formule de Rankine donne la pression de vapeur saturante de l'eau en fonction de la température :

$$\ln\left(\frac{P_s}{P_0}\right) = 13 - \frac{4871}{T} \quad \text{avec } T \text{ en K et } P_0 = 1 \text{ bar}.$$

- 1 • Tracer P_s en fonction de θ , température en $^{\circ}\text{C}$, sur l'intervalle de température $[0 \text{ °C}; 150 \text{ °C}]$.
- 2 • Une certaine quantité d'eau pure en phase vapeur sous la pression atmosphérique à 150 °C est refroidie de manière isobare jusqu'à la température ambiante.
 - a. Tracer la courbe représentant la transformation sur le diagramme du 1).
 - b. Donner l'allure de l'évolution de la température en fonction du temps.

c. Tracer la courbe représentant la transformation dans le diagramme (P, v) . On donne $v_\ell = 1 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ pour l'eau liquide et on fera l'hypothèse la plus simple possible pour l'eau vapeur.

On fera figurer les courbes de rosée et d'ébullition ainsi que quelques isothermes.

Données :

$$c_\ell = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}; \quad c_{P,v} = 2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Conseils

- 1) Utiliser une machine graphique en prenant garde aux unités.
- 2) a) La transformation est isobare.
b) Combien y aura-t-il de parties différentes sur la courbe? Que peut-on dire des pentes respectives des courbes?
c) Quelle hypothèse simple peut-on faire sur l'eau liquide? sur l'eau vapeur? En déduire l'allure des courbes.

4 Fusion de l'eau

Le tableau ci-contre donne quelques valeurs de pressions et températures pour l'équilibre de fusion de l'eau.

Donner l'allure de la courbe de fusion au voisinage de ces valeurs.

Pourquoi n'y a-t-il pas, dans le tableau, de valeurs positives de θ ?

Quelle allure de courbe observe-t-on pour la très grande majorité des autres corps purs?

θ (°C)	P (bar)
-3	410,0
-2	273,1
-1	136,6
0	1

Conseils

- Tracer la courbe et en déduire son équation.
- Quel est le signe de la pente? Comparer aux autres corps purs.

5 Utilisation de tables thermodynamiques

Des mesures calorimétriques très précises ont permis d'établir des tables thermodynamiques pour l'eau.

Les grandeurs sont données pour la vapeur (indice g) et pour le liquide (indice ℓ) dans les conditions de l'équilibre liquide/vapeur :

h_ℓ et h_g : enthalpies massiques.

s_ℓ et s_g : entropies massiques.

v_ℓ et v_g : volumes massiques.

Par convention, on a pris $h_\ell = 0 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $s_\ell = 0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 0°C .

t (°C)	P_{sat} (bar)	v_ℓ ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	v_g ($\text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_ℓ ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	h_g ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s_ℓ ($\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s_g ($\text{kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$)
25	0,0317	0,00100	43,41	104,74	2 546,4	0,3669	
100	1,0132	0,00104	16,73	418,38	2 674,4	1,3063	
110	1,4326	0,00105	1,210	461,13	2 689,6	1,4179	
150	4,760	0,00109	0,3924	631,9	2 744,5	1,8409	

1 • Compléter le tableau avec les valeurs de s_ℓ .

2 • Le modèle de la phase condensée idéale pour l'eau liquide et celui du gaz parfait pour l'eau vapeur sont-ils pertinents entre 25°C et 110°C ?

3 • Dans un récipient de volume constant $V = 10 \text{ L}$ initialement vide, on introduit 100 g d'eau, puis le système se met à l'équilibre thermodynamique à la température ambiante de 25°C (T_1). On le chauffe jusqu'à la température de 110°C (T_2). Déterminer le transfert thermique reçu par l'eau pendant le chauffage. On fera une hypothèse sur le volume occupé par l'eau liquide et on évaluera l'ordre de grandeur de l'erreur commise avec cette approximation.

4 • Une chaudière sous pression contenant de l'eau liquide et de la vapeur d'eau en équilibre est maintenue à 150°C . De l'eau liquide, prélevée dans la chaudière, s'échappe en passant par un détendeur; et le fluide ressort à la pression atmosphérique, égale à $1,013 \text{ bar}$, avec une énergie cinétique négligeable.

Déterminer la composition du fluide à la sortie du détendeur, si on suppose la détente adiabatique.

5 • Dans un cylindre muni d'un piston mobile, initialement vide, on introduit 1 g de vapeur d'eau sous une pression $P_1 = 1,013 \text{ bar}$ et à la température T ($\theta_1 = 100^\circ\text{C}$). Déterminer le volume V_1 du cylindre.

On détend lentement le fluide jusqu'à une pression $P_2 = 0,032 \text{ bar}$. Déterminer le titre en vapeur et le volume dans l'état final si on néglige les transferts thermiques entre le fluide et le cylindre.

Conseils

- Attention ! les températures sont données en $^{\circ}\text{C}$, les pressions en bar et h en $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.
- Pour chaque transformation, on décrira soigneusement l'état initial et l'état final.
- Question 3: Le volume occupé par le gaz est-il rigoureusement constant ? approximativement constant ?
- Quelle est la fonction d'état qui permet de déterminer le transfert thermique lors d'une évolution isochore ?
- Pour évaluer la variation d'une fonction d'état, on peut considérer une suite de transformations simples ayant même état initial et même état final.
- La détente de la question 4 est adiabatique. Est-elle isentropique ?
- Revoir la détente de Joule-Thomson (cours sur le premier principe).
- Comment exprime-t-on l'enthalpie massique d'un mélange liquide/vapeur de titre x ?

6 Changement d'état en présence d'un gaz

Un tube cylindrique de faible section en verre, fermé à l'une de ses extrémités est ouvert à l'autre bout. Le tube est vertical, l'extrémité ouverte vers le haut. Il porte une graduation millimétrique. Le zéro de cette graduation correspond à l'extrémité fermée.

Un index de mercure isole une certaine quantité de fluide. L'index de mercure a une hauteur égale 100 mm. On repère la base de l'index de mercure par la graduation n .

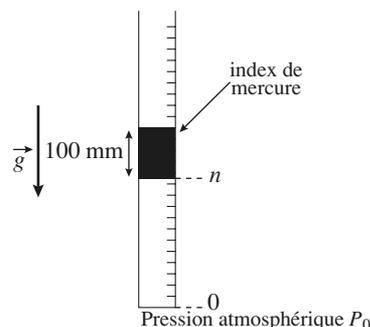
La pression atmosphérique est $P_0 = \rho_{\text{Hg}} g H_0$, avec $H_0 = 760$ mm.

On isole dans le tube une certaine masse d'air et d'eau. Ce tube, toujours vertical, est enfermé dans une étuve dont la température varie entre 98°C et 102°C .

La pression de vapeur saturante de l'eau dans ce domaine est donnée par :

$$P_S = a \left(\frac{t}{100} \right)^{\alpha}, \text{ avec } \alpha = 3,5 \text{ et la température } t \text{ exprimée en } ^{\circ}\text{C}.$$

La température du point critique de l'eau est $t_e = 374^{\circ}\text{C}$.



- 1 • Déterminer a en millimètres de mercure.
- 2 • On assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait et on néglige le volume de l'eau à l'état liquide. Sachant qu'à $t = 98^{\circ}\text{C}$, on a $n_{98} = 500$ et qu'à $t = 102^{\circ}\text{C}$, on a $n_{102} = 750$, montrer que la vapeur est sèche à 102°C et saturante à 98°C .
- 3 • Tracer $n = f(t)$; on déterminera en particulier la température t_0 et $n_0 = f(t_0)$ telle que pour $t > t_0$, la vapeur est sèche.
- 4 • Calculer le rapport entre la masse totale d'eau et la masse d'air enfermée dans le tube.

Conseils

Il est conseillé d'utiliser ici comme unité de pression le millimètre de mercure; la pression atmosphérique est « équilibrée » par 760 mm de mercure.

- 1) À $t = 100^{\circ}\text{C}$, quelle est la pression de vapeur saturante de l'eau ?
- 2) Lors de telles situations, on fait une hypothèse et on vérifie sa validité.
- 3) Tant que la vapeur est sèche, la quantité de matière vapeur est invariante; quand la vapeur est saturante, seule la quantité de matière d'air est invariante.
- 4) Seules les quantités de matière en phase vapeur sont accessibles.

7 Liquéfaction du dioxyde de carbone

Un cylindre à parois diathermanes contient du dioxyde de carbone CO_2 et se trouve constamment en contact avec un thermostat à 0°C .

La pression initiale du gaz est $P_0 = 1,0 \cdot 10^5$ Pa, et son volume $V_0 = 100$ litres.

On réduit réversiblement le volume du fluide jusqu'à $V = 1$ litre. Dans la phase vapeur, on assimilera le gaz CO_2 à un gaz parfait.

- 1 • Représenter la transformation considérée dans le diagramme (P, V) où V_m représente le volume molaire.

2 • À quelle pression P a lieu le début de la condensation ?

Comparer à la valeur expérimentale de la pression de vapeur CO_2 à 0°C : $P_{\text{exp}} = 34,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

3 • Quel est le titre en vapeur à la fin de l'expérience ?

4 • Calculer le travail de compression ainsi que le transfert thermique reçu de la part du thermostat au cours de cette expérience.

5 • Calculer la variation d'énergie interne ΔU , la variation d'enthalpie ΔH et la variation d'entropie ΔS au cours de cette transformation.

Données

• Masse molaire de CO_2 : $M = 44 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

• État critique : $P_c = 74 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et

$V_{m,c} = 0,095 \text{ dm}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ et $T_c = 304 \text{ K}$;

• Point triple : $T_t = 216 \text{ K}$ et $P_t = 5,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$.

• Volume massique de la vapeur saturante à 0°C :

$V_v = 0,0104 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$.

• Masse volumique du liquide de saturation à 0°C :

$\rho_L = 912 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

• Chaleur latente massique de vaporisation :

$\ell_v = 232 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ à 0°C .

Conseils

1) On commencera (par exemple !) par calculer toutes les grandeurs molaires (ou massiques ou pour la quantité de matière considérée), puis on représentera la transformation dans le diagramme.

2) La vapeur n'étant pas un gaz parfait (on utilise un modèle), il existera une différence entre la valeur calculée et la valeur expérimentale : dans la suite du problème, on conservera la grandeur calculée pour une cohérence des valeurs numériques.

3) On supposera que la vapeur suit la loi des gaz parfaits.

4) Pour les transferts thermiques, comme toujours, on utilisera les variations des fonctions d'état.

5) On pourra remarquer, tous calculs faits, qu'il n'y a aucune entropie créée.

8 Surfusion du phosphore

On se propose d'étudier un phénomène de « retard à la solidification » : certains corps purs sont susceptibles d'exister à l'état liquide, sous une pression donnée, à une température inférieure à leur température de fusion. Ce phénomène porte le nom de surfusion. Il nécessite des conditions expérimentales particulières et peut cesser lors de l'introduction d'un cristal de solide, d'une impureté ou en cas d'agitation du récipient contenant le liquide surfondu.

Soit un récipient calorifugé contenant une masse $m = 10 \text{ g}$ de phosphore liquide surfondu à la température $t = 34^\circ\text{C}$ sous la pression atmosphérique.

1 • On fait cesser la surfusion et on observe un nouvel état d'équilibre diphasé du phosphore. Déterminer la masse respective de chacune des phases.

Données pour le phosphore :

$T_f = 317 \text{ K}$; $l_f(T_f) = 20,910 \cdot 10^{-3} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$ sous la pression atmosphérique ; $c_P(\text{liq}) = 0,798 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ (valeur supposée indépendante de la température dans l'intervalle considéré).

2 • Calculer la variation d'entropie correspondante.

3 • Quel serait l'état final du système si on faisait cesser la surfusion d'une même masse de phosphore initialement à la température $t' = 17,5^\circ\text{C}$?

Donnée : $c_P(\text{sol}) = 0,840 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Conseils

1) Il faut modéliser l'évolution qui permet la cessation de l'état de surfusion ; on peut alors choisir la fonction d'état sur laquelle travailler. Quelles sont les caractéristiques de l'état initial et de l'état final ? Quel chemin doit-on choisir, en fonction des données, pour calculer sa variation ?

2) S est aussi une fonction d'état : le même chemin qu'au 1) doit permettre de calculer sa variation.

3) Le système sera-t-il encore en équilibre liquide solide dans l'état d'équilibre final ? Reprendre alors la méthode du 1).

1 Changement d'état de l'eau

1 • On calcule la masse d'eau vapeur. La vapeur est saturante donc la pression partielle de l'eau est : $p_e = 10^5 \text{ Pa}$. Si n_V est la quantité d'eau vapeur : $p_e V_i = n_V RT$. car on néglige le volume du liquide.

$$\text{Soit : } n_V = \frac{p_e V_i}{RT_0} \text{ et } m_V = \frac{M p_e V_i}{RT_0} = 0,58 \text{ g .}$$

La masse d'eau liquide est $m_\ell = m_e - m_V = 0,42 \text{ g}$ ce qui représente un volume de $0,42 \text{ cm}^3$ négligeable devant 1 L .

2 • La pression totale est la somme des pressions partielles :

$$p_i = p_a + p_e = 3 \cdot 10^5 \text{ Pa .}$$

3 • La vapeur est saturante, sa pression est donc p_e . Si n'_V

est le nombre de moles de vapeur, $n'_V = \frac{m}{M} = 5,55 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$,

et $p_e V_f = n'_V RT_0$.

$$\text{Soit : } V_f = \frac{m RT_0}{M p_e} = 1,72 \text{ L .}$$

4 • De la même manière que 2) $p_f = p'_a + p_e$ avec

$$p'_a = \frac{p_a V_i}{V_f} \text{ car la détente est isotherme :}$$

$$p_f = p_a \frac{V_i}{V_f} + p_e = 2,16 \cdot 10^5 \text{ Pa .}$$

5 • La transformation de l'eau est une vaporisation de la masse m_e à la température θ_0 donc :

$$\Delta H_{\text{eau}} = m_e L_0$$

$$\Delta U_{\text{eau}} = \Delta H_{\text{eau}} - \Delta(PV)_{\text{eau}}$$

$$\Delta(PV)_{\text{eau}} = \underbrace{\frac{m_e RT_0}{M}}_{\text{état final gaz}} - \underbrace{v_{\text{liquide}} P_i}_{\text{état initial liquide}} \approx \frac{m_e RT_0}{M}$$

$$\text{soit : } \Delta U_{\text{eau}} = m_e \left(\ell_0 - \frac{RT_0}{M} \right) .$$

$$\text{A.N. : } \Delta U_{\text{eau}} = 940 \text{ J .}$$

6 • Au cours de la transformation, la pression est :

$$P = P_{\text{air}} + P_{\text{eau}} = p_a \frac{V_1}{V} + p_e \quad (p_e \text{ est constante car } T$$

est constante).

Le travail fourni au système est :

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P \, dV = - P_e (V_f - V_i) - p_a V_i \ln \frac{V_f}{V_i} .$$

$$\text{A.N. : } W = - 180 \text{ J .}$$

L'air, considéré comme un gaz parfait, a une énergie interne constante car la température est constante. D'où :

$$\Delta U_{\text{système}} = \Delta U_{\text{eau}} = 840 \text{ J .}$$

On obtient le transfert thermique par différence :

$$Q = \Delta U - W, \text{ soit : } Q = 1,12 \text{ kJ .}$$

L'évolution étant réversible et isotherme, on peut écrire :

$$Q = T \Delta S, \text{ d'où : } \Delta S = 3,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} .$$

2 Diagramme pression-température de l'eau

1 • Il faut être sûr que l'on étudie un corps pur et que l'équilibre est établi à chaque mesure ; pour cela :

- l'eau pure (eau distillée) liquide est portée à ébullition, le robinet étant ouvert ; les canalisations sont alors purgées de l'air et ne contiennent plus que de la vapeur d'eau seule ;

- la température est proche de $100 \text{ }^\circ\text{C}$; on coupe alors le chauffage, on ferme le robinet et on laisse l'eau se refroidir ; le refroidissement se faisant lentement, on peut considérer que l'équilibre est établi à chaque instant ;

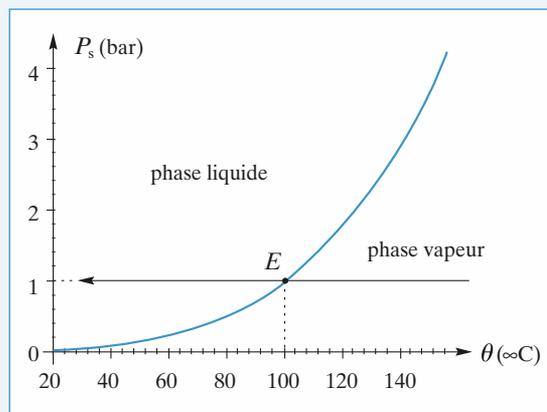
- il suffit alors de relever les valeurs de h et de θ régulièrement.

2 • L'application de la relation fondamentale de la statique des fluides au mercure, supposée incompressible, conduit à $P_s = P_0 - 2\rho_{\text{Hg}}gh$.

3 • Il est clair, d'après la description qu'on a faite de l'utilisation du dispositif, que la température maximale sera de l'ordre de $100 \text{ }^\circ\text{C}$ et la température inférieure de l'ordre de $20 \text{ }^\circ\text{C}$.

3 Courbe de refroidissement

1 • La courbe est donnée ci-dessous.



2 • a. La transformation, isobare, est représentée ci-dessus ; le point E correspond à l'équilibre liquide vapeur sous 1 bar.

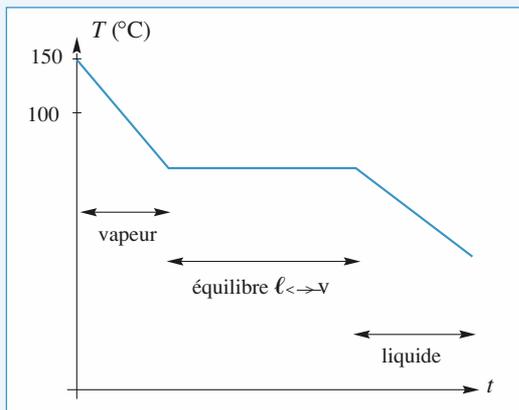
b. Lorsque la vapeur se refroidit, la température diminue avec le temps ; pour $\theta = 100 \text{ }^\circ\text{C}$, l'équilibre liquide-vapeur est atteint, la première goutte de liquide apparaît. La température

re va rester constante tout le temps que dure le changement d'état. Enfin, la température se remettra à décroître lorsque la dernière bulle de vapeur aura disparu.

On peut se demander si la pente est plus grande pour le refroidissement du liquide ou de la vapeur: la chaleur massique de l'eau liquide est supérieure à celle de l'eau vapeur; si l'on suppose la puissance thermique, \mathcal{P} , constante,

$$dt_\ell = c_\ell \frac{dT}{\mathcal{P}} > dt_v = c_v \frac{dT}{\mathcal{P}} ;$$

la courbe aura alors l'allure suivante:

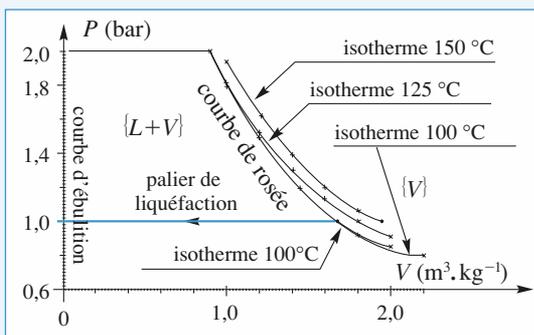


c. L'eau liquide peut être considérée comme incompressible: la courbe de saturation est une verticale d'équation $v = 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. L'isobare liquide est horizontale (mais n'apparaît pas sur le diagramme ci-dessous) à $P = 1 \text{ bar}$. Le changement d'état correspond à un palier de pression. L'eau vapeur sera considérée comme un gaz parfait; la courbe est horizontale puisque la transformation est isobare. Elle va pour la vapeur de:

$$v = \frac{R(273 + 150)}{PM} = 1,95 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$\text{à } v = \frac{R(273 + 100)}{PM} = 1,72 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} .$$

On a fait figurer sur le graphique ci-après quelques points de la courbe de rosée, calculés avec la formule de Rankine et l'équation d'état des gaz parfaits; les isothermes sont obtenues grâce à l'équation des gaz parfaits pour la vapeur et sont verticales pour le liquide.

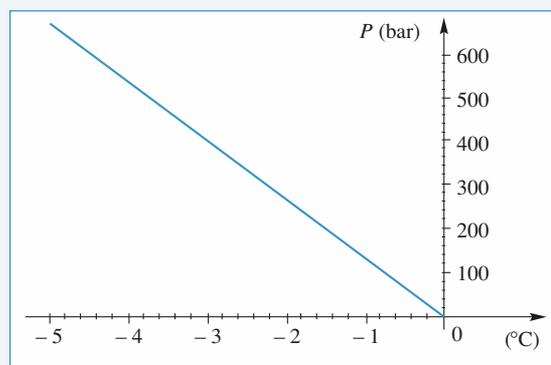


4 Fusion de l'eau

La courbe est une droite de pente $-136,6 \text{ bar} \cdot \text{K}^{-1}$ et d'équation $P_{\text{liq-sol}} = 1 - 136,6 (T - 273)$, avec P en bar et T en K. On remarque que:

- la courbe est quasiment verticale, comme pour les autres corps purs (avec une échelle appropriée!);
- sa pente est négative contrairement à la majorité des corps purs;
- il n'y a pas de valeurs positives de θ , puisque la température du point triple de l'eau vaut $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$.

L'équilibre de fusion est impossible au-delà de cette température. Pour les autres corps purs, l'équilibre de fusion est impossible en deçà de la température triple.



Remarque: Le caractère négatif de la pente tient à ce que le volume massique de l'eau solide est plus grand que le volume massique de l'eau liquide (voir la relation de Clapeyron en 2^{de} année et le cours de chimie sur la liaison hydrogène): on sait ce qu'il advient d'une bouteille pleine d'eau liquide mise au congélateur...

5 Utilisation de tables thermodynamiques

1 • Dans les conditions de l'équilibre isotherme et isobare: $\Delta h = T \Delta s$, d'où: $s_g = s_\ell + \frac{h_g - h_\ell}{T}$.

On complète ainsi le tableau en exprimant T en Kelvin ($T = t + 273$)

$t \text{ }^\circ\text{C}$	$s_g (\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$
25	8,556
100	7,350
110	7,233
150	6,832

2 • Entre $25 \text{ }^\circ\text{C}$ et $120 \text{ }^\circ\text{C}$, v_ℓ varie de 6 % alors que le volume est constant pour une phase condensée idéale. Remarquons toutefois que, v_ℓ étant très petit devant v_g , le travail associé aux variations de v_ℓ est en général négligeable dans les bilans d'énergie.

Si le modèle est correct: $s_\ell(T) = C \ln \frac{T}{T_0}$

avec $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Examinons donc les valeurs

expérimentales de $f_1(T) = \frac{s_\ell}{\ln \frac{T}{T_0}}$:

25 °C: $f_1 = 4,1895 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;

110 °C: $f_1 = 4,1899 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

L'accord est excellent.

Si la vapeur est un gaz parfait, alors $\frac{P_{\text{sat}} v_g}{T} = \frac{R}{M}$

est constant. Examinons les valeurs expérimentales de

$f_2(T) = \frac{P_{\text{sat}} v_g}{T}$:

25 °C: $f_2 = 461 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;

110 °C: $f_2 = 452 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$. L'accord est relativement bon.

3 • On suppose que, la quantité d'eau vaporisée étant faible, le volume occupé par le gaz est constant, soit $V_g = 9,90 \text{ L}$.

Affectons l'indice 1 à l'état initial et l'indice 2 à l'état final.

$P_1 = 0,0317 \text{ bar}$; $m_{g1} = \frac{V_g}{V_{g1}} = 0,228 \text{ g} \Rightarrow m_{\ell1} = 99,77 \text{ g}$

$\Rightarrow V_{\ell1} = 0,0998 \text{ L}$. L'erreur sur les volumes est de l'ordre de $2 \cdot 10^{-4} \text{ L}$, soit une erreur relative de $2 \cdot 10^{-5}$ sur V_g .

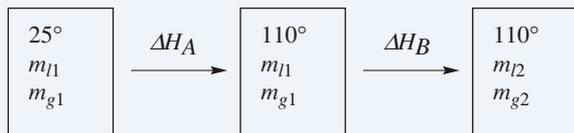
À l'état final: $P_2 = 1,4326 \text{ bar}$, $m_g = \frac{V_g}{V_{g1}} = 8,182 \text{ g}$

$\Rightarrow m_{\ell2} = 91,2 \text{ g} \Rightarrow V_{\ell2} = 0,0912 \text{ L}$. L'approximation sur le volume V_{g2} est encore justifiée à $8 \cdot 10^{-4}$ près en valeur relative. Si on s'en tient à une précision de l'ordre de 0,1 %, cette hypothèse est légitime.

Pour une évolution isochore, le transfert thermique est égal à la variation d'énergie interne, donc:

$$Q = \Delta U = \Delta H - \Delta(PV) = \Delta H - V(P_2 - P_1)$$

Évaluons ΔH en imaginant une suite de deux transformations fictives ayant même état initial et même état final.



$\Delta H_A = m_{\ell1} (h_{\ell2} - h_{\ell1}) + m_{g1} (h_{g2} - h_{g1}) = 35,60 \text{ kJ}$;

$\Delta H_B = \ell_{v2} (m_{g2} - m_{g1}) = (h_{g2} - h_{\ell2}) (m_{g2} - m_{g1}) = 17,73 \text{ kJ}$.

On en déduit $\Delta H = \Delta H_A + \Delta H_B$ puis $Q = 51,9 \text{ kJ}$.

L'erreur relative sur les masses dans l'état final est de l'ordre de l'erreur relative sur $V_{\ell2}$, soit de l'ordre de 0,1%. Le troisième chiffre significatif est donc crédible.

4 • On reconnaît une détente de Joule-Thomson, qui conserve la fonction enthalpie.

Faisons l'hypothèse que le fluide sortant est un mélange liquide/vapeur en équilibre interne de titre en vapeur x_2 . Il est à la température de 100 °C (T_2).

L'enthalpie d'une masse m de ce fluide a pour expression: $H = m_{\ell2} h_{\ell2} + m_{g2} h_{g2} = m[(1 - x_2)h_{\ell} + x_2 h_g]$.

Son enthalpie massique est: $h = h_{\ell} + x(h_g - h_{\ell})$.

Le titre x_2 est donc solution de l'équation: $h_{\ell1} = h_{\ell2} + x_2 (h_{g2} - h_{\ell2})$.

On obtient: $x_2 = 0,10$.

1 g de fluide sortant contient 0,1 g de vapeur et 0,9 g de liquide. La valeur trouvée étant comprise entre 0 et 1, l'hypothèse est validée.

5 • La détente lente est une suite continue d'états d'équilibre. On peut l'assimiler à une adiabatique réversible, c'est-à-dire à une isentropique. Écrivons l'égalité de l'entropie initiale S_1 et de l'entropie finale S_2 .

L'état initial est composé de vapeur saturante, à 100 °C.

$V_1 = m v_{g1} = 1,67 \text{ L}$ et $S_1 = m s_{g1}$.

L'état final est un état d'équilibre de température 25 °C et de titre en vapeur x_2 inconnu. Son entropie est:

$S_2 = m[s_{\ell2} + x_2(s_{g2} - s_{\ell2})]$.

Il suffit d'égaliser les deux valeurs de l'entropie et on obtient: $x_2 = 0,74$.

On en déduit $V_2 = m(0,74 v_{g2} + 0,26 v_{\ell2})$ soit: $V_2 = 32 \text{ L}$.

6 Changement d'état en présence d'un gaz

1 • La pression de vapeur saturante est donnée par la formule: $P_s = a \left(\frac{t}{100}\right)^\alpha$; à $t = 100 \text{ °C}$, la pression de vapeur

saturante est égale à la pression atmosphérique (soit 760 mm de mercure); donc $a = 10^5 \text{ Pa}$, ou $a = 760 \text{ mm de mercure}$. On remarque qu'au cours de la transformation proposée, la pression dans le tube est invariante, et égale à 860 mm de mercure ($P = \rho_{\text{Hg}} g H$, avec $H = 860 \text{ mm}$).

2 • On suppose que la vapeur est sèche à 98 °C:

Si elle est sèche à cette température, elle le sera encore à 102 °C: la quantité de matière en phase vapeur est donc invariante lors de la transformation; on doit donc vérifier que (comme la pression dans le tube est invariante):

$$\frac{V}{T} = \text{cte, soit: } \frac{n_{98}}{T_{98}} = \frac{n_{102}}{T_{102}},$$

ce qui est faux car:

$$\frac{500}{273 + 98} \neq \frac{750}{273 + 102}:$$

la vapeur est donc au moins saturante à 98 °C.

On suppose que la vapeur est saturante à 102 °C.

On connaît la pression de l'air $P_{\text{air}} = P - P_s$ égale à la pression totale moins la pression de vapeur saturante. La quantité de matière d'air ne variant pas, on doit vérifier :

$$\frac{P_{\text{air},98} V_{98}}{T_{98}} = \frac{P_{\text{air},102} V_{102}}{T_{102}},$$

$$\text{soit : } \frac{P_{\text{air},98} n_{98}}{T_{98}} = \frac{P_{\text{air},102} n_{102}}{T_{102}} ;$$

on remarque de suite que :

$$\frac{\left(860 - 760 \left(\frac{98}{100}\right)^{3,5}\right) 500}{273 + 98} \neq \frac{\left(860 - 760 \left(\frac{102}{100}\right)^{3,5}\right) 750}{273 + 102} :$$

l'hypothèse est à nouveau fautive. À $t = 102^\circ\text{C}$ la vapeur est donc sèche.

3 • On trace $n = f(t)$. On pose $t = 100 + \theta$.

• Quand on est en présence de vapeur sèche, on a une quantité de matière constante (sous pression constante) dans le tube donc :

$$\frac{V}{T} = \text{cte, soit : } \frac{n}{Tt} = \frac{n_{102}}{T_{102}},$$

ce qui donne :

$$n = \frac{750}{375} (273 + t) = 2(373 + \theta) :$$

c'est une fonction affine.

• Quand la vapeur est saturante, la pression de l'air est connue et égale à : $P_{\text{air}}(t) = P - P_s(t)$. La quantité de matière d'air ne variant pas, on a :

$$\frac{P_{\text{air},98} n_{98}}{T_{98}} = \frac{P_{\text{air},t} n}{Tt}, \text{ soit :}$$

$$\frac{\left(860 - 760 \left(\frac{98}{100}\right)^{3,5}\right) 500}{273 + 98} = \frac{\left(860 - 760 \left(\frac{100 + \theta}{100}\right)^{3,5}\right) n}{273 + 100 + \theta}.$$

On utilise les développements limités :

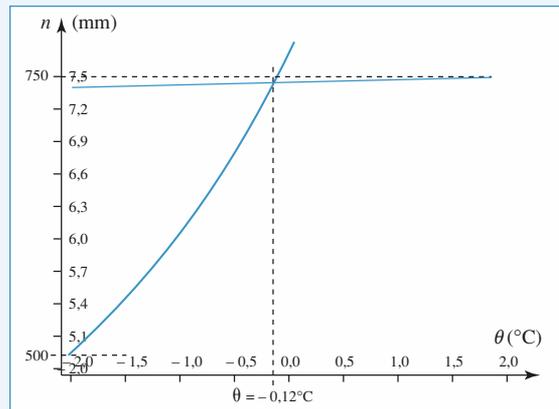
$$\frac{\left(860 - 760 \left(1 - \frac{2}{100}\right)^{3,5}\right) 500}{371} = \frac{\left(860 - 760 \left(1 + \frac{\theta}{100}\right)^{3,5}\right) n}{373 + \theta},$$

$$\text{soit : } \frac{\left(100 + \frac{7.760}{100}\right) 500}{371} = \frac{\left(100 - \frac{3,5 \cdot 760 \cdot \theta}{100}\right) n}{373 + \theta},$$

$$\text{et donc : } n = 206,47 \frac{373 + \theta}{100 - 26,6 \theta}.$$

On vérifie bien que pour $\theta = -2$, $n = 500$.

On trace ces deux courbes :



On cherche le point d'intersection entre les courbes :

$$n = 206,47 \frac{373 + \theta}{100 - 26,6 \theta} = 2(373 + \theta),$$

soit : $53 \theta^2 + 19,8 \cdot 10^3 \theta + 2,4 \cdot 10^3 = 0$,
dont la solution (dans le domaine qui nous intéresse) est :
 $-0,12^\circ$. Ainsi $t_0 = 99,88^\circ\text{C}$.

4 • Pour calculer le rapport entre la masse totale d'eau et la masse d'air enfermée dans le tube, on s'intéresse aux quantités de matière.

• À $t = 102^\circ\text{C}$, la quantité totale de matière est :

$$n_{\text{air}} + n_{\text{eau}} = \frac{PV_{102}}{RT_{102}} = \frac{\rho_{\text{Hg}} g 860 \cdot 10^{-3} \text{ S } 750 \cdot 10^{-3}}{8,32 (273 + 102)}$$

$$= 2,07 \cdot 10^{-4} \rho_{\text{Hg}} \text{ Sg (en usi).}$$

• À $t = 98^\circ\text{C}$, la quantité totale de matière d'air est :

$$n_{\text{air}} = \frac{(P - P_{S,98})V_{98}}{RT_{98}}$$

$$= \frac{\rho_{\text{Hg}} g \left(860 - 760 \left(\frac{98}{100}\right)^{3,5}\right) \cdot 10^{-3} \text{ S } 500 \cdot 10^{-3}}{8,32 (273 + 98)}$$

$$= 2,46 \cdot 10^{-5} \rho_{\text{Hg}} \text{ Sg (en usi).}$$

$$\text{On a donc } \frac{n_{\text{air}} + n_{\text{eau}}}{n_{\text{air}}} = \frac{20,7}{2,46} = 8,41, \text{ soit } \frac{n_{\text{eau}}}{n_{\text{air}}} = 7,41,$$

ce qui donne un rapport des masses :

$$\frac{m_{\text{eau}}}{m_{\text{air}}} = \frac{7,41 \cdot 18}{29} = 4,60.$$

La masse d'eau est égale à 4,6 fois la masse d'air.

7 Liquéfaction du dioxyde de carbone

1 • On commence par exprimer les divers grandeurs molaires ;

dans 1 kg de CO_2 , il y a $\frac{1}{M} = \frac{10^3}{44} = 22,7$ moles.

État critique : $V_{m,c} = 9,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$.

Volume molaire de la vapeur saturante à 0°C :

$$V_{m,V} = 45,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Volume molaire du liquide de saturation à 0°C :

$$V_{m,L} = 4,82 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Chaleur latente de vaporisation molaire :

$$L_{V,m} = 10,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \text{ à } 0^\circ\text{C}.$$

On suppose, au départ, le CO_2 à l'état de gaz :

$$\text{la quantité de matière est : } n = \frac{P_0 V_0}{RT_0},$$

cela donne : $n = 4,4$ moles, soit une masse $m = 0,194 \text{ kg}$.

• Dans 100 litres, cela donne un volume molaire :

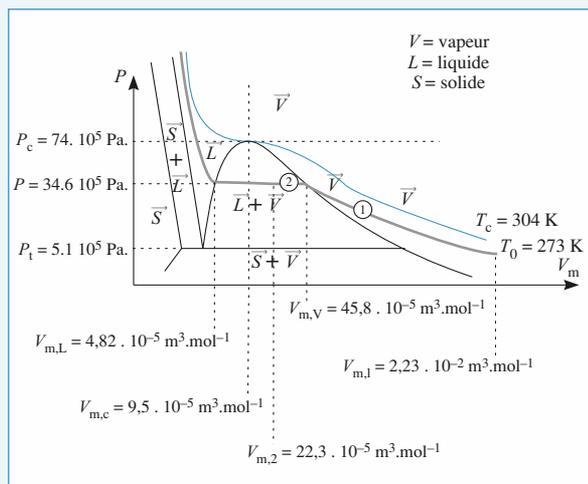
$$V_{m,1} = 2,23 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} : \text{ le } \text{CO}_2 \text{ est bien à l'état gaz.}$$

• Dans 1 litre, cela donne un volume molaire :

$$V_{m,2} = 2,23 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1} \text{ compris entre ceux du liquide}$$

et de la vapeur : il y a coexistence des deux phases.

Sur le graphique, la transformation est représentée en trait plein : pour la transformation 1, tout est à l'état vapeur ; pour la transformation 2, il y a coexistence des deux phases liquide et vapeur.



2 • Le volume molaire de vapeur saturante est $V_{m,V} = 45,8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$. On suppose que cette vapeur obéit aux lois des gaz parfaits, ainsi :

$$P = \frac{RT_0}{V_{m,V}} = \frac{8,31 \cdot 273}{45,8 \cdot 10^{-5}} = 49,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Cette valeur est différente de la valeur expérimentale attendue $P_{\text{exp}} = 34,6 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; cette valeur met en cause la modélisation de la vapeur comme gaz parfait ; néanmoins on gardera la valeur trouvée pour éviter toute incohérence dans les résultats suivants.

3 • On cherche le titre en vapeur à la fin de l'expérience : on pose le titre x_V comme rapport entre les quantités de matière :

$$x_V = \frac{n_{\text{vapeur}}}{n_{\text{total}}} = \frac{n_V}{n}.$$

Le volume molaire s'écrit alors :

$$V_{m,2} = x_V V_{m,V} + (1 - x_V) V_{m,L},$$

ce qui donne :

$$x_V = \frac{V_{m,2} - V_{m,L}}{V_{m,V} - V_{m,L}} = \frac{22,3 \cdot 10^{-5} - 4,82 \cdot 10^{-5}}{45,8 \cdot 10^{-5} - 4,82 \cdot 10^{-5}} = 0,43 ;$$

le titre en vapeur est égal à $x_V = 0,43$.

4 • On calcule le travail de compression molaire reçu par le fluide.

De l'état initial à l'apparition de la première goutte de liquide, on suppose que le gaz suit la loi des gaz parfaits, donc :

$$\begin{aligned} W_{1,m} &= - \int_{V_{m,1}}^{V_{m,V}} P dV_m = - \int_{V_{m,1}}^{V_{m,V}} RT_0 \frac{dV_m}{V_m} \\ &= -RT_0 \ln \left(\frac{V_{m,V}}{V_{m,1}} \right) = 8,31 \cdot 273 \ln \left(\frac{2,23 \cdot 10^{-2}}{45,8 \cdot 10^{-5}} \right) \\ &= 8,825 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}, \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$W_1 = 38,8 \text{ kJ, pour } 4,4 \text{ moles.}$$

Ensuite l'évolution se fait à pression constante. Le travail de compression molaire lors de cette évolution est :

$$\begin{aligned} W_{2,m} &= -P(V_{m,2} - V_{m,V}) = 49,5 \cdot 10^5 (22,3 \cdot 10^{-5} - 45,8 \cdot 10^{-5}) \\ &= 1,16 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}, \end{aligned}$$

soit donc $W_2 = 5,12 \text{ kJ}$ pour la quantité de matière considérée.

Le travail de compression total est donc :

$$W = 43,9 \text{ kJ}.$$

Lors de la première phase, l'énergie interne ne varie pas ($\Delta U_1 = 0$) ; le transfert thermique est donc opposé au travail de compression, soit :

$$Q_{1,m} = -8,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}, \text{ et } Q_1 = 38,8 \text{ kJ}.$$

Lors de la seconde phase, le transfert thermique molaire est égal à la variation d'enthalpie molaire lorsque $1 - x_V$ moles passent de l'état vapeur à l'état liquide, soit :

$$\begin{aligned} Q_{2,m} &= \Delta H_2 = -(1 - x_V) L_V \\ &= -0,57 \cdot 10,2 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1} = -5,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}, \end{aligned}$$

soit, $Q_{2,m} = -25,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$

pour la quantité de matière considérée.

Le transfert thermique total est :

$$Q = -65,4 \text{ kJ}.$$

5 • On cherche les variations de diverses fonctions d'état :

$$\begin{aligned} \Delta U &= W + Q = 43,9 - 64,4 = -20,5 \text{ kJ} \\ &= W_2 + Q_2 \text{ car } \Delta U_1 = 0. \end{aligned}$$

Lors de la première phase $\Delta H_1 = 0$,

donc : $\Delta H = Q_2 = -25,6 \text{ kJ}$.

Pour le calcul de ΔS , lors de la première phase :

$$\Delta S_{1,m} = +R \ln \left(\frac{V_{m,V}}{V_{m,1}} \right) = \frac{Q_{1,m}}{T_0} \text{ (transformation isotherme),}$$

$$\text{d'où : } \Delta S_1 = \frac{Q_1}{T_0}$$

$$\text{et : } \Delta S_2 = \frac{\Delta H_2}{T_0} = \frac{Q_2}{T_0},$$

ce qui donne :

$$\Delta S = \frac{Q}{T_0} = -\frac{25,6 \cdot 10^3}{273} = 93,8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

La variation d'entropie est égale à l'entropie d'échange.
La transformation est réversible.

8 Surfusion du phosphore

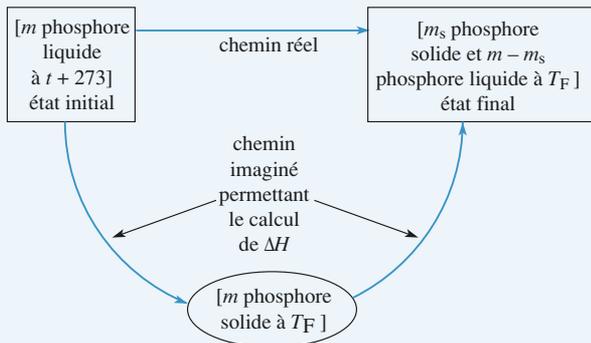
1 • On prend la quantité totale de matière de phosphore comme système.

• L'évolution se fait à pression extérieure constante avec égalité des pressions initiale et finale avec cette pression extérieure : $\Delta H = Q_P$.

• L'évolution est adiabatique – récipient calorifugé –, donc $Q_P = 0$.

L'état initial est connu et l'état final étant diphase, sous la pression de 1 bar, il est caractérisé par la température finale T_f et une masse m_s de phosphore solide à déterminer.

On peut choisir un chemin particulier pour calculer ΔH .



L'échauffement du liquide de $t + 273$ à T_f correspond à $\Delta H_1 = m c_{P(\text{liq})} (T_f - t - 273)$ et la solidification d'une masse m_s de phosphore à T_f sous la pression de 1 bar à $\Delta H_2 = -m_s l_f(T_f)$.

En écrivant $\Delta H_1 + \Delta H_2 = 0$, on obtient :

$$m_s = \frac{m c_{P(\text{liq})} (T_f - t - 273)}{l_f} = 3,8 \text{ g}.$$

2 • En reprenant les deux mêmes étapes, nous obtenons, pour la variation d'entropie :

$$\Delta S = m c_{P(\text{liq})} \ln \left[\frac{T_f}{t + 273} \right] - \frac{m_s l_f(T_f)}{T_f}.$$

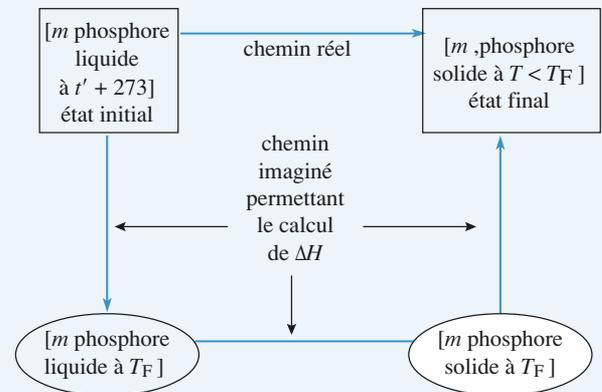
L'application numérique donne :

$$\Delta S = +0,255 - 0,251 = +0,004 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Le premier terme est positif puisqu'il correspond à l'augmentation de température d'une phase liquide et donc à une perte d'information (augmentation du désordre), et le deuxième terme est négatif puisque le passage du liquide au solide correspond à une augmentation d'ordre, donc de l'information. La somme des deux est bien positive, le système étant thermiquement isolé.

3 • Si la température est de $17,5^\circ\text{C}$, on peut penser que l'état final sera « tout solide » à une température inférieure à T_f .

En utilisant la même méthode qu'en 1), on choisit le chemin :



$$\Delta H = m [C_{P(\text{liq})} (T_f - t' - 273) l_f(T_f) + C_{P(\text{sol})} (T - T_f)] = 0$$

$$\Delta H = m [c_{P(\text{liq})} (T_f - t' - 273) - l_f(T_f) + c_{P(\text{sol})} (T - T_f)] = 0.$$

Soit $T = 316,8 \text{ K}$. Le système est bien sous une seule phase solide (très proche de sa température d'équilibre solide-liquide).

LES OBJECTIFS

- Connaître les trois types de machines dithermes.
- Connaître quelques mécanismes permettant de les réaliser concrètement.
- Savoir définir et calculer le rendement ou l'efficacité d'une machine.
- Savoir déterminer le maximum théorique du rendement ou de l'efficacité d'une machine fonctionnant avec deux sources données.

LES PRÉREQUIS

- Bilans d'énergie et d'entropie.
- Propriétés des gaz parfaits et des phases condensées.
- Relations de LAPLACE pour une transformation isentropique d'un gaz parfait.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Les techniques classiques de calcul, et en particulier la manipulation des inéquations : que devient $a < b$ lorsque l'on multiplie les deux termes par -1 ?

ESSENTIEL

◀ Caractéristiques

L'intérêt d'une machine thermique est de permettre une conversion d'énergie. Pour obtenir un fonctionnement continu en régime permanent, une machine thermique effectue des cycles. Les transformations subies par le fluide permettent les échanges énergétiques entre la machine et le milieu extérieur.

◀ Moteurs et récepteurs

- Une machine thermique est un moteur si elle fournit du travail. Cela revient à dire que le travail total échangé par la machine au cours d'un cycle est négatif.
- Par opposition, un récepteur est une machine qui reçoit du travail. Les récepteurs usuels sont les machines frigorifiques et les pompes à chaleur.

◀ Bilans énergétique et entropique

Soit une machine échangeant, au cours d'un cycle, les transferts thermiques Q_i avec des sources de températures T_i , et le travail total W avec le milieu extérieur. Ces grandeurs (W et Q_i) représentent ce qui est reçu par le fluide (**système avec lequel il faut raisonner dans le cas des machines thermiques**) au cours d'un cycle.

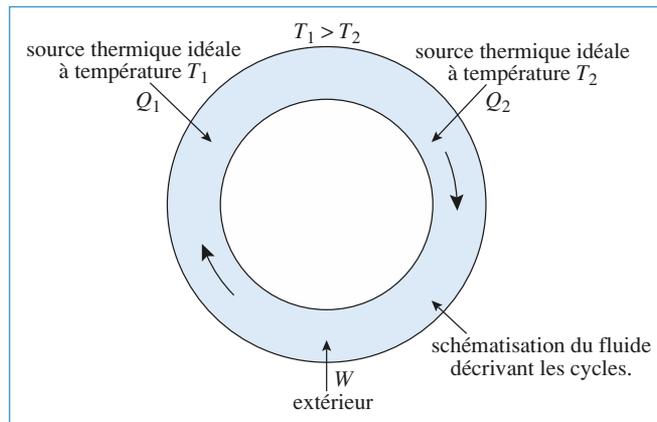
- Le bilan énergétique pour un cycle de la machine thermique est $W + \sum_i Q_i = 0$.
 - Le bilan entropique pour un cycle de la machine thermique est $\sum_i \frac{Q_i}{T_i} \leq 0$.
- Un moteur monotherme est impossible.

► Pour s'entraîner : ex. 3, 4 et 6

◀ Machines dithermes

Soit une machine thermique ditherme fonctionnant entre deux sources de chaleur à températures respectives T_1 et T_2 , avec $T_1 > T_2$.

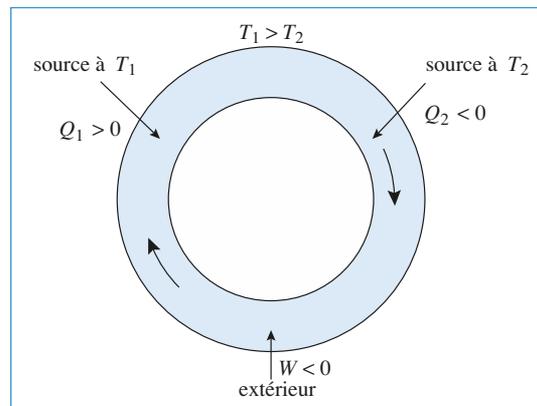
Au cours d'un cycle, le fluide échange avec l'extérieur un travail W , et avec les sources les échanges thermiques Q_1 et Q_2 .



◀ Moteur ditherme

Le rendement ρ d'un *moteur ditherme* est inférieur à une valeur limite fonction de la température des sources ; pour obtenir un travail W ($W < 0$), il faut récupérer l'énergie thermique Q_1 de la part de la source chaude ($Q_1 > 0$) avec $T_1 > T_2$:

$$W + Q_1 + Q_2 = 0, \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad \text{et} \quad \rho = -\frac{W}{Q_1}, \rho \leq 1 - \frac{T_2}{T_1} < 1.$$



Le rendement maximal serait obtenu pour le cas limite du moteur réversible. Ce rendement est obtenu pour un moteur de Carnot. Un cycle de Carnot est constitué de deux isothermes réversibles et de deux isentropiques.

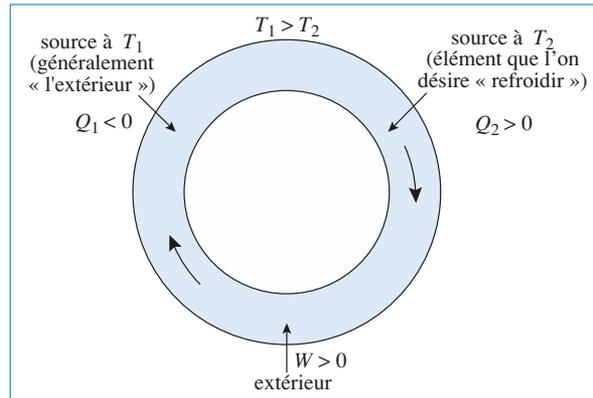
► Pour s'entraîner : ex. 1, 2, 5 et 8

Machine frigorifique ditherme

L'efficacité e_F d'une *machine frigorifique ditherme* est limitée par une valeur qui dépend de la température des sources.

Il faut dépenser l'énergie ($W > 0$), pour que la machine reçoive l'énergie thermique Q_2 de la source froide ($Q_2 > 0$) avec $T_1 > T_2$:

$$W + Q_1 + Q_2 = 0, \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad \text{et} \quad e_F = \frac{Q_2}{W} = \frac{1}{-\frac{Q_1}{Q_2} - 1}, \quad e_F \leq \frac{1}{\frac{T_1}{T_2} - 1} = \frac{T_2}{T_1 - T_2}.$$

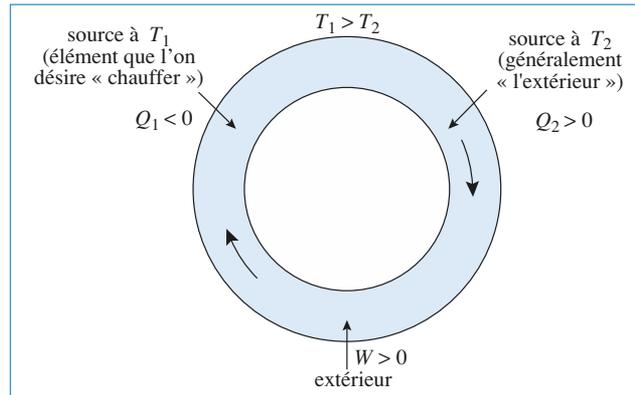


L'efficacité est maximale pour le cas limite de la machine réversible.

Pompe à chaleur ditherme

L'efficacité e_T (ou coefficient d'effet thermique) d'une *pompe à chaleur ditherme* est limitée par une valeur qui dépend de la température des sources.

Il faut dépenser l'énergie ($W > 0$), pour que la machine fournisse l'énergie thermique Q_1 à la source chaude ($Q_1 < 0$) avec toujours $T_1 > T_2$:



$$W + Q_1 + Q_2 = 0, \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0 \quad \text{et} \quad e_T = -\frac{Q_1}{W} = \frac{1}{1 + \frac{Q_1}{Q_2}}, \quad e_T \leq \frac{1}{1 - \frac{T_2}{T_1}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

L'efficacité est maximale pour le cas limite de la machine réversible.

► Pour s'entraîner : ex. 7

Conseils et pièges à éviter

- Pour un cycle, ou un nombre entier de cycles, la variation d'une fonction d'état est nulle. On peut donc toujours écrire que, pour un cycle : $\Delta S = 0$, que la machine soit réversible ou non. Cette relation ne fait que traduire la propriété « fonction d'état » de l'entropie S .
- Lorsque l'on étudie un élément d'une machine (correspondant à une partie du cycle), il ne faut pas confondre le travail utile et le travail total reçu par le fluide qui inclut le travail des forces de pression. Remarquons toutefois que, pour un cycle complet, le travail total des forces de pression est en général nul, ce qui permet d'identifier le travail utile et le travail total.
- Plutôt que de mémoriser des formules, il faut retenir qu'un rendement (ou une efficacité) est défini par :
$$\frac{\text{ce que l'on reçoit de la machine}}{\text{ce que l'on dépense}}$$

Pour déterminer cette grandeur, toujours positive, il faut :

- analyser la machine du point de vue de l'utilisateur ;
- déterminer *a priori* le signe des travaux et des échanges thermiques.

Ainsi, pour un moteur :

- $W < 0$, $Q_{\text{chaude}} > 0$
- l'utilisateur reçoit $|W| = -W$ et dépense Q_{chaude}
- $\rho = \frac{-W}{Q_{\text{chaude}}}$

1 Cycle de Stirling

Un système gazeux, constitué d'une masse $m = 1 \text{ g}$ d'air assimilé à un gaz parfait, est utilisé dans une machine thermique effectuant des cycles réversibles.

Le cycle est constitué de deux isothermes ($1 \rightarrow 2$ et $3 \rightarrow 4$) et de deux isochores ($2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$):

état	P (bar)	V (dm ³)	T (K)
(1)	40	0,08	
(2)			
(3)	1		300
(4)			

1 • Tracer le cycle dans le diagramme de Clapeyron. De quel type de machine s'agit-il ?

2 • Montrer que les transferts thermiques des évolutions isochores sont opposés.

3 • On admet que ces échanges thermiques se font avec un régénérateur interne à la machine et que les seuls transferts thermiques avec le milieu extérieur ont lieu durant les phases isothermes.

Déterminer le rendement du cycle.

4 • Montrer que le résultat précédent était prévisible sans calculs.

Données :

Masse molaire moyenne de l'air : $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Rapport des chaleurs massiques isobare et isochore :

$\gamma = 1,4$; $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Conseils

1) Remplir le tableau de l'énoncé et tracer le cycle à l'échelle.

2) Quel est le travail échangé lors d'une transformation isochore ? De quelle variable dépend l'énergie interne d'un gaz parfait ?

3) Appliquer le premier principe, puis calculer les transferts thermiques isothermes.

4) Quelle expression retrouve-t-on ? Pourquoi ?

Pour simplifier, on considère que l'air effectue un cycle fermé sans modification chimique. La combustion est remplacée par un apport de chaleur, et les deux phases échappement et admission sont remplacées par un refroidissement isochore.

Le cycle fictif $ABCD$, idéalisé, se décompose en 4 transformations successives :

Compression adiabatique réversible AB , échauffement isobare BC , détente adiabatique réversible CD et refroidissement isochore DA .

On pose $a = \frac{V_A}{V_B}$ et $b = \frac{V_C}{V_D}$. L'air contenu dans le

cylindre est un gaz parfait de rapport γ constant.

1 • Tracer l'allure du diagramme de Clapeyron (P, V) du cycle.

2 • Définir et calculer son rendement ρ en fonction des rapports a et b . Étudier très sommairement la fonction $\rho(a)$ pour b fixé.

3 • Calculer ρ et les températures pour $T_A = 300 \text{ K}$, $a = 20$ et $b = 3$. On prendra $\gamma = 1,4$. Pourquoi ce moteur n'a-t-il pas besoin de bougies d'allumage ? Pourquoi le carburant est-il injecté après la combustion et non admis avec l'air en début de cycle ?

Quelle serait la puissance théorique d'un moteur de cylindrée $V_A = 2 \text{ litres}$ et tournant à 3600 tours par minute ?

Conseils

• Le rendement d'un cycle fermé ditherme peut s'exprimer en fonction des échanges thermiques Q_1 et Q_2 , eux-mêmes fonction des températures. Il faut donc commencer par déterminer les températures en fonction de l'une d'entre elles.

• Le plus simple est d'exprimer les températures en fonction de T_B .

• Pour le calcul de la puissance, il faut déterminer la quantité d'air contenue dans le cylindre puis le travail fourni par le moteur au cours d'un cycle. Lors de l'admission (point A), la pression est égale à la pression atmosphérique. Attention aux unités !

2 Cycle de Diesel

Ce moteur, imaginé par Rudolf Diesel à la fin du XIX^e siècle est, comme le moteur à essence, un moteur à combustion interne à 4 temps : admission d'air frais, compression, injection de carburant et combustion, détente et échappement.

3 Réfrigérateur à absorption

Un réfrigérateur à absorption est une machine frigorifique *tritherme* sans échange de travail avec l'extérieur. L'énergie est fournie sous forme thermique, et à haute température T_0 , à un *bouilleur*. L'évaporateur est en contact thermique avec la source froide, de température T_2 . Le *condenseur*

est en contact thermique avec le milieu extérieur, de température T_1 . Ces diverses températures sont telles que $T_2 < T_1 < T_0$.

On ne décrit pas les mécanismes physiques qui permettent de faire en sorte que le fluide *reçoive* de l'énergie par transfert thermique au niveau de l'évaporateur.

Définir et calculer l'efficacité frigorifique maximale, fonction des trois températures T_0 , T_1 et T_2 .

Conseils

Il faut bien visualiser le sens des différents échanges énergétiques : quelle est l'énergie dépensée par l'utilisateur ? Quel est le gain énergétique pour la machine (se souvenir qu'il s'agit d'un réfrigérateur) ?

Il reste alors à appliquer les deux principes de la thermodynamique au fluide qui parcourt les cycles de la machine.

4 Température maximale d'un système isolé

Trois corps homogènes de même capacité thermique C forment les sources d'une machine thermique. L'ensemble constitue un système isolé mécaniquement et thermiquement.

Les températures initiales étant $T_{30} = 300 \text{ K}$, $T_{20} = 200 \text{ K}$ et $T_{10} = 100 \text{ K}$, déterminer la plus haute température que puisse atteindre l'une des sources.

Proposer une machine susceptible d'atteindre ce résultat.

Conseils

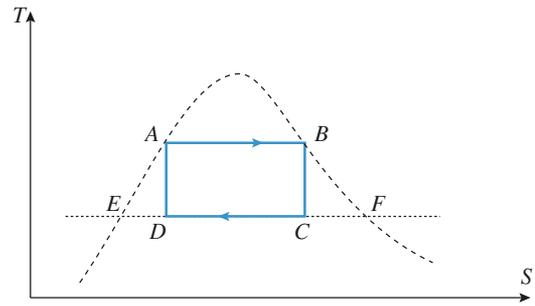
• On parle ici de « source » par abus de langage puisque leur température est variable.

L'énoncé ne mentionne pas la capacité thermique des éléments qui composent la machine. Il faut donc la considérer comme négligeable devant celle des sources. Dans ce cas, même si la machine n'effectue pas rigoureusement des cycles, on pourra encore négliger la variation d'énergie de la machine au cours d'un nombre entier de pseudo-cycles.

• Effectuer un bilan d'énergie et un bilan d'entropie pour le système isolé.

5 *Moteur à vapeur

Une masse M d'eau décrit un cycle dans la région liquide-vapeur. Le cycle est représenté par le rectangle $ABCD$ dans le diagramme entropique (T, S) (cf. la figure ci-après). Les transformations AB et CD sont des isothermes et les transformations BC et AD sont des isentropiques.



La courbe en trait pointillé représentée sur la figure est la courbe d'équilibre liquide-vapeur. Les points E et F sont sur cette courbe et sur la même isotherme que les points C et D .

Dans le tableau ci-dessous, on donne pour les points A , B , E et F : la température $T(\text{K})$, l'énergie interne massique $u(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$, l'entropie massique $s(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$, l'enthalpie massique $h(\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1})$:

points	T (K)	u ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)	s ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$)	h ($\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$)
A	453	$7,60 \cdot 10^2$	2,14	$7,82 \cdot 10^2$
B	453	$2,58 \cdot 10^3$	6,59	$2,77 \cdot 10^3$
E	313	$1,67 \cdot 10^2$	0,572	$1,67 \cdot 10^2$
F	313	$2,43 \cdot 10^3$	8,22	$2,56 \cdot 10^3$

- Interpréter les diverses zones du graphique (T, S) .
 - Donner la fraction de masse du système dans la phase vapeur aux points A et B ; on notera respectivement $x_{V,A}$ et $x_{V,B}$ ces fractions.
 - Calculer en fonction des entropies aux points A, B, E et F , la fraction de masse du système dans la phase vapeur aux points C et D ; on notera respectivement $x_{V,C}$ et $x_{V,D}$ ces fractions.

2 • Calculer les énergies internes massiques et enthalpies massiques aux points C et D du cycle en fonction de $x_{V,C}$ et $x_{V,D}$.

3 • Exprimer en fonction des enthalpies massiques et énergies internes massiques aux points A, B, C et D , les transferts thermiques et les travaux reçus dans chacune des parties du cycle.

4 • Calculer le rendement de ce cycle.

Comparer ce rendement à celui d'un cycle de Carnot entre les mêmes températures 453 K et 313 K .

Conseils

1) et 2) En utilisant la propriété d'extensivité de l'entropie, on trouvera une règle des moments dans un diagramme (T, s) .

3) On s'intéressera à des grandeurs massiques. Il faudra vérifier à la fin des calculs que sur le cycle décrit par le fluide, les variations des fonctions d'état sont nulles.

4) Le cycle proposé est-il un cycle de Carnot ?

6 Étude thermodynamique d'un complexe piscine-patinoire

Données : Chaleur massique de l'eau liquide :

$$c_1 = 4,18 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Chaleur massique de la glace :

$$c_2 = 2,09 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Chaleur latente massique de fusion de la glace sous la pression atmosphérique : $L = 3,34 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Lors du fonctionnement, en régime stationnaire, d'une installation sportive (complexe piscine-patinoire) :

- la masse d'eau $m_1 = 2,0 \cdot 10^6 \text{ kg}$ de la piscine est à la température uniforme $T_1 = 300,00 \text{ K}$;
- la masse d'eau $m_2 = 2,5 \cdot 10^5 \text{ kg}$ de la patinoire est à la température uniforme $T_2 = 263,00 \text{ K}$.

On admettra que, sous la pression atmosphérique, le changement d'état eau liquide-glace se fait à une température $T_0 = 273,15 \text{ K}$.

A • Préliminaire

Déterminer les capacités calorifiques C_1 , C_2 et C_2' des masses d'eau de la piscine (C_1), de l'eau de la patinoire sous phase liquide (C_2) et de l'eau de la patinoire sous phase solide (C_2').

A.N. : Calculer C_1 , C_2 et C_2' .

B • Mise en température de la glace de la patinoire et de l'eau de la piscine

On considère une pompe à chaleur fonctionnant de manière réversible avec comme source froide l'eau de la patinoire et comme source chaude l'eau de la piscine.

À l'instant initial (qu'on choisira comme origine des dates) les deux masses d'eau (liquide) sont à la même température T_i .

On suppose que les sources n'échangent de la chaleur qu'avec la machine.

1 • Évolution des températures lorsque les deux masses d'eau restent liquides

À la date t , l'eau de la piscine est à la température $T_1(t)$ et celle de la patinoire à $T_2(t)$.

a. Établir l'équation différentielle qui lie $T_1(t)$ et $T_2(t)$.

b. Intégrer cette équation entre l'instant initial et l'instant de date t .

c. Exprimer, en fonction de C_1 , C_2 , T_i et T_0 , la température T_3 de l'eau de la piscine lorsque la température de l'eau liquide de la patinoire est $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Exprimer en fonction de C_1 , C_2 , T_i , T_0 et T_3 , le travail, W_1 , échangé par le fluide circulant dans la pompe à chaleur avec le milieu extérieur. Préciser le sens de l'échange.

A.N. : Calculer T_3 et W_1 . *Donnée :* $T_i = 280,00 \text{ K}$.

2 • Évolution des températures lorsque l'eau de la patinoire se transforme en glace

Exprimer, en fonction de C_1 , T_0 , T_3 , L et m_2 , la température T_4 de l'eau de la piscine lorsque toute l'eau de la patinoire est sous forme de glace à $T_0 = 273,15 \text{ K}$. Exprimer, en fonction de C_1 , T_4 , T_3 , m_2 et L , le travail, W_2 , échangé par le fluide circulant dans la pompe à chaleur avec le milieu extérieur. Préciser le sens de l'échange.

A.N. : Calculer T_4 et W_2 .

3 • Évolution des températures lorsque la glace de la patinoire se refroidit

a. Exprimer, en fonction de C_1 , C_2' , T_2 , T_0 et T_4 , la température T_5 de l'eau de la piscine lorsque l'eau de la patinoire est sous forme de glace à $T_2 = 263,00 \text{ K}$.

Exprimer, en fonction de C_1 , C_2' , T_4 , T_5 , T_0 et T_2 , le travail W_3 échangé par le fluide circulant dans la pompe à chaleur avec le milieu extérieur. Préciser le sens de l'échange.

A.N. : Calculer T_5 et W_3 .

b. Exprimer, en fonction de C_1 , T_i et T_5 , l'énergie W_4 qu'il faut fournir à l'eau de la piscine pour élever la température par chauffage direct de T_i à T_5 .

A.N. : Calculer W_4 .

c. On dispose d'une puissance \mathcal{P} , supposée constante. Au bout de quelle durée τ la mise en température de l'ensemble sportif sera-t-elle réalisée ?

A.N. : Calculer τ (en jours, heures et minutes) avec :

$$\mathcal{P} = 200 \text{ kW}.$$

Conseils

A. Quelle est la définition d'une chaleur massique ?

B. 1) a) Comment s'écrit l'inégalité de Clausius pour un cycle réversible ?

c) Appliquer la relation du **B. 1) b)**. Pour obtenir W_1 , appliquer le premier principe. Quel signe doit avoir le travail échangé au cours d'un cycle pour une pompe à chaleur ?

2) Reprendre la démarche précédente en changeant l'origine des temps et en prenant garde au changement d'état.

3) a) Cf. ci-dessus.

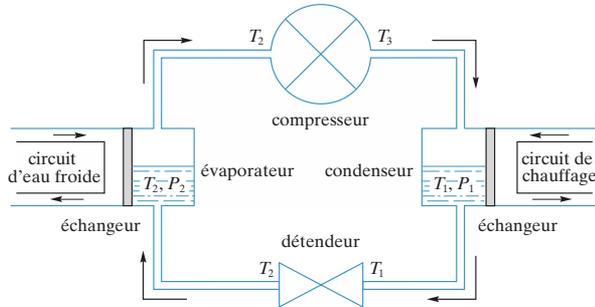
b) Appliquer le premier principe à l'eau de la piscine.

c) Quelle énergie a dû fournir la pompe à chaleur au fluide ? Relier cette énergie à P .

7 *Étude d'une pompe à chaleur

D'après ESIM.

Une pompe à chaleur à fréon 22 (CHF_2Cl : difluoro-mono-chlorométhane, actuellement interdit), prélève de la chaleur à un circuit d'eau froide et cède de la chaleur à de l'eau chaude qui circule dans le sol de l'habitation.



Le fréon décrit un cycle :

- dans l'évaporateur, il subit une évaporation complète sous la pression de vapeur saturante P_2 et à la température T_2 ;
- le fréon gazeux sort du compresseur à la température T_3 et sous la pression P_1 ;
- dans le condenseur le fréon gazeux se refroidit, puis se liquéfie complètement sous la pression de vapeur saturante P_1 et à la température T_1 ;
- en traversant le détendeur, le fréon subit une détente adiabatique passant par T_1, P_1 , à T_2, P_2 ; cette détente s'accompagne d'une vaporisation partielle du liquide.

On pose :

- $L_V(T)$: chaleur latente massique de vaporisation du fréon ;
- c_ℓ : capacité thermique massique du fréon liquide, supposée indépendante de T et de P .

En outre, on admet que :

- le fréon gazeux est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M , et pour lequel $\gamma = 1,20$;
- l'énergie cinétique macroscopique ainsi que l'énergie potentielle de pesanteur seront négligées dans tout le problème ;
- le volume massique V_ℓ du fréon liquide est indépendant de la pression et de la température ;
- l'installation fonctionne en régime permanent.

Données : $T_2 = 273 \text{ K}$; $T_1 = 305 \text{ K}$;

$L_V(T_2) = 205 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$; $L_V(T_1) = 175 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$;

$c_\ell = 1,38 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

$P_2 = 5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$; $P_1 = 12,65 \cdot 10^5 \text{ Pa}$;

$V_\ell = 0,75 \text{ dm}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$;

$R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$;

masse molaire du fréon : $M = 86,5 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$.

A • Étude de la compression

1 • En raisonnant sur un système que l'on définira soigneusement, relier la variation d'enthalpie massique du fréon durant la traversée du compresseur au transfert thermique massique q et au travail massique w_m qu'il a échangés avec le compresseur durant celle-ci.

2 • La compression est adiabatique et on admet que le gaz suit une compression de type polytropique $PV^\gamma = \text{cte}$.

En déduire T_3 , puis le travail W en fonction des données.

3 • Évaluer la variation d'entropie massique du fréon et conclure.

4 • Utilisation d'un diagramme entropique pour le calcul de w_m .

a. Pour une transformation quelconque du fréon gazeux entre les états (T_0, P_0) et (T, P) , calculer sa variation d'entropie massique $\Delta s = s - s_0$. En déduire l'équation d'une isobare dans le diagramme entropique (s en abscisses, T en ordonnées). Tracer l'isobare P_1 .

Par quel déplacement la courbe isobare correspondant à P_2 se déduira-t-elle de celle correspondant à P_1 ?

b. Représenter, sur le diagramme précédent, la compression du fréon gazeux de l'état (T_2, P_2) à l'état (T_3, P_1) . Montrer que le travail massique w_m échangé par le fréon correspond à l'aire d'une surface que l'on hachurera sur le diagramme (pour cela, introduire le point correspondant à l'état (T_2, P_1)).

B • Passage dans le condenseur

1 • Calculer le transfert thermique massique q_1 échangé par le fréon.

2 • Calculer sa variation d'entropie massique Δs_1 ($m = 1 \text{ kg}$).

C • Passage dans le détendeur à parois adiabatiques

1 • Démontrer que la détente est isenthalpique.

2 • En déduire la fraction massique x de fréon gazeux à la sortie du détendeur.

3 • Calculer la variation d'entropie massique du fréon Δs_2 .

D • Passage dans l'évaporateur

1 • Évaluer le transfert thermique massique q_2 échangé par le fréon.

2 • Calculer sa variation d'entropie Δs_3 .

E • Passage dans le compresseur

Le compresseur est entraîné par un moteur électrique de rendement électromécanique $r = 0,8$.

1 • Définir l'efficacité e de cette pompe à chaleur et l'évaluer.

2 • Quel avantage présente ce chauffage par rapport au chauffage électrique ?

F • Étude du cycle

- 1 • Vérifier le bilan énergétique sur le cycle.
- 2 • Représenter son diagramme entropique.

Conseils

- A. 1) On s'inspirera du bilan d'énergie effectué lors de l'étude de la détente de Joule-Thomson.
 2) Transformer la relation du texte en une relation en variables P et T . Que vaut la variation d'enthalpie d'un gaz parfait ?
 3) Comment s'exprime la variation d'entropie d'un gaz parfait en variables T et P ? Réfléchir au résultat obtenu par rapport à la relation du A. 2).
 4) a) Utiliser la relation du A. 3) pour une évolution quelconque. L'isobare P_2 est-elle en dessous ou au-dessus de l'isobare P_1 ?
 b) Comparer $s(T_2, P_2)$ et $s(T_3, P_1)$. Puisque $w_m = \Delta h$, utiliser le caractère de fonction d'état de h .
 B. 1) Les transformations dans le condenseur sont isobares. À quelle fonction d'état relier q_1 ?
 2) Calculer la variation d'entropie de chaque étape dans le condenseur.
 C. 1) Quelle détente reconnaît-on ?
 2) Exprimer l'enthalpie dans l'état initial et dans l'état final, en fonction des enthalpies massiques du gaz et du liquide et de x , puis utiliser le caractère de fonction d'état de h .
 3) Séparer en deux étapes la détente isenthalpique du fréon.
 D. Quelle sont les conditions de la transformation des $(1-x)$ kg de fréon liquide? En déduire q_2 et Δs_3 .
 E. Déterminer à quels éléments de la pompe à chaleur correspondent le gain et la dépense énergétique. En déduire e . Quelle est l'efficacité d'un chauffage électrique ?
 F. On prendra soin, pour le diagramme entropique, de représenter la courbe de saturation ainsi que les isobares P_1 et P_2 .

8 Étude d'un turbocompresseur à gaz

D'après ENS Cachan.

Ce problème a pour but l'étude thermodynamique d'un turbocompresseur à gaz destiné à la propulsion d'un cargo. Les divers éléments du système seront d'abord étudiés un par un dans la partie A, puis réunis dans la partie B.

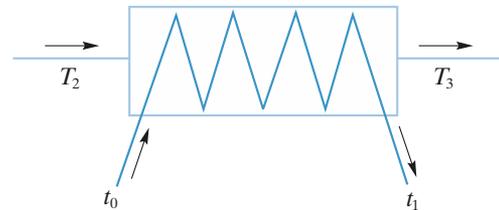
Dans tout le problème, on négligera d'éventuelles variations d'énergie cinétique ou potentielle de pesanteur. Le gaz utilisé sera toujours considéré comme parfait, de chaleur massique à pression constante c_p ($c_p = \text{cte}$). Les échanges de travail et chaleur seront enfin toujours considérés du point de vue du gaz.

Partie A

I • Étude d'un réfrigérant

Dans le réfrigérant supposé parfaitement calorifugé, représenté ci-dessous (*doc. 1*), le gaz est refroidi à pression constante, de la température T_2 à la température T_3 , au moyen d'un circuit d'eau (de chaleur massique c constante) qui, elle, est réchauffée de t_0 à t_1 .

- 1 • Le débit massique d du gaz étant imposé, déterminer le débit massique D nécessaire du circuit d'eau de refroidissement.



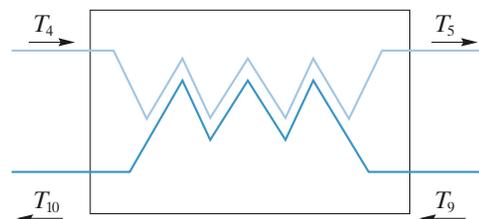
Doc. 1

II • Étude d'un échangeur à contre-courant

L'échangeur de chaleur représenté ci-dessous (*doc. 2*) est également parfaitement calorifugé.

Il comporte deux canalisations dans lesquelles le même gaz circule avec le même débit massique, mais dans des sens opposés.

Les températures d'entrée, supposées connues, seront notées T_4 et T_9 et les températures de sorties respectives T_5 et T_{10} . Dans chaque canalisation, la pression est constante.



Doc. 2

- 2 • On suppose tout d'abord réversibles les transformations subies par le gaz dans chaque canalisation. En utilisant les fonctions enthalpie et entropie, écrire les relations reliant T_5 et T_{10} à T_4 et T_9 .

- 3 • En déduire les solutions physiquement acceptables pour T_5 et T_{10} .

4 • Les transformations dans l'échangeur sont en fait irréversibles. Quelles sont les inégalités satisfaites par T_5 et T_{10} , si on suppose $T_9 > T_4$?

5 • On définit l'efficacité de l'échangeur comme étant

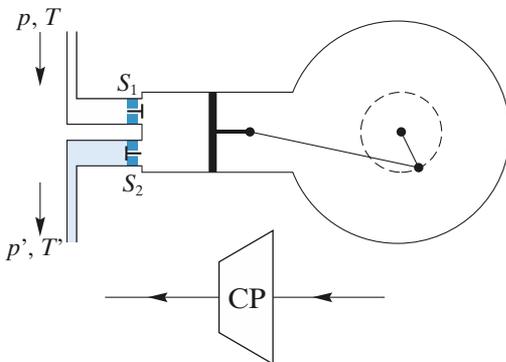
$$e = \frac{T_5 - T_4}{T_9 - T_4} \text{ en considérant la canalisation 4-5.}$$

Montrer qu'on obtient la même efficacité en considérant la canalisation 9-10.

III • Étude d'un compresseur

Le compresseur à piston représenté ci-dessous (*doc. 3*) fonctionne en trois temps, correspondant à un aller et retour complet du piston :

- la soupape S_1 étant ouverte et S_2 fermée, le piston initialement à gauche (volume nul) recule vers la droite en aspirant, à pression p et température T constantes, une masse m de gaz qui occupe alors un volume V ;
- les deux soupapes étant fermées, le piston avance partiellement en comprimant le gaz de façon supposée adiabatique réversible, jusqu'à un volume V' , correspondant à une pression p' et une température T' ;
- S_1 étant fermée et S_2 ouverte, le piston refoule tout le gaz à p' et T' constantes et se retrouve en position initiale.



Doc. 3

6 • Déterminer le travail total reçu par le gaz de la part du piston pour un aller et retour de celui-ci. Par la variation de quelle fonction d'état massique du gaz, entre les états (p, T) et (p', T') , le travail w reçu par unité de masse de gaz comprimé s'exprime-t-il?

7 • Le gaz étant caractérisé par une constante d'état massique r (quotient de la constante d'état molaire R des gaz parfaits par la masse molaire M du gaz) et le rapport :

$$\frac{c_p}{c_v} = \gamma,$$

calculer w et T' en fonction de p, p', T, γ et r .

8 • Le fonctionnement du compresseur (toujours parfaitement calorifugé) est en fait irréversible, de sorte que le travail massique réel w' reçu par le gaz, toujours supposé parfait, est supérieur à w .

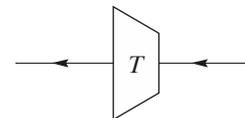
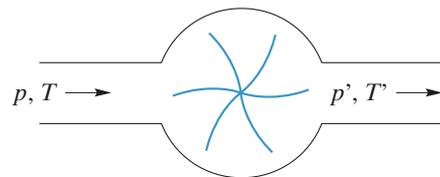
On définit alors le rendement η_1 du compresseur par le rapport $\eta_1 = \frac{w}{w'}$.

Connaissant η_1 , déterminer la température réelle T'' du gaz, comprimé de p à p' , en sortie du compresseur.

IV • Étude d'une turbine

Dans la turbine représentée symboliquement ci-dessous (*doc. 4*), le gaz entre à la pression p , à la température T , échange avec les pales de la turbine un travail w par unité de masse, et sort détendu à la pression p' et la température T' .

La turbine est parfaitement calorifugée et fonctionne en régime permanent : les débits massiques de gaz à l'entrée et à la sortie sont identiques et le système constitué du gaz contenu dans la turbine a une énergie interne constante.



Doc. 4

9 • Par analogie avec l'expérience de Joule-Thomson, ou en effectuant un bilan énergétique tenant compte des échanges de matière et du travail des forces de pression, à l'entrée comme à la sortie, montrer que w représente la variation d'enthalpie massique du gaz entre l'entrée et la sortie de la turbine.

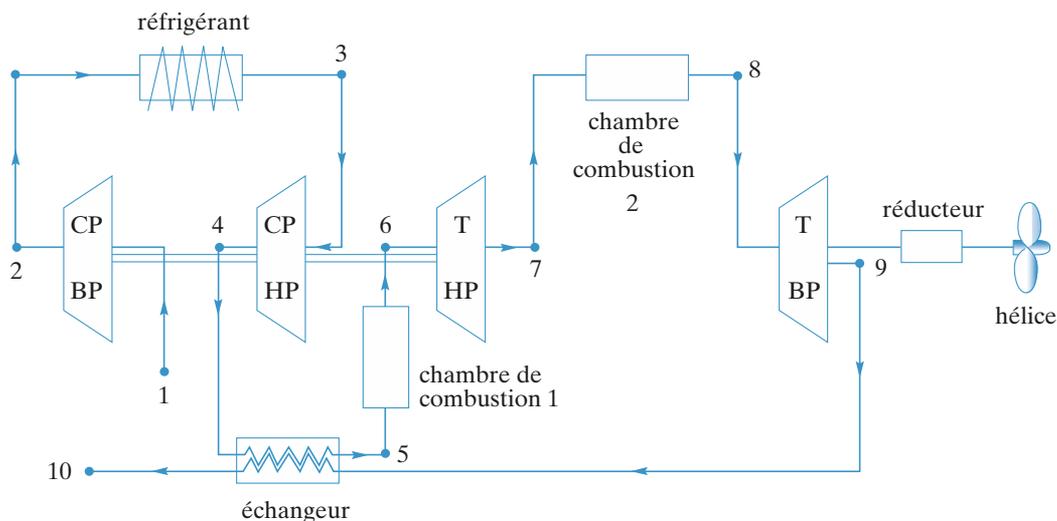
10 • En supposant réversible la détente du gaz (de mêmes caractéristiques qu'à la question 7)), calculer T' et w .

11 • Le fonctionnement de la turbine est en fait irréversible et on appelle w' le travail massique réel échangé entre le gaz et les pales de la turbine.

Quelle est l'inégalité vérifiée par $|w|$ et $|w'|$? En déduire une définition du rendement η_2 de la turbine et calculer la température réelle T'' en sortie de turbine.

Partie B

Les divers éléments précédemment étudiés font partie du système de propulsion d'un cargo représenté page suivante (*doc. 5*) :



Doc. 5

Ce système comprend :

- un réfrigérant ;
- un échangeur ;
- deux compresseurs : basse pression (BP) et haute pression (HP) ;
- deux turbines BP et HP ;
- deux chambres de combustion qui, à pression constante, élèvent la température du gaz.

Le gaz suit le trajet 1, 2, ..., 10 et les seules variations de pression sont dues aux compresseurs et aux turbines.

Les deux turbines, enfin, sont telles que $\frac{p_6}{p_7} = \frac{p_8}{p_9}$.

Le tableau incomplet représenté ci-après indique les caractéristiques connues du gaz à chacune des étapes du circuit.

p (Pa. 10^5)	T (K)	points du circuit
1	283	1
		2
215	300	3
		4
		5
5,7	943	6
		7
	955	8
		9
1		10

12 • En utilisant les résultats de la partie A, compléter le tableau :

- dans le cas idéal de fonctionnement réversible de tous les éléments ;
- dans le cas réel irréversible.

Données : $r = 287 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
 $c_p = 1\,000 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$; $e = 0,80$;
 $\eta_1 = 0,86$; $\eta_2 = 0,88$; $\gamma = 1,4$.

13 • Calculer les chaleurs et les travaux massiques échangés dans les différentes étapes du système :

- w_{12} et w_{34} pour les compresseurs ;
- w_{67} et w_{89} pour les turbines ;
- q_{56} et q_{78} pour les chambres de combustion.

14 • Définir et déterminer littéralement et numériquement le rendement global η_g du système de propulsion.

On désire obtenir, au niveau de l'hélice, une puissance de 3 000 kW.

Calculer alors le débit massique d du gaz dans son circuit.

Conseils

1) Étudier le transfert thermique entre une masse dm de gaz et une masse dm_0 d'eau.

Remarquer que l'évolution est isobare.

2) Effectuer un bilan énergétique et un bilan entropique sur le système constitué de deux masses dm parcourant chacune une canalisation.

3) Résoudre le système de la question précédente et garder la solution qui correspond à un échange thermique entre les canalisations.

4) Il faut tenir compte de l'entropie créée au cours de l'évolution des deux masses. Réfléchir à la signification physique du résultat.

5) Réfléchir à la signification de la définition de e . Comment définir alors e' pour l'autre canalisation? Que penser du résultat $e = e'$?

6) Il s'agit d'un écoulement de fluide dans un élément de machine thermique : que vaut Δh ?

7) Quelle loi appliquer pour une isentropique de gaz parfait?

8) Exprimer w' en fonction de T'' puis en fonction de T' .

9) Cf. la question 6).

10) Cf. la question 7).

11) Cf. la question 8).

12) Il faut utiliser tous les résultats précédents.

13) Comment relier q_{ij} ou w_{ij} à Δh_{ij} pour une transformation $i \rightarrow j$?

14) Quel est le gain énergétique de l'installation? Dans quels éléments se fait la dépense énergétique?

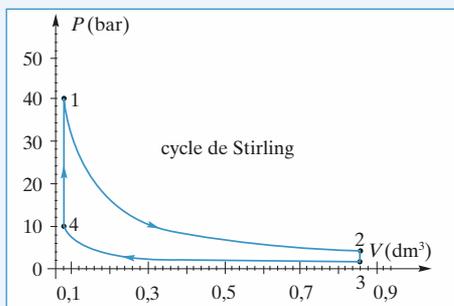
1 Cycle de Stirling

1 • En utilisant le caractère isochore ou isotherme des différentes transformations, on peut compléter le *tableau* de l'énoncé, sachant que la quantité de matière de gaz qui parcourt les cycles est :

$$n = \frac{m}{M} = 3,45 \cdot 10^{-2} \text{ mol}.$$

état	P (bar)	V (dm ³)	T (K)
(1)	40	0,08	1 116
(2)	3,72	0,86	1 116
(3)	1	0,86	300
(4)	10,75	0,08	300

Le tracé s'effectue avec une machine graphique :



Le cycle est parcouru dans le sens horaire ; il est donc moteur.

2 • Les travaux mis en jeu ne sont ici que des travaux de forces pressantes ; pour les évolutions isochores, $W = 0$. Ainsi, $\Delta U = Q_v$. Or, l'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de T et la première isochore fait passer le gaz de T_1 à T_2 tandis que la deuxième le ramène de T_2 à T_1 . Les variations d'énergie interne sont opposées et les échanges thermiques aussi.

3 • Le rendement s'écrit :

$$\rho = \frac{\text{gain énergétique}}{\text{dépense énergétique}} = -\frac{W_{\text{cycle}}}{Q_{12}}.$$

En effet, seuls Q_{12} et Q_{41} sont positifs, mais Q_{23} est régénérée et annule la dépense de l'isochore $4 \rightarrow 1$; seul Q_{12} est à considérer pour les dépenses énergétiques.

Il ne reste plus qu'à obtenir Q_{12} et Q_{34} à l'aide du bilan énergétique :

$$W_{\text{cycle}} = -(Q_{12} + Q_{34}) \text{ et finalement } \rho = 1 + \frac{Q_{34}}{Q_{12}}.$$

Pour une évolution isotherme de gaz parfait, $\Delta U = 0$,

$$\text{soit : } Q = -W = \frac{m}{M} RT \ln \left(\frac{V_{\text{final}}}{V_{\text{initial}}} \right).$$

$$\text{Soit ici : } Q_{12} = \frac{m}{M} = RT_1 \ln \left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}} \right)$$

$$\text{et : } Q_{34} = -\frac{m}{M} RT_2 \ln \left(\frac{V_{\text{max}}}{V_{\text{min}}} \right).$$

$$\rho = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,73.$$

4 • On retrouve l'expression du rendement d'un moteur de Carnot : les échanges thermiques isochores sont internes à la machine et n'interviennent pas dans les bilans énergétiques et entropiques, aussi le rendement de ce moteur réversible découle-t-il effectivement des égalités :

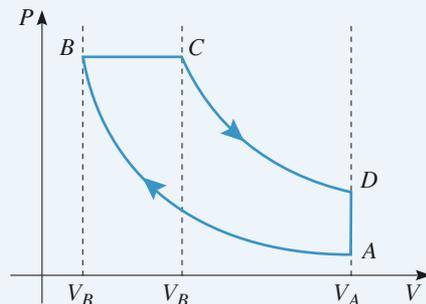
$$W_{\text{cycle}} = -(Q_{12} + Q_{34}) \text{ et } \frac{Q_{12}}{T_1} + \frac{Q_{34}}{T_2} = 0,$$

ce qui permet de démontrer le théorème de Carnot.

Remarque : Ce rendement théorique est inaccessible, un régénérateur parfait étant impossible à concevoir.

2 Cycle de Diesel

1 •



2 • La dépense d'énergie correspondant à la chaleur fournie par la combustion est égale à l'échange thermique Q_{BC} . Les phases AB et CD étant adiabatiques, le bilan énergétique du cycle s'écrit :

$$\Delta U = 0 = W + Q_{BC} + Q_{DA}.$$

On en déduit le rendement :

$$\rho = \frac{-W}{Q_{BC}} = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}$$

BC étant isobare et DA isochore, on exprime les transferts thermiques en fonction des températures :

$$Q_{BC} = n C_{p,m}(T_C - T_B) \text{ et } Q_{DA} = n C_{v,m}(T_A - T_D)$$

$$\rho = 1 - \frac{T_D - T_A}{\gamma(T_C - T_B)}.$$

Il reste à déterminer les températures.

A et B étant sur une isentropique : $T_A = T_B a^{1-\gamma}$.

Comme $P_B = P_C$: $T_C = b T_B$

C et D étant sur une isentropique : $T_D = T_C \left(\frac{a}{b} \right)^{1-\gamma}$.

D'où : $T_D = T_B b^\gamma a^{1-\gamma}$.

On en déduit le rendement en fonction de a et b :

$$\rho = 1 - \frac{(b^\gamma - 1)}{\gamma(b - 1)} \frac{1}{a^{\gamma-1}}.$$

À b fixé, r est une fonction croissante de a qui tend vers 1 pour les grandes valeurs de a . Le rendement augmente avec le taux de compression a .

3 • $\rho = 0,60$; $T_B = T_A 20^{0,4} = 994$ K ;

$T_C = 2,98 \cdot 10^3$ K ; $T_D = 1,40 \cdot 10^3$ K .

À la température T_B , le carburant s'enflamme spontanément. Si celui-ci était présent dès le début de la compression, il s'enflammerait avant d'atteindre le point B .

Ce procédé permet d'utiliser des valeurs élevées du taux de compression a et donc d'augmenter le rendement théorique.

Dans un moteur à essence, le carburant est présent dès l'admission, ce qui limite le taux de compression et donc le rendement.

$n = \frac{P_{\text{atm}} V_A}{RT_A}$ est la quantité d'air contenue.

$$Q_1 = \frac{P_{\text{atm}} V_A}{T_A} \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_C - T_B) = 4,63 \text{ kJ}.$$

Pour un cycle : $|W| = \rho Q_1 = 2,8$ kJ

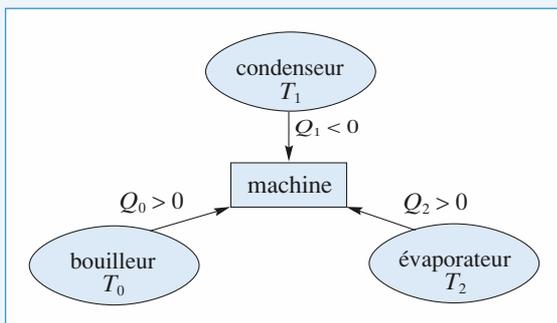
La durée d'un cycle est $T = 1/3600$ mn = $1/60$ s .

La puissance est donc : $\mathcal{P} = \frac{W}{T} = 1,7 \cdot 10^2$ kW .

Pour un cycle réel, la puissance fournie par le moteur est environ deux fois plus faible.

3 Réfrigérateur à absorption

On peut résumer les échanges thermiques que subit le fluide parcourant le réfrigérateur par un schéma :



• Le bouilleur fournit un transfert thermique Q_0 ($Q_0 > 0$) au système fluide de la machine : c'est le « prix » énergétique du fonctionnement.

• En s'évaporant, le fluide reçoit le transfert thermique Q_2 ($Q_2 > 0$) de la part de la source froide, l'évaporateur, c'est-à-dire de l'intérieur du réfrigérateur : il s'agit donc du gain énergétique de la machine.

• Dans le condenseur, le fluide cède une énergie thermique ; le fluide reçoit donc le transfert thermique Q_1 négatif de la

part du condenseur ; celui-ci est perdu dans le milieu ambiant : il ne faut pas le prendre en compte dans l'évaluation de l'efficacité.

L'efficacité de ce réfrigérateur est donc $e = \frac{Q_2}{Q_0}$.

Sur un cycle, le bilan énergétique appliqué au fluide parcourant les différents organes de la machine s'écrit :

$$\Delta U = 0 = Q_0 + Q_1 + Q_2. \quad (1)$$

Le bilan entropique sur le même système est :

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \mathcal{S}_{\text{créée}},$$

soit :

$$\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0.$$

L'efficacité maximale sera obtenue pour une machine fonctionnant réversiblement, soit pour $\mathcal{S}_{\text{créée}} = 0$ ou :

$$\frac{Q_0}{T_0} + \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0. \quad (2)$$

En regroupant (1) et (2), on obtient :

$$e = \frac{T_2(T_0 - T_1)}{T_0(T_1 - T_2)}.$$

Remarque : On peut aussi dissocier la machine tritherme en un moteur diatherme fonctionnant entre T_0 et T_1 dont le travail alimente une machine frigorifique fonctionnant entre T_1 et T_2 .

Le rendement du moteur est $1 - \frac{T_1}{T_0}$ et l'efficacité de la machine $\frac{T_2}{T_1 - T_2}$.

L'efficacité de la machine ainsi modélisée est :

$$e = \left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right) \left(\frac{T_2}{T_1 - T_2}\right),$$

ce qui correspond au résultat ci-dessus.

4 Température maximale d'un système isolé

L'ensemble sources + machine est isolé :

$$\Delta U_{\text{total}} = 0 = \Delta U_{\text{machine}} + \Delta U_{\text{sources}}.$$

La machine n'effectue pas de cycles au sens strict, car la température des sources évolue lentement.

Toutefois, si on néglige la capacité thermique de la machine devant celle des sources, on peut négliger $\Delta U_{\text{machine}}$ pour un nombre entier de pseudo-cycles.

Il reste :

$$\Delta U_{\text{sources}} = 0 = C(T_1 - T_{10}) + C(T_2 - T_{20}) + C(T_3 - T_{30}).$$

D'où : $T_1 + T_2 + T_3 = T_{10} + T_{20} + T_{30}$.

De plus : $\Delta S_{\text{sources}} + \Delta S_{\text{machine}} \geq 0$.

Soit, pour un nombre entier de cycles :

$$\Delta S_{\text{sources}} \geq 0.$$

$$C \ln \frac{T_1}{T_{10}} + C \ln \frac{T_2}{T_{20}} + C \ln \frac{T_3}{T_{30}} \geq 0.$$

Dans le cas limite de la réversibilité, on a alors :

$$T_1 T_2 T_3 = T_{10} T_{20} T_{30}.$$

On suppose T_3 extrémal :

$$dT_3 = 0, \text{ d'où } dT_1 + dT_2 = 0 \text{ et } \frac{dT_1}{T_1} + \frac{dT_2}{T_2} = 0,$$

soit $T_1 = T_2$.

$T_{3\max}$ est donc solution de l'équation.

$$T_{3\max} (T_{10} + T_{20} + T_{30} + T_{3\max})^2 = 4T_{10} T_{20} T_{30},$$

d'où : $T_{3\max} = 330 \text{ K}, T_1 = T_2 = 135 \text{ K}.$

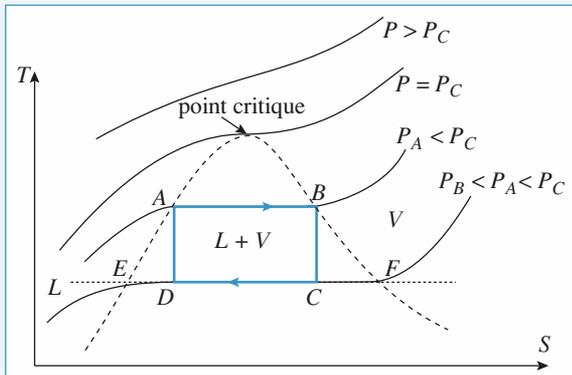
La source de température T_3 peut être considérée comme la source chaude d'une pompe à chaleur. Le travail peut lui être fourni par un moteur ditherme fonctionnant entre les deux autres sources qui cessent de fonctionner lorsque $T_1 = T_2$.

Remarquons que ce résultat aurait été identique si nous avions choisi T_1 ou T_2 :

$$T_{2\max} (T_{10} + T_{20} + T_{30} + T_{2\max})^2 = 4T_{10} T_{20} T_{30}.$$

5 Moteur à vapeur

1 • On indique sur le graphique ci-après, les diverses isobares et les domaines d'existences des phases.



• En A , le fluide est entièrement sous phase liquide, donc $x_{V,A} = 0$.

• En B , le fluide est entièrement sous phase vapeur, donc $x_{V,B} = 1$.

On appelle $x_{V,C}$ la fraction de masse du système dans la phase vapeur en C ; l'entropie étant une grandeur extensive, on a :

$$s_C = s_B = x_{V,C} s_F + (1 - x_{V,C}) s_E, \text{ ce qui donne :}$$

$$x_{V,C} = \frac{s_C - s_E}{s_F - s_E} = \frac{CE}{FE}, \quad x_{V,C} = 0,787.$$

On appelle $x_{V,D}$ la fraction de masse du système dans la phase vapeur en D ; l'entropie étant une grandeur extensive, on a :

$$s_D = s_A = x_{V,D} s_F + (1 - x_{V,D}) s_E, \text{ ce qui donne :}$$

$$x_{V,D} = \frac{s_D - s_E}{s_F - s_E} = \frac{DE}{FE}, \quad x_{V,D} = 0,205.$$

2 • On a déjà :

$$u_A = 7,60 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad u_B = 2,58 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1};$$

$$h_A = 7,82 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \quad h_B = 2,77 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'énergie interne et l'enthalpie sont des grandeurs extensives, donc :

$$\begin{aligned} u_C &= x_{V,C} u_F + (1 - x_{V,C}) u_E \\ &= 0,787 \cdot 2,43 \cdot 10^3 + 0,213 \cdot 1,67 \cdot 10^2 \\ &= 1,95 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_D &= x_{V,D} u_F + (1 - x_{V,D}) u_E \\ &= 0,205 \cdot 2,43 \cdot 10^3 + 0,795 \cdot 1,67 \cdot 10^2 \\ &= 6,31 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_C &= x_{V,C} h_F + (1 - x_{V,C}) h_E \\ &= 0,787 \cdot 2,56 \cdot 10^3 + 0,213 \cdot 1,67 \cdot 10^2 \\ &= 2,05 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h_D &= x_{V,D} h_F + (1 - x_{V,D}) h_E \\ &= 0,205 \cdot 2,56 \cdot 10^3 + 0,795 \cdot 1,67 \cdot 10^2 \\ &= 6,58 \cdot 10^2 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

3 • Transformation AB

La transformation se fait à pression constante, donc :

$$q_{AB} = h_B - h_A = 2,77 \cdot 10^3 - 7,82 \cdot 10^2 = 1,99 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

La variation d'énergie interne massique est égale à :

$$u_B - u_A = 2,58 \cdot 10^3 - 7,60 \cdot 10^2 = 1,82 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'application du premier principe donne :

$$\begin{aligned} w_{AB} &= u_B - u_A - q_{AB} = 1,82 \cdot 10^3 - 1,99 \cdot 10^3 \\ &= -0,17 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

Transformation BC

La transformation est adiabatique, donc :

$$q_{BC} = 0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

La variation d'énergie interne massique est égale à :

$$u_C - u_B = 1,95 \cdot 10^3 - 2,58 \cdot 10^3 = -0,63 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'application du premier principe donne :

$$w_{BC} = u_C - u_B = -0,63 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Transformation CD

La transformation se fait à pression constante, donc :

$$q_{CD} = h_D - h_C = 6,58 \cdot 10^2 - 2,05 \cdot 10^3 = -1,39 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

transformation	Δu (kJ · kg ⁻¹)	Δh (kJ · kg ⁻¹)	Δs (kJ · kg ⁻¹)	w (kJ · kg ⁻¹)	q (kJ · kg ⁻¹)	$T \cdot \Delta s$ (kJ · kg ⁻¹)
AB	+ 1,82 · 10 ³	+ 1,99 · 10 ³	+ 4,45	- 0,17 · 10 ³	1,99 · 10 ³	+ 2,01 · 10 ³
BC	- 0,63 · 10 ³	- 0,72 · 10 ³	0	- 0,63 · 10 ³	0	
CD	- 1,32 · 10 ³	- 1,39 · 10 ³	- 4,45	+ 0,07 · 10 ³	- 1,39 · 10 ³	- 1,39 · 10 ³
DA	+ 0,13 · 10 ³	+ 0,12 · 10 ³	0	+ 0,13 · 10 ³	0	
cycle complet	0,00 · 10 ³	0,00 · 10 ³	0,0	- 0,60 · 10 ³	0,60 · 10 ³	

La variation d'énergie interne massique est égale à :
 $u_D - u_C = 6,31 \cdot 10^2 - 1,95 \cdot 10^3 = -1,32 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

L'application du premier principe donne :

$$w_{CD} = u_D - u_C - q_{CD} = -1,32 \cdot 10^3 + 1,39 \cdot 10^3 \\ = -0,70 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Transformation DA

La transformation est adiabatique, donc :

$$q_{DA} = 0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

La variation d'énergie interne massique est égale à :

$$u_A - u_D = 7,60 \cdot 10^2 - 6,31 \cdot 10^2 = -0,13 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

L'application du premier principe donne :

$$w_{DA} = u_A - u_D = -0,13 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

On regroupe les divers résultats dans le *tableau* ci-dessus. (Ces diverses grandeurs sont à multiplier par M , la masse de fluide utilisé.)

Remarque : On vérifie divers résultats attendus :

Au cours d'un cycle : $\Delta u = 0$ (donc $w_{\text{total}} + q_{\text{total}} = 0$) ;
 $\Delta h = 0$; $\Delta s = 0$.

4 • Le rendement de ce cycle est égal au travail récupéré sur l'énergie dépensée, ce qui donne :

$$\eta = \frac{-w_{\text{total}}}{q_{AB}}, \text{ soit } \eta = \frac{-w_{\text{total}}}{Q_{AB}} = \frac{0,60}{1,99} = 0,30.$$

Examinons un cycle de Carnot fonctionnant réversiblement entre les deux mêmes sources de chaleur à température T_A et T_C ($T_A > T_C$). Ce cycle est constitué aussi de deux isothermes (AB et CD) et de deux isentropiques (BC et DA).

La variation d'énergie interne du fluide sur le cycle est nulle, soit :

$$W + Q_{AB} + Q_{CD} = 0.$$

La variation d'entropie du fluide étant nulle au cours du même cycle, soit :

$$\Delta S = 0 = \mathcal{S}_{\text{échange}} + \mathcal{S}_{\text{créée}};$$

l'entropie d'échange avec les sources de chaleur idéales

$$\text{donne : } \mathcal{S}_{\text{échange}} = \frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CD}}{T_C};$$

la transformation subie par le fluide étant réversible :

$$\mathcal{S}_{\text{créée}} = 0, \text{ ainsi : } \frac{Q_{AB}}{T_A} + \frac{Q_{CD}}{T_C} = 0.$$

Le rendement est défini par :

$$\eta = \frac{-W}{Q_{AB}} = \frac{Q_{AB} + Q_{CD}}{Q_{AB}} = 1 + \frac{Q_{CD}}{Q_{AB}} \\ = 1 - \frac{T_C}{T_A} = 1 - \frac{313}{453} = 0,31.$$

Les rendements sont équivalents, car on est en présence d'un cycle de Carnot. L'écart ($0,31 - 0,30 = 0,01$) s'explique par la précision des diverses données numériques.

6 Étude thermodynamique d'un complexe piscine-patinoire

A • Par définition des chaleurs massiques, $C_i = m_i c_i$:

C_1	$8,360 \cdot 10^9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
C_2	$1,045 \cdot 10^9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
C_2'	$0,523 \cdot 10^9 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

B • 1 a. La pompe à chaleur fonctionne entre les deux sources de températures $T_1(t)$ et $T_2(t)$; le fonctionnement étant réversible, l'application du deuxième principe au système fluide qui circule dans la pompe conduit, pour un cycle, à l'égalité de Clausius :

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0.$$

Or, chaque transfert thermique se déroule à pression extérieure constante, soit pour l'eau de la piscine :

$dH_{\text{piscine}} = -\delta Q_1$, et d'autre part, $dH_{\text{piscine}} = C_1 dT_1$,
 et pour l'eau de la patinoire :

$$dH_{\text{patinoire}} = -\delta Q_2 \text{ et } dH_{\text{patinoire}} = C_2 dT_2.$$

Ces deux relations donnent l'équation différentielle suivante :

$$C_1 \frac{dT_1}{T_1} + C_2 \frac{dT_2}{T_2} = 0.$$

b. L'intégration conduit à :

$$C_1 \ln \frac{T_1(t)}{T_1} + C_2 \ln \frac{T_2(t)}{T_2} = 0,$$

en tenant compte des conditions initiales.

c. Lorsque $T_2 = T_0$ et $T_1 = T_3$, en remplaçant dans la relation précédente, on obtient :

$$T_3 = T_1 \left(\frac{T_0}{T_1} \right)^{\frac{C_2}{C_1}}.$$

L'application numérique donne $T_3 = 280,87 \text{ K}$.

Le fluide a reçu de la part du milieu extérieur un travail :

$W_1 = -[Q_1 + Q_2]$ puisque pour chaque cycle :

$$dU = \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 \text{ et } dU = 0.$$

Or, $\delta Q_i = -C_i dT_i$ soit, $Q_1 = -C_1(T_3 - T_i)$ et

$Q_2 = -C_2(T_0 - T_i)$; en définitive :

$$W_1 = C_1(T_3 - T_i) + C_2(T_0 - T_i).$$

L'application numérique conduit à $W_1 = 115 \text{ MJ}$.

2 • On reprend l'égalité de Clausius :

$$\frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = 0,$$

à partir de l'instant t_0 où $T_2 = T_0$ et $T_1 = T_3$.

Alors $\delta Q_1 = -C_1 dT_1$ mais $\delta Q_2 = dm_2 L$, puisque le changement d'état se fait à pression constante et en considérant qu'à chaque cycle une masse dm_2 d'eau liquide se transforme en solide. Soit :

$$\frac{C_1 dT_1}{T_1} - \frac{L dm_2}{T_2} = 0 ;$$

l'intégration à partir de l'instant t_0 conduit à :

$$T_4 = T_3 \exp\left(\frac{m_2 L}{C_1 T_0}\right).$$

L'application numérique donne $T_4 = 291,33 \text{ K}$.

Le calcul de W_2 se fait par application du premier principe au fluide suivant le même calcul qu'à la question 1) c) :

$$W_2 = C_1(T_4 - T_3) - m_2 L ;$$

soit : $W_2 = 3,95 \cdot 10^3 \text{ MJ}$.

3 • a. Pour cette partie, le raisonnement est le même qu'à la question 1) c), en remplaçant C_2 par C'_2 et en intégrant sur T_1 entre T_4 et T_5 et sur T_2 entre T_0 et $T_2 = 263 \text{ K}$:

$$C_1 \ln\left(\frac{T_5}{T_4}\right) + C'_2 \left(\frac{T_2}{T_0}\right) = 0 ,$$

soit : $T_5 = T_4 \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{\frac{C'_2}{C_1}}$; $T_5 = 292,02 \text{ K}$.

Le travail s'exprime comme à la question 1) c) :

$$W_3 = C_1(T_5 - T_4) + C'_2(T_2 - T_0) ; W_3 = 460 \text{ MJ} .$$

b. Pour amener l'eau de la piscine directement de T_i à T_5 , il faut fournir $W_4 = C_1(T_5 - T_i)$; soit $W_4 \approx 1,00 \cdot 10^5 \text{ MJ}$.

c. Le travail total fourni au fluide est :

$$W_T = W_1 + W_2 + W_3 = 4,52 \cdot 10^3 \text{ MJ} ;$$

cette quantité ne représente que 4,5 % de l'énergie W_4 qu'il aurait fallu fournir à l'eau par chauffage direct.

La puissance étant constante, $W_1 + W_2 + W_3 = \mathcal{P} \tau$, soit :

$$\tau = 226\,000 \text{ s} = 6 \text{ h } 17 \text{ min} .$$

Attention : les applications numériques peuvent conduire à des valeurs très différentes selon le nombre de chiffres significatifs utilisés dans les calculs.

Dans le calcul de w_3 , la valeur de $T_5 - T_4$ passe de 1 K à 0,7 K selon que les températures ont été calculées avec 3 ou 4 chiffres.

L'erreur relative sur le résultat est de 30 % dans le premier cas.

Remarque : La performance d'une installation réelle est nettement moins bonne, en raison des irréversibilités.

7 Étude d'une pompe à chaleur

A • 1 En raisonnant sur une tranche de fluide de masse dm , passant de la partie amont (T_2, P_2) à la partie aval (T_3, P_1) du compresseur, on obtient, en négligeant la variation d'énergie cinétique et la variation d'énergie potentielle de cette masse :

$$dU = \delta W_m + \delta W_{\text{pression}} + \delta Q .$$

En régime permanent, si $u(P, T)$, $v(P, T)$ et $h(P, T)$ représentent l'énergie interne massique, le volume massique et l'enthalpie massique du fluide, on peut écrire (voir l'étude de la détente de Joule-Thomson) :

$$dU = dm[u(T_3, P_1) - u(T_2, P_2)]$$

$$\delta W_{\text{pression}} = dm [+ P_1 v(T_3, P_1) - P_2 v(T_2, P_2)]$$

$$u(T_3, P_1) - u(T_2, P_2) =$$

$$w_m + P_1 v(T_3, P_1) - P_2 v(T_2, P_2) + q .$$

Nous en déduisons la relation :

$$\Delta h = w_m + q .$$

2 • La relation du texte, qui n'est autre que la loi de Laplace, et la loi des gaz parfaits conduisent à :

$$T_3 = T_2 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} , \text{ soit } T_3 = 319 \text{ K} .$$

Pour un gaz parfait :

$$\Delta h = \frac{m}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} R(T_3 - T_2), \text{ et } Q = 0 .$$

A.N. : $\Delta h = 26,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} = W$.

3 • La variation d'entropie ΔS d'une masse m de gaz parfait entre deux états (T_2, P_2) et (T_3, P_1) s'écrit :

$$\Delta S = \frac{m}{M} R \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T_3}{T_2}\right) - \ln\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \right) = m \Delta s .$$

soit $\Delta s = 0$. Ce résultat ne doit pas surprendre puisque la relation polytropicque du texte n'est autre, comme on l'a déjà signalé, que la loi de Laplace qui s'applique à une évolution isentropique.

Remarque : Si l'évolution était adiabatique, mais non réversible, la variation d'entropie serait positive puisque l'entropie d'échange est nulle pour une adiabatique :

$$\Delta S = \mathcal{S}_{\text{créée}} > 0 .$$

4 • a. On reprend l'expression du A. 3) dans le cas général :

$$\Delta s = \frac{R}{M} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) - \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) \right) ,$$

soit pour une évolution à pression $P = P_0$ constante :

$$s = s_0(T_0, P_0) + \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) .$$

Numériquement, en usi :

$$T = T_0 \exp(1,735 \cdot 10^{-3}(s - s_0(T_0, P_0))) .$$

L'isobare P_2 se déduit de l'isobare P_1 par translation : en effet, seule change, dans l'expression de T , la constante $s_0(T_0, P_1)$ qui devient $s_0(T_0, P_2)$.

Pour une même température, le fluide est plus ordonné pour une pression plus grande, donc l'isobare P_1 est au-dessus de l'isobare P_2 :

$$s(T_2, P_1) < s(T_2, P_2) .$$

b. Dans le cas réversible de la question A. 2) :

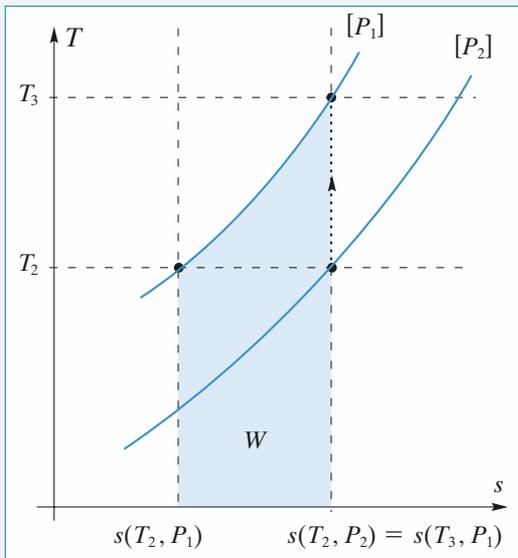
$s(T_2, P_2) = s(T_3, P_1)$, et la transformation est représentée par une verticale.

Pour évaluer $w_m = \Delta h$, on peut choisir le chemin ; or on sait que :

$$h(T_2, P_1) = h(T_2, P_2)$$

car h ne dépend que de T pour un gaz parfait, et :

$$w_m = h(T_3, P_1) - h(T_2, P_2) = h(T_3, P_1) - h(T_2, P_1) .$$



Enfin, le long de l'isobare, $dh = Tds$, soit :

$$h(T_3, P_1) - h(T_2, P_1) = \int_{s(T_2, P_1)}^{s(T_3, P_1)} T ds.$$

w_m correspond donc à l'aire située sous l'isobare $P = P_1$.

B • 1 Les deux transformations successives se font de manière isobare.

• pour le refroidissement :

$$\begin{aligned} q_{11} = \Delta h &= h_{\text{gaz}}(T_1) - h_{\text{gaz}}(T_3) \\ &= \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1} (T_1 - T_3) = -8 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}; \end{aligned}$$

• pour la liquéfaction :

$$\begin{aligned} q_{12} = sh &= -L_v(T_1) = -175 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}, \\ q_1 = q_{11} + q_{12} &= -183 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

2 • La variation d'entropie se calcule en deux étapes :

• pour le refroidissement isobare :

$$\Delta s_{11} = \frac{R}{M} \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_1}{T_3} \right) = -26 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1};$$

• pour le changement d'état :

$$\begin{aligned} \Delta s_{12} &= -\frac{L_v(T_1)}{T_1} = -574 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}, \\ \Delta s_1 &= \Delta s_{11} + \Delta s_{12} = -600 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}. \end{aligned}$$

C • 1 On reconnaît une détente de Joule-Thomson : l'évolution est adiabatique sans échange de travail utile.

2 • $\Delta h = 0$ et :

$$\begin{aligned} \Delta h &= h_{\text{final}} - h_{\text{initial}} = x_\ell h_\ell(T_2) + x_v h_v(T_2) - h_\ell(T_1), \\ \text{soit en tenant compte de } x_v + x_\ell &= 1 \text{ et } x_v = x, \\ 0 &= x(h_v(T_2) - h_\ell(T_2)) + (h_\ell(T_2) - h_\ell(T_1)), \text{ or} \\ (h_v(T_2) - h_\ell(T_2)) &= L_v(T_2) \text{ et } h_\ell(T_2) - h_\ell(T_1) = c_\ell(T_2 - T_1), \\ \text{en définitive, } x &= -\frac{c_\ell(T_2 - T_1)}{L_v(T_2)} = 0,215. \end{aligned}$$

3 • On sépare la transformation en deux étapes pour profiter du caractère de fonction d'état de s :

• refroidissement du liquide : $\Delta s_{21} = c_\ell \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right)$;

• changement d'état : $\Delta s_{22} = x \frac{1}{T_2} L_v(T_2)$,

soit : $\Delta s_2 = \Delta s_{21} + \Delta s_{22} = 8,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

D • 1 Il y a ici vaporisation isobare de $(1-x)$ kg de fréon, donc $q_2 = (1-x) L_v(T_2) = 161 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

2 • $\Delta s_3 = \frac{1-x}{T_2} L_v(T_2) = 589,5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

On vérifie qu'aux erreurs d'arrondis près, le bilan entropique du cycle est bien nul.

E • 1 Le travail massique fourni au système fréon est au cours de la compression : $W = 26,5 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Le rendement électromécanique du moteur est de $r = 0,8$, donc la dépense énergétique massique est :

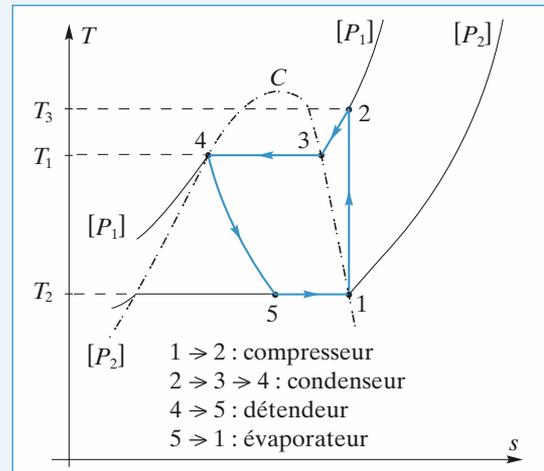
$$D = \frac{26,5}{0,8} = 33,1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Le gain correspond à la chaleur cédée à la source chaude, soit $-q_1$. L'efficacité est $e = -\frac{q_1}{D} = +5,53$.

2 • L'efficacité d'un chauffage électrique vaut 1 (effet Joule), d'où l'intérêt théorique du dispositif de chauffage.

F • 1 Le bilan enthalpique du cycle est, comme pour s , nul aux approximations d'arrondis près.

2 • Le cycle complet est donné ci-après.



8 Étude d'un turbocompresseur à gaz

1 • Chacun des deux fluides est en écoulement permanent dans sa canalisation : la pression est constante durant l'échange thermique, on peut raisonner sur l'enthalpie de chaque fluide puisque $dh = \delta Q_P$.

Pour une masse dm de gaz passant de T_2 à T_3 :

$$dH_{\text{gaz}} = dmc_P(T_3 - T_2).$$

D'autre part, pour l'eau liquide:

$$dH_{\text{eau}} = dm_0 c (t_1 - t_0),$$

pour une masse dm_0 d'eau passant dans le même temps de t_1 à t_0 . Le bilan enthalpique de l'ensemble de ces deux systèmes, pendant dt , s'écrit $dH = 0$ puisque l'ensemble est calorifugé, soit:

$$dm_0 c (t_1 - t_0) + dmc_P (T_3 - T_2) = 0;$$

en notant que $dm = ddt$ et $dm_0 = Ddt$,

$$D = d \frac{c_P}{c} \frac{T_3 - T_2}{t_0 - t_1}.$$

2 • Ici, lorsqu'une masse dm passe de T_4 à T_5 dans la première canalisation, une même masse dm passe de T_9 à T_{10} .

• L'ensemble est thermiquement isolé du milieu extérieur.

$$dH_{\text{total}} = 0 = dmc_P (T_5 - T_4) + dmc_P (T_{10} - T_9),$$

soit: $T_5 + T_{10} = T_4 + T_9$.

• La variation d'entropie de l'ensemble est nulle puisque les deux masses sont isolées du milieu extérieur ($\delta \mathcal{S}_{\text{échange}} = 0$) et que l'évolution est réversible ($\delta \mathcal{S}_{\text{créée}} = 0$).

$$\text{Ainsi, } dmc_P \ln \left(\frac{T_5}{T_4} \right) + dmc_P \ln \left(\frac{T_{10}}{T_9} \right) = 0,$$

soit: $T_5 T_{10} = T_4 T_9$.

3 • La résolution du système des deux équations obtenues à la question 2 conduit à:

$$T_{10} = T_4 \text{ et } T_5 = T_9 \text{ ou } T_5 = T_4 \text{ et } T_{10} = T_9.$$

La seconde solution correspond à des conduites parfaitement calorifugées, sans transfert thermique.

La solution intéressante est donc la première. Une analyse plus fine montrerait que, en chaque point de la tubulure, les températures des deux fluides sont égales, ce qui correspond bien au cas limite de la réversibilité. Nous retiendrons donc:

$$T_{10} = T_4 \text{ et } T_5 = T_9.$$

4 • On aura toujours $dH = 0$, $\delta \mathcal{S}_{\text{échange}} = 0$, mais $\delta \mathcal{S}_{\text{créée}}$ sera positive et donc dS aussi, soit:

$$dmc_P \ln \left(\frac{T_5}{T_4} \right) + dmc_P \ln \left(\frac{T_{10}}{T_9} \right) > 0, \text{ ou } \frac{T_5}{T_4} \frac{T_{10}}{T_9} > 1.$$

En supposant $T_9 > T_4$, on obtient grâce à l'égalité:

$$T_5 + T_{10} = T_4 + T_9, \text{ qui est toujours vérifiée:}$$

$$T_4 < T_{10} \text{ et } T_5 < T_9.$$

Ce résultat était prévisible: la création d'entropie correspond à une perte d'efficacité du dispositif.

5 • L'efficacité de la canalisation 9-10 se définit par

$$\text{analogie avec } e: e' = \frac{T_9 - T_{10}}{T_9 - T_4}.$$

$$\text{Or } T_5 + T_{10} = T_4 + T_9 \text{ et } e = e'.$$

En fait l'efficacité est définie comme le rapport entre la variation d'enthalpie réelle:

$$dmc_P(T_5 - T_4) = dmc_P(T_9 - T_{10}),$$

et la variation d'enthalpie idéale (transformation réversible où $T_9 = T_5$ et $T_{10} = T_4$):

$$dmc_P(T_9 - T_4) = dmc_P(T_5 - T_{10}),$$

les deux égalités provenant du caractère isolé de l'ensemble, il est normal que l'efficacité puisse être définie indifféremment par rapport à l'une ou l'autre des canalisations.

6 • Soit m la masse de gaz admise à chaque cycle du compresseur. V représente son volume dans les conditions d'entrée (p, T) et V' son volume dans les conditions de sortie (p', T').

• Aspiration: $W_{1 \text{ piston}} = -pV$ (travail négatif, car le piston exerce sur le gaz une force opposée au déplacement).

• Compression adiabatique: $W_{2 \text{ piston}} = \Delta U_2$.

Refoulement: $W_{3 \text{ piston}} = +p'V'$ (positif).

Par ailleurs, le gaz reste dans le même état thermodynamique pendant les phases d'aspiration (p, T) et de refoulement (p', T'). On en déduit que $\Delta U_1 = 0$, soit $\Delta U = \Delta U_2$.

Finalement: $W_{\text{piston}} = \Delta U + p'V' - pV = \Delta H$.

En divisant par la masse, on obtient:

$$w = \Delta h.$$

7 • La compression est supposée isentropique, comme le gaz est parfait on peut appliquer la loi de Laplace, et:

$$T' = T \left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

D'autre part, $\Delta h = c_P \Delta T = \frac{r\gamma}{\gamma-1} \Delta T$ pour un gaz parfait et:

$$w = \frac{r\gamma}{\gamma-1} T \left[\left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right].$$

8 • Le travail massique reçu par le gaz est toujours égal à la variation d'enthalpie massique du gaz, mais cette fois-ci entre les températures T et T'' :

$$w' = \frac{r\gamma}{\gamma-1} (T'' - T);$$

d'autre part en utilisant la question précédente:

$$w' = \frac{w}{\eta_1} = \frac{r\gamma}{\eta_1(\gamma-1)} T \left[\left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right].$$

L'identification de ces deux relations conduit à:

$$T'' = T \left[1 + \frac{1}{\eta_1} \left(\left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right) \right].$$

9 • Ici, il n'y a ni transfert thermique massique ni variation d'énergie cinétique ou potentielle, de sorte que le bilan enthalpique se réduit à $\Delta h = w$, comme dans la question 6).

10 • T' et w ont des expressions identiques à celles de la question 7), pour les mêmes raisons:

$$w = \frac{r\gamma}{(\gamma-1)} T \left[\left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right] \text{ et } T' = T \left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

11 • Le travail massique réellement fourni à la turbine par le gaz est inférieur, en valeur absolue, au travail réversible :

$$|w'| < |w| \text{ et } \eta_2 = \frac{|w'|}{|w|} .$$

Le même raisonnement qu'à la question **8**) conduit à :

$$T''' = T \left[1 + \eta_2 \left\{ \left(\frac{P}{P'} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} - 1 \right\} \right] .$$

12 • Le tableau ci-après regroupe les résultats demandés.

points	1	2	3	4	5
P (bar)	1	2,15	2,15	5,7	5,7
rév.		352,2		396	744
T (K)	283		300		
irrév.		363,4		412,1	698
points	6	7	8	9	10
P (bar)	5,7	2,4	2,4	1	1
rév.		736,5		744	396
T (K)	943		955		
irrév.		759,5		769,3	484

Pour les pressions, on a tenu compte du caractère isobare des évolutions 2-3, 4-5, 5-6, 7-8, 9-10 et de la relation $P_6 P_9 = P_7 P_8$.

Les températures se déduisent des différentes lois de Laplace et des relations de la question **3**) pour le cas réversible. Pour le cas irréversible, il suffit d'appliquer les résultats des questions **8**) et **11**) et de calculer T_5 et T_{10} grâce à l'efficacité.

13 • Les transferts thermiques et le travaux se calculent par les variations d'enthalpie correspondantes :

$$\Delta h_{ij} = q_{ij} \text{ ou } \Delta h_{ij} = w_{ij} \text{ avec } \Delta h_{ij} = c_P(T_j - T_i) :$$

transformation	12	34	56	67	78	89
rév.			199		218	
q_{ij} (kJ)	-	-		-		-
irrév.			245		195	
rév.	69,5	97		-207		-212
w_{ij} (kJ)			-		-	
irrév.	81	113		-183		-187

14 • Le travail utile que fournit le système est égal à $-w_{89}$; en effet, c'est la turbine qui permet le mouvement de l'hélice et donc la propulsion.

La dépense correspond aux transferts thermiques des chambres de combustion $q_{56} + q_{78}$.

Le rendement est le rapport entre les quantités précédentes; dans le cas réversible, ce rendement vaut 0,51 et 0,42 dans le cas irréversible.

C'est le travail w_{89} qui correspond à la puissance de 3 000 kW :

$$\mathcal{P} dt = -w_{89} dm = -w_{89} ddt$$

et $d = -\frac{\mathcal{P}}{w_{89}} = 14,2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, dans le cas réversible et

$16 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$, dans le cas irréversible.

Électricité

1 ■ Réseaux linéaires en régime continu	301
2 ■ Réseaux linéaires en régime variable	320
3 ■ Réseaux linéaires en régime sinusoïdal forcé.....	346
4 ■ Amplificateur opérationnel.....	363
5 ■ Fonctions de transfert.....	383

Réseaux linéaires en régime continu

LES OBJECTIFS

- Lois de Kirchhoff.
- Modélisation et caractéristiques courant-tension des composants usuels.
- Représentations de Thévenin et de Norton d'un dipôle linéaire.
- Associations de dipôles linéaires.

LES PRÉREQUIS

- Notions de courant et de tension vues en TS.
- Résolution de systèmes d'équations algébriques.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Équations algébriques dans \mathbb{R} .

ESSENTIEL

Représentation des courants et des tensions

- La tension U_{AB} entre les deux points A et B d'un réseau électrique est égale à la différence de potentiel entre A et B :

$$U_{AB} = V_A - V_B \text{ et } U_{BA} = -U_{AB}.$$

On représente conventionnellement une tension par une flèche (*doc. 1*). Dans ce cas :

$U = (\text{potentiel au niveau de la pointe}) - (\text{potentiel au niveau de la base})$.

- Le signe de l'intensité du courant dans un fil dépend de l'orientation arbitrairement fixée et matérialisée par une flèche.

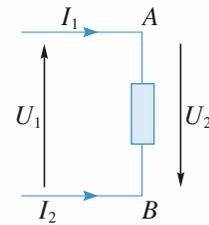
Si le sens conventionnel du courant est celui de la flèche, alors l'intensité est positive.

Si le sens conventionnel est opposé à celui de la flèche, alors l'intensité est négative.

- Un dipôle est représenté en **convention récepteur** si le courant qui le traverse et la tension à ses bornes sont représentés par deux flèches de sens opposés (*doc. 2*).

Un dipôle est représenté en **convention générateur** si le courant qui traverse un dipôle et la tension à ses bornes sont représentés par deux flèches de même sens (*doc. 3*).

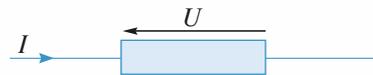
Les flèches qui représentent le courant et la tension sont définies arbitrairement. Leur sens ne préjuge en rien du sens réel du courant ni du signe de la tension.



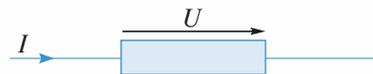
Doc. 1.

$$U_1 = U_{AB} = V_A - V_B$$

$$U_2 = -U_1 ; I_2 = -I_1$$



Doc. 2. Dipôle en convention récepteur.



Doc. 3. Dipôle en convention générateur.

• Puissance électrocinétique

En convention récepteur, la puissance électrocinétique reçue par un dipôle est :

$$\mathcal{P} = UI.$$

Par conséquent, en convention générateur, la puissance reçue par un dipôle est :

$$\mathcal{P} = -UI.$$

Un dipôle est récepteur si la puissance qu'il reçoit est effectivement positive.

Par conséquent, il est générateur si sa puissance reçue est effectivement négative.

• Lois de Kirchhoff

• **Loi des nœuds** : Pour un nœud donné (doc. 4) :

$$\sum \epsilon_k I_k = 0.$$

ϵ_k vaut 1 si le courant I_k aboutit sur le nœud et -1 s'il en repart.

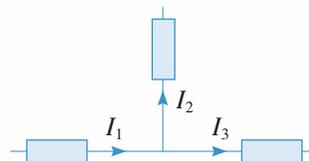
• **Loi des mailles** : Pour une maille orientée (doc. 5) :

$$\sum_k \epsilon_k U_k = 0.$$

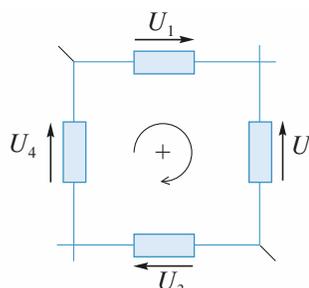
ϵ_k vaut 1 si la tension U_k est orientée dans le sens de la maille et -1 dans le cas contraire.

Remarque : Les lois de Kirchhoff, qui traduisent respectivement la conservation de la charge et l'additivité des tensions, sont valables quelle que soit la nature des dipôles considérés.

▶ Pour s'entraîner : ex. 1



Doc. 4. $I_1 - I_2 - I_3 = 0$.



Doc. 5. $U_1 - U_2 + U_3 + U_4 = 0$.

• Dipôles linéaires

Un circuit est linéaire lorsque les relations entre courants et tensions s'expriment par des équations linéaires ou par des équations différentielles linéaires. Les circuits linéaires sont souvent d'excellentes approximations des circuits réels.

▶ Pour s'entraîner : ex. 7 et 8

En régime continu (indépendant du temps), un circuit linéaire se décompose en dipôles élémentaires de différentes espèces.

• Résistor

Pour ce dipôle, le courant I et la tension U sont liés par une relation linéaire :

$$U = RI \quad \text{ou} \quad I = GU \quad \text{en convention récepteur (doc. 6)}$$

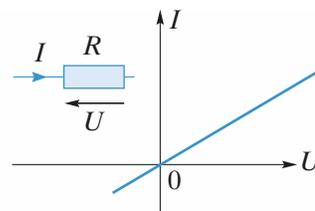
$$U = -RI \quad \text{ou} \quad I = -GU \quad \text{en convention générateur.}$$

La résistance R est une grandeur constante caractéristique du résistor. En système international, elle se mesure en ohm (symbole : Ω).

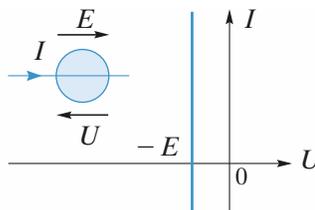
La conductance G est égale à l'inverse de la résistance. En système international, elle se mesure en siemens (symbole : S).

• Source idéale (ou générateur idéal) de tension

C'est un dipôle qui impose une tension E à ses bornes, quel que soit le courant qui le traverse. E est la force électromotrice (f.e.m.) du générateur (doc. 7).



Doc. 6. Caractéristique d'un résistor en convention récepteur.



Doc. 7. Caractéristique d'une source de tension.

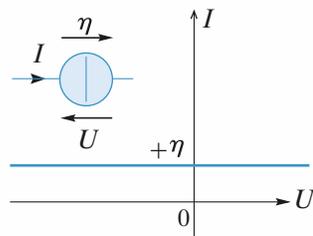
- **Source idéale (ou générateur idéal) de courant**

C'est un dipôle qui impose un courant $I = \eta$, quelle que soit la tension entre ses bornes. η est le courant électromoteur (c.e.m.) du générateur (doc. 8).

- **Sources indépendantes et sources liées**

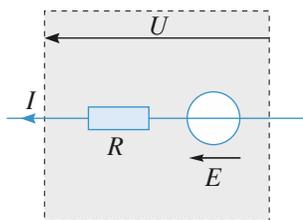
Une source est indépendante lorsque sa valeur (f.e.m. E ou c.e.m. η) est déterminée *a priori*.

Une source est liée (ou commandée) lorsque sa valeur est fonction d'une tension ou d'un courant déterminé par un autre élément du circuit. Pratiquement une source commandée modélise un système électronique comme un transistor ou amplificateur.

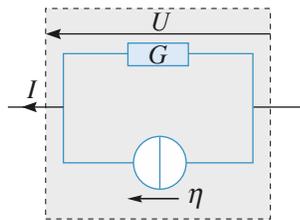


Doc. 8. Caractéristique d'une source de courant.

Représentation d'un dipôle linéaire



Doc. 9. Représentation de Thévenin d'un dipôle linéaire.



Doc. 10. Représentation de Norton d'un dipôle linéaire.

En régime continu, un dipôle linéaire quelconque peut être représenté par l'association d'un résistor et d'une source idéale. Il y a deux représentations équivalentes pour un même dipôle.

- **Représentation de Thévenin**

Le dipôle est équivalent à une source de tension en série avec un résistor. Avec les orientations du document 9, on obtient :

$$U = E - R I.$$

- **Représentation de Norton**

Le dipôle est équivalent à une source de courant en parallèle avec un résistor. Avec les orientations du document 10, on obtient :

$$I = \eta - G U.$$

• Les deux représentations sont donc équivalentes si $R G = 1$ et $E = R \eta$.

◆ Pour s'entraîner : ex. 3 et 4

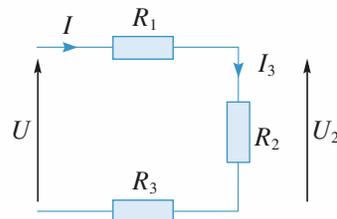
Associations de résistors

• Un ensemble de résistors est en série s'ils sont tous traversés par le même courant (doc. 11).

La résistance équivalente s'obtient en ajoutant les résistances : $R_{\text{éq}} = \sum_k R_k$.

La tension aux bornes de l'un d'entre eux s'obtient par

la relation du diviseur de tension : $U_k = U \frac{R_k}{\sum_k R_k}$.



Doc. 11. Trois résistors en série.

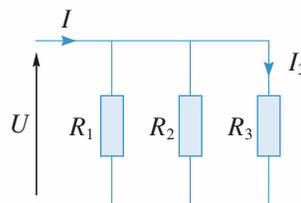
• Un ensemble de résistors est en parallèle s'ils ont tous la même tension à leurs bornes (*doc.* 12).

La conductance équivalente s'obtient en ajoutant les conductances :

$$G_{\text{éq}} = \sum_k G_k \quad \text{ou} \quad \frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_k \frac{1}{R_k}$$

Le courant qui traverse l'un d'entre eux s'obtient par la

relation du diviseur de courant : $I_k = I \frac{G_k}{\sum_k G_k}$.



Doc. 12. Trois résistors en parallèle

$$\left(G_k = \frac{1}{R_k} \right)$$

► Pour s'entraîner : ex. 2, 5 et 6

Loi des nœuds en termes de potentiels

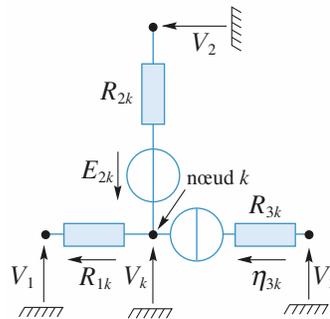
• Il est très important de pouvoir écrire directement en termes de potentiels le courant traversant un dipôle, puis d'écrire la loi des nœuds sans faire intervenir les courants.

La résistance R_{2k} est ainsi parcourue vers k par $\frac{V_2 + E_{2k}}{R_{2k}}$ et avec les conventions du *document* 13, la loi des nœuds appliquée au nœud k devient :

$$\sum_j \left(\frac{V_j - V_k + E_{jk}}{R_{jk}} + \eta_{jk} \right) = 0.$$

• Dans le cas particulier simple (mais fréquent) où les branches qui convergent au nœud k ne comportent que des résistors (sans sources), le potentiel du nœud k est le barycentre des potentiels des nœuds voisins, pondéré par les conductances (relation de Millman) :

$$V_k = \frac{\sum_j G_{kj} V_j}{\sum_j G_{kj}}$$



Doc. 13. Potentiels de nœuds.

Il peut être intéressant d'affecter arbitrairement une valeur nulle au potentiel d'un nœud du réseau. Il devient ainsi la *masse* de ce réseau.

• Méthode d'étude d'un réseau électrique

Pour un réseau, on peut écrire les équations de nœuds indépendantes qui permettent de déterminer les potentiels, puis les courants. Il est possible de résoudre ainsi tout problème relatif au réseau. Cependant, cette méthode conduit rapidement à des calculs très lourds et il faut lui préférer les méthodes procédant par *équivalences successives, divisions de courant et de tension et superposition*.

Théorème de superposition

• En régime continu, l'intensité dans un dipôle est égale à la somme des intensités obtenues successivement dans ce dipôle en éteignant toutes les sources libres sauf une.

Il en va de même pour la tension aux bornes de ce dipôle.

- Éteindre une source de courant revient à la remplacer par un interrupteur ouvert.
- Éteindre une source de tension revient à la remplacer par un fil.

Remarque : Le théorème de superposition ne peut s'appliquer qu'à un réseau linéaire. On veillera à ne pas l'utiliser abusivement dans un réseau qui comporte un élément non linéaire (une diode, par exemple).

 Pour aller plus loin : ex. 9, 10 et 11

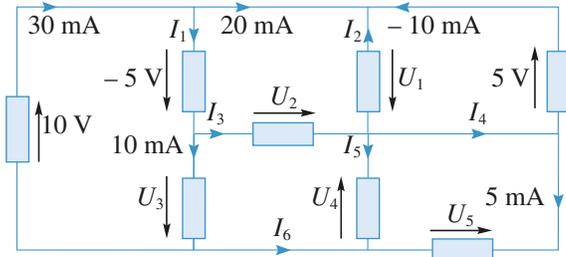
Conseils et pièges à éviter

- Penser à écrire le plus souvent possible la loi des nœuds en termes de potentiels.
- Les représentations de Thévenin et de Norton sont deux représentations différentes d'un même générateur.
- Bien connaître les lois d'association des divers éléments.
- Le théorème de superposition ne peut s'appliquer qu'à un réseau linéaire.

1 Application des lois de Kirchhoff

Déterminer les courants et les tensions inconnus dans le réseau représenté sur la figure.

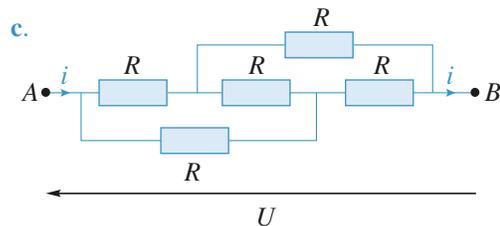
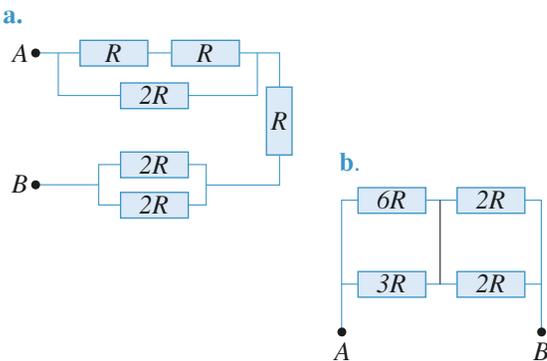
Les rectangles figurent des dipôles quelconques (avec ou sans source) dont il n'est pas nécessaire de connaître la nature.



Revoir la loi des mailles (ou loi d'additivité des tensions) et la loi des nœuds. Faire attention aux orientations et aux signes des courants et tensions.

2 Calcul de résistance équivalente

Déterminer la résistance équivalente entre A et B .



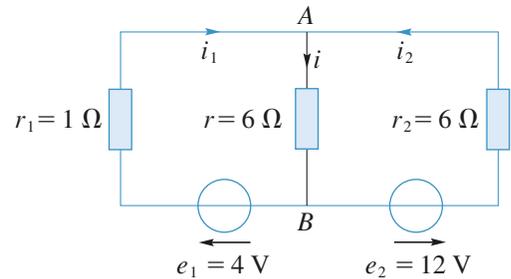
Conseils

a) et b) Bien repérer les associations série et parallèle. On pourra se souvenir que la résistance équivalente à deux résistances R en parallèle est égale à $\frac{R}{2}$.
Pour c) l'utilisation des symétries permet de déterminer $R_{AB\text{éq}}$ sans calcul.

3 Trois méthodes d'étude d'un réseau linéaire

Déterminer le courant i en utilisant :

- la loi des nœuds (en termes de potentiels) ;
- le théorème de superposition ;
- en remplaçant les deux générateurs de Thévenin par les générateurs de Norton équivalents.

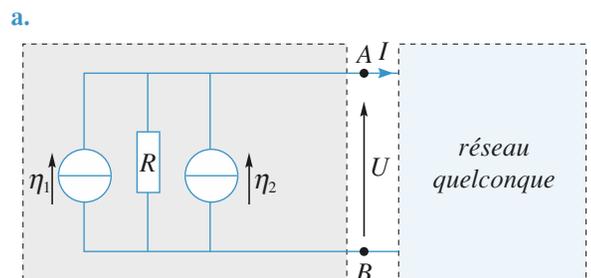


Conseils

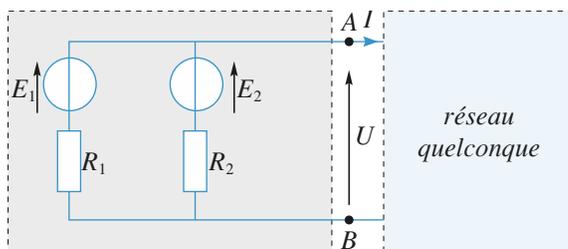
Pour appliquer la loi des nœuds, il faut affecter le potentiel nul à l'un d'entre eux puis écrire des équations qui ont pour inconnues les potentiels des autres nœuds. Ne pas hésiter à utiliser des schémas équivalents intermédiaires. La représentation des générateurs par leur modèle de Norton permet de déterminer i par une division de courant.

4 Recherche de la représentation de Thévenin et de Norton pour un dipôle

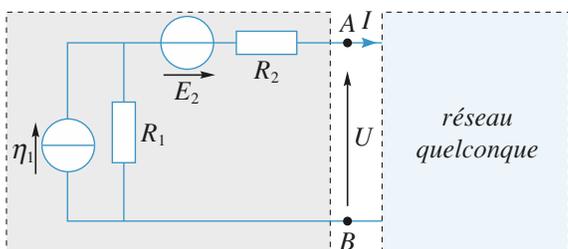
Déterminer la représentation de Norton et la représentation de Thévenin pour les dipôles linéaires situés à gauche des bornes A et B .



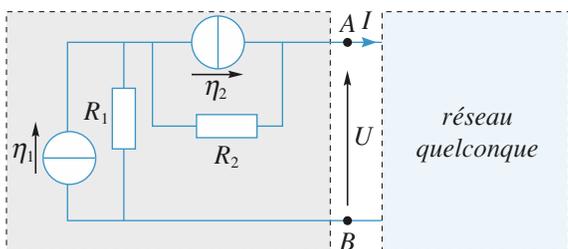
b.



c.



d.



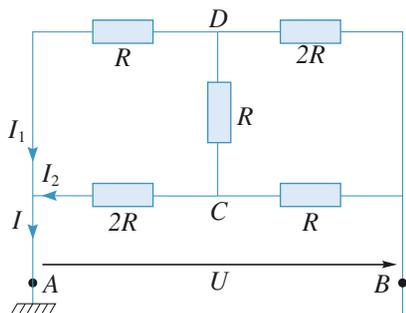
Conseils

Revoir l'équivalence entre les représentations de Thévenin et de Norton.

On préférera la représentation de Thévenin pour deux dipôles en série et la représentation de Norton pour deux dipôles en parallèle.

Il faudra parfois effectuer plusieurs équivalences successives.

5 Calcul de résistance équivalente



1 • Peut-on calculer la résistance équivalente entre A et B au moyen d'associations série et parallèle ?

2 • Écrire les équations de nœuds (ou relations de Millman) pour les nœuds C et D en posant $V_A = 0$ et $V_B = U$. En déduire la résistance équivalente entre A et B.

Conseils

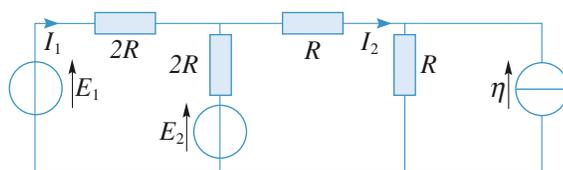
On rappelle que deux dipôles sont en parallèle si leurs deux bornes sont communes.

Pour un dipôle qui ne contient pas de source indépendante la résistance peut se définir par $R = \frac{U}{I}$ en convention récepteur. On peut donc tenter de calculer I en supposant U connue (ou l'inverse).

6 Étude d'un réseau par plusieurs méthodes

Déterminer les courants I_1 et I_2 pour le réseau représenté sur le document.

On utilisera trois méthodes différentes.



Conseils

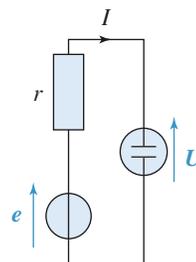
En plus de la méthode systématique qui consiste à écrire $N-1$ équations de nœuds pour un réseau de N nœuds, quelles sont les méthodes à notre disposition ? On remarquera que le réseau contient plusieurs sources.

Pour ne pas avoir à résoudre de système d'équations, on tente de se ramener à une maille unique par une succession d'équivalences.

Penser à utiliser les diviseurs (de courant et de tension).

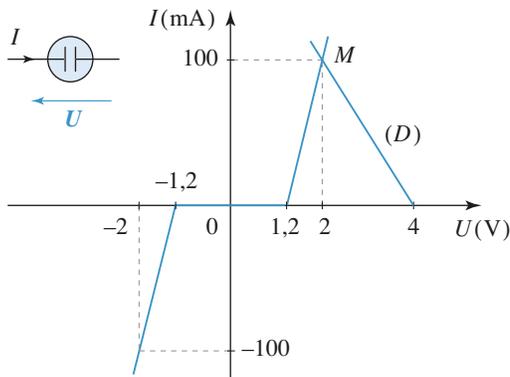
7 Étude d'un électrolyseur

Un circuit (doc. 1) est réalisé par l'association en série d'un électrolyseur dont la caractéristique statique est donnée document 2 et d'un générateur : ($e = 4 \text{ V}$, $r = 20 \Omega$).



Doc. 1. électrolyseur alimenté par un générateur.

Déterminer le point de fonctionnement M de l'électrolyseur.



Doc. 2. Caractéristique statique de l'électrolyseur.

la résistance $R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_p + I_0}$. Donner dans chaque cas la relation tension courant au point de fonctionnement.

5• Déterminer la puissance P fournie par la diode en fonction de R_C , U_{C_0} et R_0 . Représenter $|P|$ en fonction de R et déterminer la valeur absolue de la puissance maximale fournie, P_{\max} , en fonction de U_{C_0} et R_0 . Pour quelle valeur de R_C obtient-on cette puissance maximale ?

6• On définit le rendement de conversion par $\eta = \frac{P_{\max}}{P_L}$; justifier cette définition; calculer numériquement P_{\max} ainsi que ce rendement; commenter les valeurs obtenues.

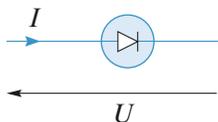
Conseils

- 1) Comment est l'intensité lorsque la diode fonctionne en circuit ouvert ?
- 2) Dans quelles parties du plan la puissance reçue par la diode est-elle positive ? négative ? Conclure.
- 3) Il faut considérer les parties quasi-linéaires de la caractéristique réelle et faire les approximations les plus simples.
- 4) Attention aux conventions à adopter pour la diode et la résistance.
- 5) Distinguer ici aussi les deux cas précédents.

8 *Résistances d'entrée et de sortie d'un quadripôle actif

Une photodiode est un composant opto-électronique dont la caractéristique est fonction de la puissance lumineuse, P_L , qu'elle reçoit :

$$i(u) = I_0(e^{u/V_0} - 1) - I_p, \text{ où } I_0 = 10 \mu\text{A}, V_0 = 26 \text{ mV et } I_p = kP_L, k = 0,5 \text{ A}\cdot\text{W}^{-1}.$$

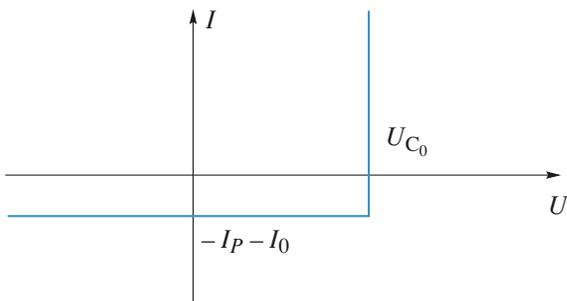


Doc. 1. Représentation de la diode en convention récepteur.

1• La photodiode reçoit une puissance lumineuse de 1 mW, tracer la caractéristique $I(U)$ de cette diode et déterminer sa tension en circuit ouvert, U_{C_0} .

2• Analyser cette caractéristique du point de vue énergétique : quelle partie du plan $I(U)$ correspond à un comportement générateur et quelle partie à un comportement récepteur.

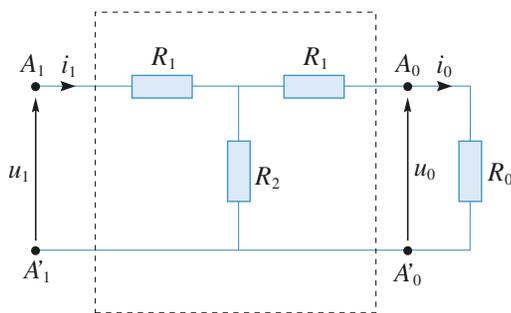
3• Justifier que l'on puisse adopter pour la diode le modèle linéaire par morceaux ci-dessous :



4• Cette photodiode est connectée en série avec une résistance R_C . Déterminer graphiquement le point de fonctionnement du circuit. On distinguera deux cas en introduisant

9 *Résistances et conductances itératives

A. On considère le quadripôle résistif en T ci-dessous (doc. 1) dont la charge est constituée par la résistance R_0 .

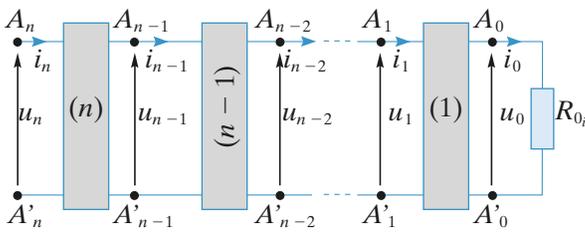


Doc. 1

1• Déterminer sa résistance d'entrée $R_{e1} = \frac{u_1}{i_1}$.

Comment doit-on choisir la résistance R_0 pour que $R_{e1} = R_0$? Cette résistance particulière, notée R_{0_i} , est appelée résistance itérative du quadripôle.

2• On place en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble étant chargé par la résistance itérative R_{0_i} . Quelle est la résistance d'entrée $R_{e_n} = \frac{u_n}{i_n}$ de l'association ?



Doc. 2

3 • On considère à nouveau le quadripôle représenté à la question 1), la charge étant constituée par la résistance itérative R_{0i} . Calculer son amplification en tension :

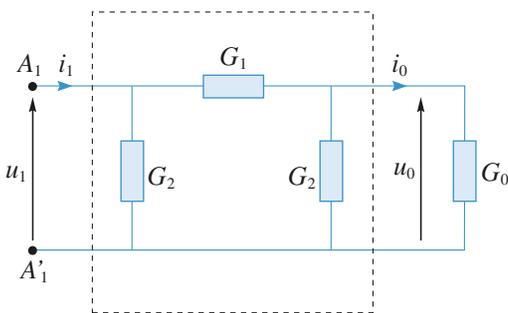
$A_{u_1} = \frac{u_0}{u_1}$ et son amplification en courant $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1}$, et les exprimer en fonction de $k = \frac{R_1}{R_2}$.

4 • On associe en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble ayant encore pour charge la résistance itérative R_{0i} .

Calculer, en fonction de k , l'amplification en tension $A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n}$ et l'amplification en courant $A_{i_n} = \frac{i_0}{i_n}$ de l'ensemble.

5 • Sachant que $n = 10$ et $R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, déterminer R_1 pour que $A_{u_n} = 0,10$ quand la charge est la résistance itérative R_{0i} que l'on calculera.

B. On considère maintenant le quadripôle résistif en Π , dual de celui en T considéré à la question A. 1). Sa charge est constituée par la conductance G_0 .



Doc. 3

1 • Déterminer sa conductance d'entrée :

$$G_{e1} = \frac{i_1}{u_1}.$$

Comment doit-on choisir la conductance G_0 pour que $G_{e1} = G_0$? Cette conductance particulière, notée G_{0i} , est appelée conductance itérative du quadripôle.

2 • On place en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble étant chargé par la conductance itérative G_{0i} .

Quelle est la conductance d'entrée $G_{e_u} = \frac{i_n}{u_n}$ de l'association ?

3 • On considère à nouveau le quadripôle de la partie B., la charge étant constituée par la conductance itérative G_{0i} .

Calculer son amplification en tension $A_{u_1} = \frac{u_0}{u_1}$ et son

amplification en courant $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1}$, puis les exprimer en

fonction de $k = \frac{G_2}{G_1}$.

4 • On associe en cascade n quadripôles identiques au précédent, l'ensemble ayant encore pour charge la conductance itérative G_{0i} . Calculer en fonction de k , l'ampli-

fication en tension $A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n}$ et l'amplification en courant

$A_{i_n} = \frac{i_0}{i_n}$ de l'ensemble.

5 • Sachant que $n = 10$ et $G_1 = 1 \text{ mS}$, déterminer G_2 pour que $A_{u_n} = 0,10$ quand la charge est la conductance itérative G_{0i} que l'on calculera.

Conseils

Le réseau étant passif, la résistance (ou la conductance) itérative se calculera par les lois d'association de résistances (ou de conductances).

Il convient ensuite d'exploiter systématiquement les propriétés d'un quadripôle chargé par sa résistance (ou sa conductance) itérative.

10 * Convertisseur analogique numérique

Le réseau de résistances étudié est constitué de $(n + 1)$ résistances r_k et possède $(n + 1)$ sorties S_k ($k = 0, \dots, n$). On note par R_k la résistance entre la sortie S_k et la masse, par R la résistance totale du réseau et par r la plus faible des résistances du réseau.

Les tensions de sortie U_k , référencées à la masse, sont prélevées sans débit de courant et le pas p ($p > 1$) du réseau est défini par la relation :

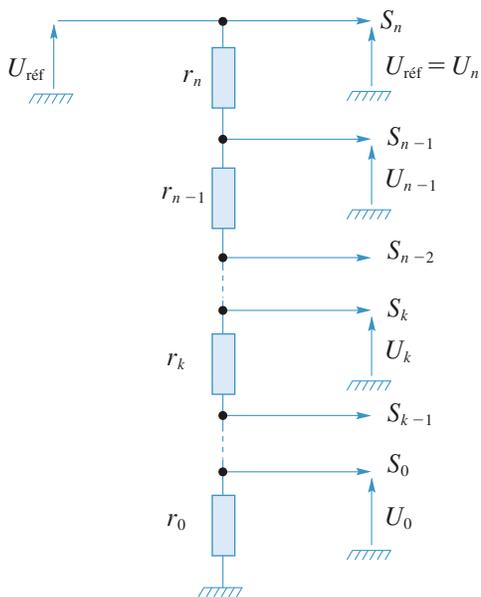
$$p = \frac{U_{k+1}}{U_k} \quad (k = 0, \dots, n).$$

La plus faible des tensions U_k est appelée quantum.

1 • a. Identifier le quantum. Exprimer U_k en fonction du quantum, puis l'exprimer en fonction de la tension de référence $U_{\text{réf}}$.

Identifier r . Déterminer, en fonction de r , les valeurs r_k des $(n + 1)$ résistances du réseau pour un pas p donné. Quelle relation lie r à R et quelle relation lie r_k à R ? A.N. : Sachant que $p = 10$, $n = 5$ et $r = 100 \Omega$, calculer numériquement les $(n + 1)$ résistances r_k du réseau.

b. En déduire les tensions U_k délivrées par les sorties S_k lorsqu'à l'entrée du diviseur de tension est appliquée une tension $U_{\text{réf}} = 100 \text{ V}$. Commenter le résultat obtenu. Quelle pourrait être l'utilisation d'un tel réseau de résistances ?



Doc. 1

2 • Quelles sont, en fonction de r , les valeurs des résistances r_k constitutives d'un diviseur de tension dont le pas est $p = 2$?

Déterminer, en fonction de la tension appliquée $U_{\text{réf}}$, les tensions U_k délivrées par un tel diviseur de tension.

A.N. : Sachant que $U_{\text{réf}} = 1024 \text{ mV}$, combien faudrait-il de résistances pour réaliser un réseau atténuateur délivrant les tensions U_k multiples de 2 du quantum $U_0 = 1 \text{ mV}$ entre les valeurs $U_0 = 1 \text{ mV}$ et $U_{n+1} = 1024 \text{ mV}$?

À quoi pourrait servir un tel réseau de résistances ?

3 • Le réseau de résistances considéré est celui de la question précédente avec une tension de référence $U_{\text{réf}} = 1024 \text{ mV}$. On dispose, en outre, de circuits logiques (C.L.) à deux entrées U_e et U'_e et deux sorties U_s et U'_s dont les tensions de sortie sont définies par :

$$U_e \geq U'_e \Rightarrow U_s = 1 \text{ V et } U'_s = (U_e - U'_e)$$

$$U_e < U'_e \Rightarrow U_s = 0 \text{ et } U'_s = U_e.$$

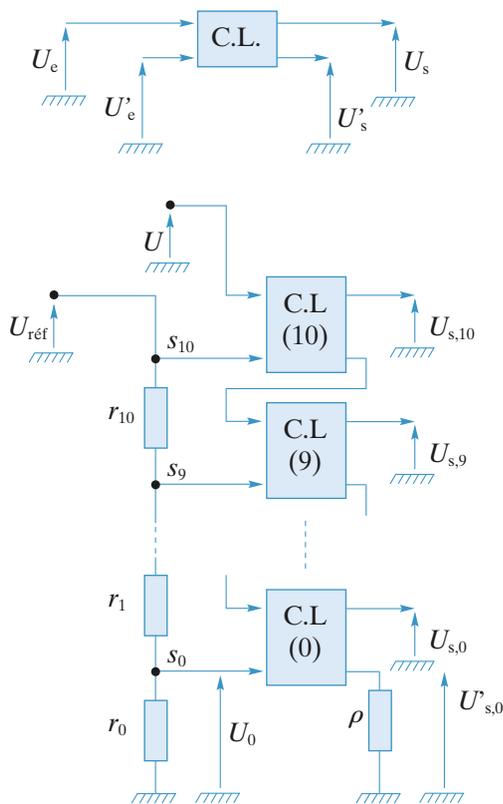
Avec des circuits logiques, on réalise un convertisseur analogique-numérique (C.A.N.) comme indiqué (doc. 2). Expliquer le fonctionnement de ce C.A.N. et l'illustrer pour une tension analogique $U = 800 \text{ mV}$ appliquée à son entrée.

Quelle est la tension maximale admissible U_{max} , c'est-à-dire quelle est la tension maximale analogique qu'il est possible de convertir ?

Conseils

La structure du réseau est celle d'un diviseur de tension. Remarquer que les tensions des C.L. sont liées par la relation :

$$U_{ek} = U_{sk} U'_{ek} + U'_{sk}$$

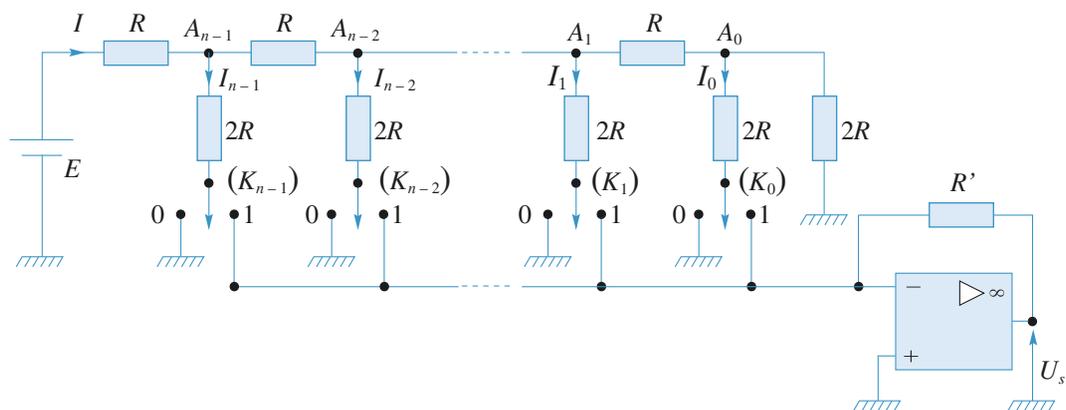


Doc. 2

11 *Convertisseur numérique-analogique

Un convertisseur numérique-analogique (C.N.A.) est un circuit qui transforme une information numérique en un signal analogique image de cette information. Le C.N.A. étudié est réalisé avec un amplificateur opérationnel parfait, une source de tension continue E , un réseau de résistances ($R, 2R$) et un ensemble de n commutateurs (K_j) à deux états (0) et (1) (cf. le schéma page suivante).

L'information numérique est codée sous la forme d'un nombre binaire $N_{(2)} = (b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0)$ où les chiffres (bits) ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La valeur de chaque bit b_j est représentée par l'état du commutateur (K_j) associé : $b_j = 0$ le commutateur (K_j) est dans l'état (0), $b_j = 1$ si le commutateur (K_j) est dans l'état (1). Ainsi, chaque information numérique $N_{(2)}$ détermine l'état des n commutateurs et, par voie de consé-



quence, la valeur de la tension analogique U_s délivrée par le C.N.A.

- 1 • Calculer l'intensité I_j du courant qui traverse la résistance $2R$ dont l'une des bornes est reliée au nœud A_j .
- 2 • Déterminer, en fonction de E , R , R' et des b_j , la tension U_s délivrée par le C.N.A. lorsque l'état de l'ensemble de ses commutateurs (K_j) traduit l'information codée numériquement par le nombre binaire :

$$N_{(2)} = (b_{n-1}b_{n-1} \dots b_1b_0).$$

- 3 • On appelle quantum δU_s la plus petite variation en valeur absolue de la tension U_s lorsqu'on passe d'une information traduite par $N_{(2)}$ à une autre traduite par $N'_{(2)}$. Établir l'expression du quantum de ce C.N.A.

Sachant que $R = 10 \text{ k}\Omega$, $R' = 2 \text{ k}\Omega$ et que $n = 7$ (information codée sur un octet), calculer E pour que $\delta U_s = 10 \text{ mV}$.

- 4 • La source de tension E ayant la valeur calculée dans la question précédente, déterminer la valeur de U_s lorsque $N_{(2)} = (10 \ 010 \ 010)$. Réciproquement, connaissant la valeur numérique de U_s , établir un algorithme permettant de connaître l'état de tous les commutateurs du C.N.A. ou, ce qui revient au même, l'expression de $N_{(2)}$.

Conseils

Utiliser le fait que l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire : $v_+ - v_- = 0$, $i_+ = i_- = 0$.

1 Application des lois de Kirchhoff

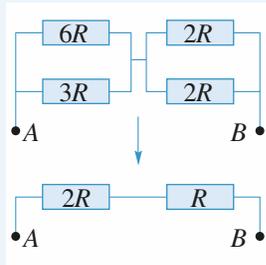
On obtient les courants inconnus en appliquant la loi des nœuds et on trouve les tensions avec la loi des mailles :

$$U_1 = -5 \text{ V}; U_2 = 0; U_3 = -5 \text{ V}; U_4 = 5 \text{ V}; U_5 = 5 \text{ V}; \\ I_1 = 10 \text{ mA}; I_2 = -10 \text{ mA}; I_3 = 0; I_4 = -5 \text{ mA}; \\ I_5 = 15 \text{ mA}; I_6 = -20 \text{ mA}$$

2 Calcul de résistance équivalente

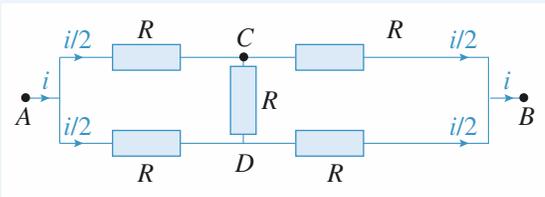
a. Le réseau se ramène à trois résistances de valeur R en série : $R_{AB} = 3R$.

b. Pour mettre en évidence les associations, on change la forme du nœud central ; cette opération purement graphique ne modifie en rien les connexions électriques. On obtient ainsi un système équivalent formé de deux résistances de valeurs $2R$ et R en série, soit : $R_{AB} = 3R$.



c. Le courant entrant en A se partage en deux courants égaux, puisque les deux résistances qu'ils parcourent sont égales.

Pour la même raison les courants qui se somment en B sont égaux.



Ainsi $i_{CD} = 0$, et on peut virtuellement « enlever » la branche CD. Il reste $2R$ en parallèle avec $2R$, soit $R_{AB_{\text{éq}}} = R$.

3 Trois méthodes d'étude d'un réseau linéaire

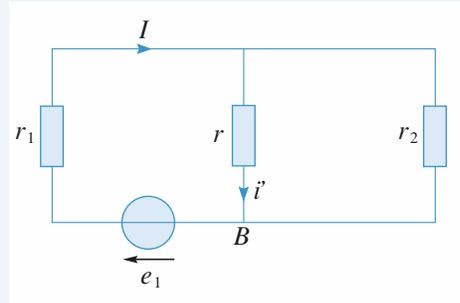
a. Le réseau comporte deux nœuds. Si on pose $V_B = 0$ (choix arbitraire d'origine des potentiels), il reste un seul potentiel inconnu : V_A .

La loi des nœuds en A ($i_1 + i_2 = i$) s'écrit en termes de potentiels :

$$\frac{e_1 - V_A}{r_1} + \frac{e_2 - V_A}{r_2} = \frac{V_A}{r}$$

d'où : $V_A = 4,5 \text{ V}$ et donc $i = 0,75 \text{ A}$.

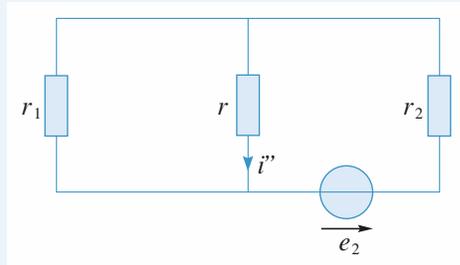
b. • Si on annule e_2 , il reste :



D'où $I = \frac{e_1}{r_1 + \frac{rr_2}{r+r_2}}$ et, à travers r :

$$i' = \frac{r_2}{r+r_2} I = \frac{r_2 e_1}{rr_2 + r_1(r+r_2)} = \frac{\frac{e_1}{r_1}}{1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}}$$

• Si on annule e_1 , il reste :



En échangeant les indices 1 et 2, on se retrouve dans le cas précédent, donc :

$$i'' = \frac{\frac{e_2}{r_2}}{1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}}$$

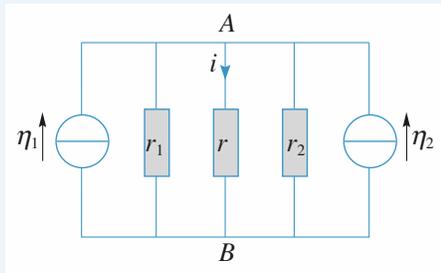
• En appliquant le théorème de superposition pour ce réseau linéaire, on obtient :

$$i = i' + i'' = \frac{\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}}{1 + \frac{r}{r_1} + \frac{r}{r_2}}$$

A.N. : $i = 0,75 \text{ A}$.

c. On refait le schéma en remplaçant les deux générateurs de Thévenin (e_1, r_1) et (e_2, r_2) par leurs représentations de Norton avec :

$$\eta_1 = \frac{e_1}{r_1} = 4 \text{ A} \quad \text{et} \quad \eta_2 = \frac{e_2}{r_2} = 2 \text{ A}$$



Dans ce schéma, le nœud A est constitué par tout le fil horizontal supérieur.

Un courant total d'intensité $i_0 = \eta_1 + \eta_2 = 6 \text{ A}$ se répartit donc entre les trois résistances.

On obtient donc :

$$i = i_0 \frac{\frac{1}{r}}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r_2}}, \text{ soit } i_0 = 0,75 \text{ A.}$$

4 Recherche de la représentation de Thévenin et de Norton pour un dipôle

a. Les deux sources de courant en parallèle sont équivalentes à une source unique de courant de c.e.m. $\eta = \eta_1 + \eta_2$.

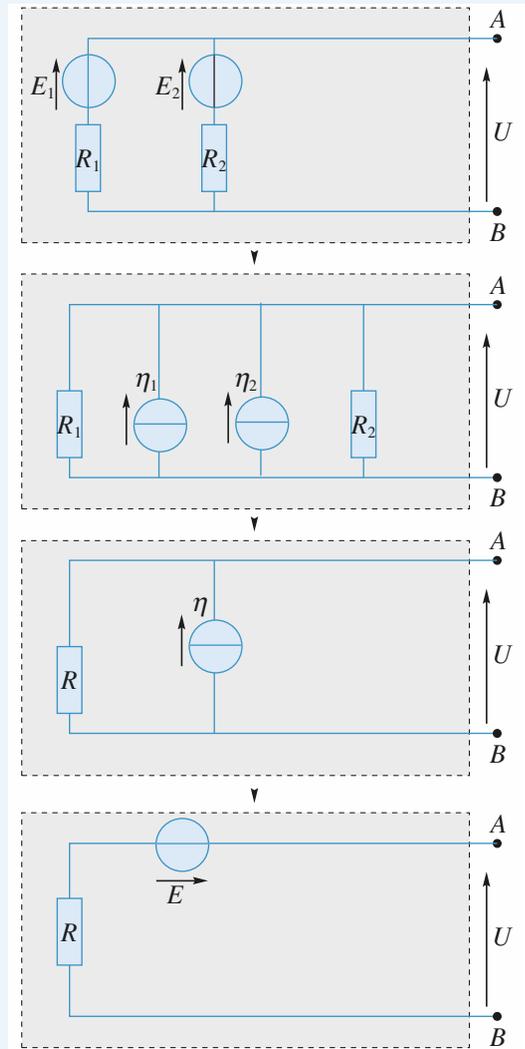
La représentation de Norton est donc :

c.e.m. $\eta = \eta_1 + \eta_2$ en parallèle avec R .

On en déduit la représentation de Thévenin :

f.e.m. $E = R(\eta_1 + \eta_2)$ en série avec R .

b. Les deux dipôles de Thévenin étant en parallèle, on commence par dessiner leur représentation de Norton (voir la figure ci-après).



Équivalences successives

Les deux sources de courant en parallèle sont équivalentes à une source unique de courant de c.e.m. $\eta : \eta_1 + \eta_2 = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2}$

et les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une résistance de valeur $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

La représentation de Norton est donc :

$$\text{c.e.m. } \eta = \frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \text{ en parallèle avec } R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

On en déduit la représentation de Thévenin :

$$\text{f.e.m. } \eta = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left(\frac{E_1}{R_1} + \frac{E_2}{R_2} \right) = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2} \text{ en série avec}$$

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

c. On transforme le générateur de Norton (η_1, R_1) en générateur de Thévenin équivalent de façon à obtenir deux générateurs en série. La représentation de Thévenin est donc :

f.e.m. $E = E_2 + R_1\eta_1$ en série avec $R = R_1 + R_2$.

On en déduit la représentation de Norton :

c.e.m. $\eta = \frac{E_2 + R_1\eta_1}{R_1 + R_2}$ en parallèle avec $R = R_1 + R_2$.

d. Les deux générateurs de Norton sont en série. On les transforme donc en utilisant leur représentation de Thévenin.

On obtient donc en série : une f.e.m. $E_1 = R_1\eta_1$, puis une résistance R_1 , puis une f.e.m. $E_2 = R_2\eta_2$ et une résistance R_2 .

La représentation de Thévenin est donc :

f.e.m. $E = R_1\eta_1 + R_2\eta_2$ en série avec $R = R_1 + R_2$.

On en déduit la représentation de Norton :

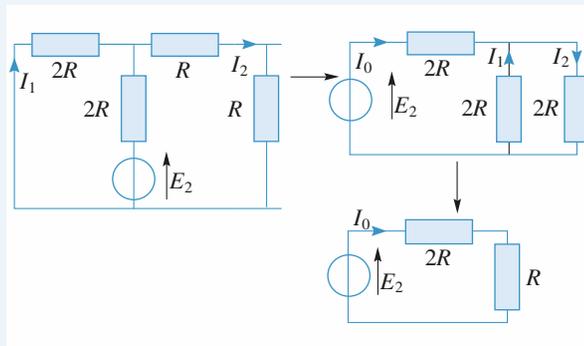
c.e.m. $\eta = \frac{R_1\eta_1 + R_2\eta_2}{R_1 + R_2}$ en parallèle avec $R = R_1 + R_2$.

$$I_1 = \frac{E_1}{3R}.$$

I_2 se déduit de I_1 par application de la relation du diviseur de courant :

$$I_2 = I_1 \frac{\frac{1}{2R}}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}} = \frac{E_1}{6R}.$$

• On éteint E_1 et η

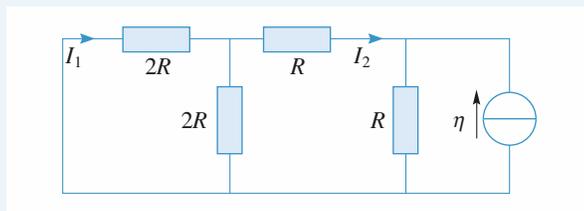


On redessine le circuit pour se ramener à une maille unique :

$I_0 = \frac{E_2}{3R}$ puis par division :

$$I_1 = -\frac{1}{2} I_0 = -\frac{E_2}{6R} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{E_2}{6R}.$$

• On éteint E_1 et E_2



Par deux divisions de courant successives, on obtient :

$$I_2 = -\frac{1}{3} \eta \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{1}{2} I_2 = -\frac{1}{6} \eta.$$

• Superposition des trois cas

On obtient finalement :

$$I_1 = \frac{E_1}{3R} - \frac{E_2}{6R} - \frac{1}{6} \eta \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{E_1}{6R} + \frac{E_2}{6R} - \frac{1}{3} \eta.$$

Méthode 2

On se ramène à une maille unique par des équivalences.

5 Calcul de résistance équivalente

1 • Non car la résistance de la branche CD n'est en parallèle avec aucune autre résistance ou association de résistances.

2 • Écrivons la loi des nœuds en C et D :

$$V_D = \frac{U + 2V_C}{5}; \quad V_C = \frac{2U + 2V_D}{5}$$

d'où : $V_D = \frac{3}{7} U$ et $V_C = \frac{4}{7} U$.

En appliquant la loi d'Ohm, on en déduit les courants I_1 et I_2 puis le courant I :

$$I_1 = \frac{V_D - 0}{R} = \frac{3}{7} \frac{U}{R}; \quad I_2 = \frac{V_C - 0}{2R} = \frac{2}{7} \frac{U}{R}; \quad I = I_1 + I_2 = \frac{5}{7} \frac{U}{R}.$$

On en déduit la résistance équivalente :

$$R_{\text{éq}} = \frac{7}{5} R.$$

Remarque : On voit que, pour le dipôle équivalent au réseau de résistances, les orientations choisies pour U et I correspondent à la convention récepteur.

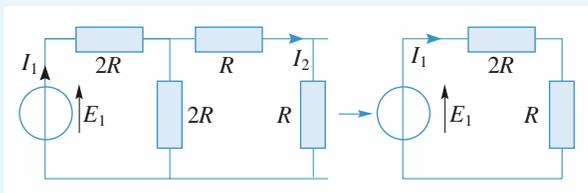
Si on avait orienté I dans l'autre sens, il aurait fallu poser :

$$U = -R_{\text{éq}} I \quad (\text{convention générateur}).$$

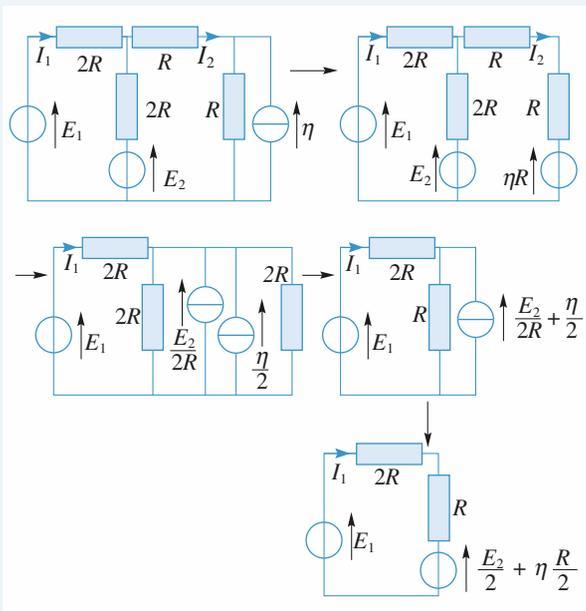
6 Étude d'un réseau par plusieurs méthodes

Méthode 1 : théorème de superposition

• On éteint E_2 et η



Pour le calcul de I_1 on remplace les trois résistances de droite par la résistance équivalente : $(R + R)$ en parallèle sur $2R$ soit une résistance équivalente R . On obtient :



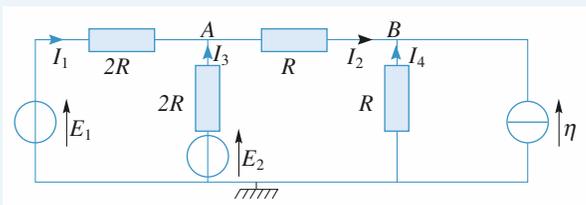
Finalement :

$$I_1 = \frac{E_1 - \frac{E_2}{2} - \frac{\eta R}{2}}{3R}$$

Dans cette série d'équivalences successives, on a perdu I_2 . Il faut donc reprendre une nouvelle série d'équivalences qui laisse intacte la branche où circule I_2 . Cette méthode est donc plus longue que l'application de la superposition.

Méthode 3

Résolution d'un système d'équations



Le réseau comporte trois nœuds. On attribue arbitrairement le potentiel nul à l'un d'entre eux (la masse) et on écrit la loi des nœuds en A et B avec les potentiels inconnus V_A et V_B .

• En A : $I_1 - I_2 + I_3 = 0$ d'où :

$$\frac{E_1 - V_A}{2R} + \frac{V_B - V_A}{R} + \frac{E_2 - V_A}{2R} = 0.$$

• En B : $I_2 + I_4 + \eta = 0$ d'où : $\frac{V_A - V_B}{R} - \frac{V_B}{R} + \eta = 0$

On obtient le système de deux équations :

$$\begin{cases} 4V_A - 2V_B = E_1 + E_2 \\ -V_A + 2V_B = R\eta \end{cases}$$

La résolution donne :

$$V_A = \frac{E_1 + E_2 + R\eta}{3} \quad \text{et} \quad V_B = \frac{E_1 + E_2 + 4R\eta}{6}.$$

On en déduit I_1 et I_2 :

$$I_1 = \frac{E_1 - V_A}{2R} = \frac{2E_1 - E_2 - R\eta}{6R}$$

et :

$$I_2 = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{E_1 + E_2 - 2R\eta}{6R}$$

Remarque : La résolution du système d'équations est ici assez simple. Cela est dû à la géométrie du réseau qui ne comporte que trois nœuds. En général, les autres méthodes sont plus rapides.

7 Étude d'un électrolyseur

L'équation de la caractéristique du générateur est $U = 4 - 20I$ avec U en volt et I en ampère.

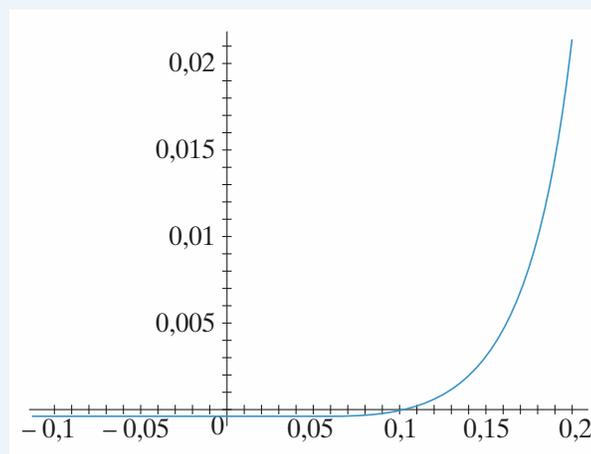
Cette droite coupe la caractéristique de l'électrolyseur en son point de fonctionnement M situé sur sa caractéristique à $U > 0$. L'équation de cette dernière est :

$$\frac{2 - 1,2}{0,1 - 0} = \frac{U - 1,2}{I}, \quad \text{d'où} \quad U = 1,2 + 8I.$$

En éliminant U , il vient $1,2 + 8I = 4 - 20I$, d'où $I = 0,1$ A et par suite $U = 2$ V.

8 Résistances d'entrée et de sortie d'un quadripôle actif

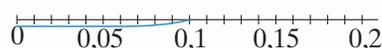
1 • Le tracé de la caractéristique est donné ci-dessous :



En circuit ouvert l'intensité est nulle ; il suffit de lire la valeur correspondante de u sur le graphe pour avoir $U_{C_0} = 0,1$ V. Ce résultat se retrouve en annulant $i(u)$, soit :

$$U_{C_0} = V_0 \ln \left(1 + \frac{I_p}{I_0} \right) \quad \text{qui redonne bien la même AN.}$$

2 • La convention adoptée ici est une convention récepteur, les parties de plan où u et i sont de même signe correspondent à des comportements récepteurs ; seule la partie ci-dessous est génératrice puisque $ui < 0$:

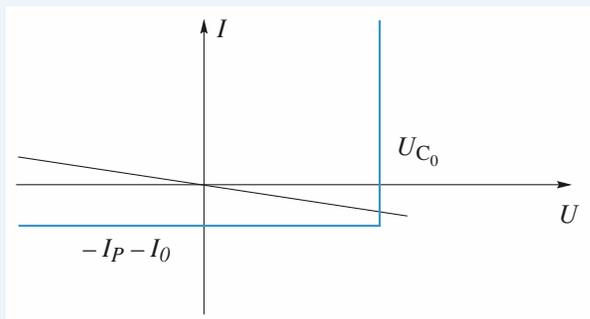


C'est cette partie qui sera intéressante puisque c'est dans ce mode de fonctionnement que la diode fournira effectivement de la puissance au circuit électrique.

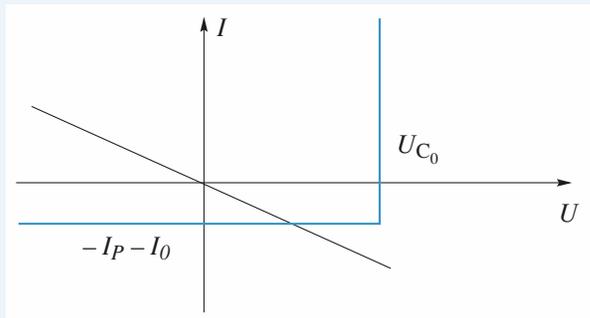
3 • On voit sur la caractéristique complète que l'intensité est pratiquement constante pour $u < 0.1 \text{ V}$ ($= U_{C_0}$) ; elle vaut environ -0.00051 A , ce qui correspond bien à $-I_P - I_0$.

Lorsque $u > 0.1 \text{ V}$, l'intensité croît rapidement (avec une pente de 10 A/V environ) ; on peut en première approximation considérer que u reste constant égal à U_{C_0} . D'où la caractéristique idéalisée de la diode.

4 • Si l'on adopte la convention récepteur pour la diode, il faut adopter une convention générateur pour la résistance ($i = -\frac{u}{R_C}$) afin de superposer les deux caractéristiques :



$$\text{Cas a) : } R_C > R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_P + I_0}, i = -\frac{U_{C_0}}{R_C}.$$

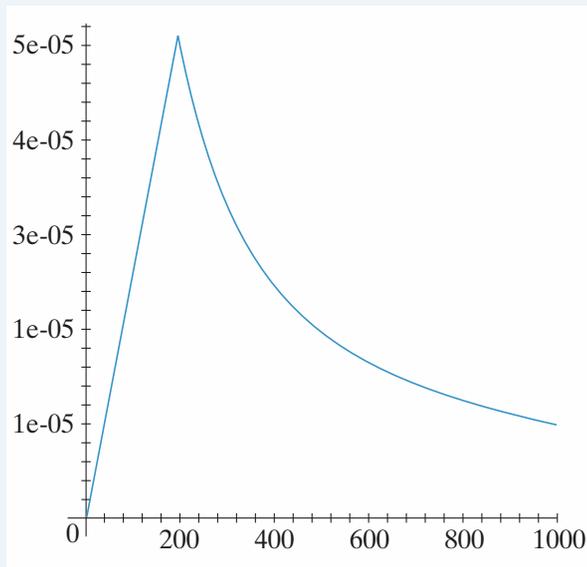


$$\text{Cas b) : } R_C < R_0 = \frac{U_{C_0}}{I_P + I_0}, u = R_C(I_P + I_0) = U_{C_0} \frac{R_C}{R_0}.$$

5 • Pour $R_C < R_0$, $P = -\frac{R_C}{R_0^2} U_{C_0}^2$, et pour $R_C > R_0$,

$$P = -\frac{U_{C_0}^2}{R_C}.$$

La courbe représentative est donc la suivante (avec les valeurs du texte, $R_0 = 196 \Omega$) :



La valeur P_{\max} est atteinte pour $R_C = R_0$ et vaut $\frac{U_{C_0}^2}{R_0}$.

6 • Le rendement doit être défini comme le rapport entre la quantité d'énergie que met la photodiode à la disposition de R_C et la quantité d'énergie qui permet à cette photodiode de fonctionner ; ceci correspond bien à $\eta = \frac{P_{\max}}{P_L}$.

Numériquement $P_{\max} = 50 \mu\text{W}$ et $\eta = 0,05$, soit un rendement de 5 %.

Ces deux valeurs sont très faibles. Il est donc nécessaire : D'une part d'utiliser une grande quantité de cellules de ce type pour parvenir à une puissance utilisable respectable. D'autre part d'améliorer les rendements des cellules grâce aux différents matériaux utilisés et aux différentes techniques de fabrication.

9 Résistances et conductances itératives

A. 1 • Le dipôle ne comportant pas de source liée, sa résistance d'entrée peut s'évaluer en utilisant les lois d'association de résistances :

$$R_{e1} = R_1 + \frac{R_2(R_0 + R_1)}{R_0 + R_1 + R_2}.$$

Par définition de la résistance itérative, il vient :

$$R_{0i} = R_1 + \frac{R_2(R_{0i} + R_1)}{R_{0i} + R_1 + R_2},$$

$$\text{d'où : } R_{0i} = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)}.$$

2 • L'ensemble étant chargé par la résistance itérative, on établit de proche en proche que :

$$R_{0i} = R_{e1} = R_{e2} = \dots = R_{en}.$$

3 • Comme le quadripôle est chargé par sa résistance itérative, on écrit $u_0 = R_{0_i} i_0$ et $u_1 = R_{0_i} i_1$. Il en résulte que :

$$A_{u_1} = \frac{u_0}{u_1} = \frac{i_0}{i_1} = A_{i_1}.$$

En considérant que le quadripôle réalise un diviseur de courant, $i_0 = \frac{R_2}{R_2 + (R_{0_i} + R_1)} i_1$, l'amplification en courant (et

l'amplification en tension) s'en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} A_{u_1} = A_{i_1} &= \frac{R_2}{R_{0_i} + R_1 + R_2} \\ &= \frac{R_2}{\sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)} + R_1 + R_2} \\ &= \frac{1}{1 + k + \sqrt{k(2+k)}}. \end{aligned}$$

4 • Pour établir les expressions de A_{u_n} il suffit de remarquer, d'une part, que :

$$A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{u_0}{u_1} \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et, d'autre part, que tous les quadripôles de l'association ont la même amplification en tension, parce qu'ils sont tous chargés par la résistance itérative. En conséquence :

$$A_{u_n} = (A_{u_1})^n.$$

Pour l'amplification en courant, on aboutit à un résultat analogue :

$$A_{i_n} = (A_{i_1})^n.$$

5 • On pose $A_{u_n} = \left(\frac{1}{K}\right)^n$, il vient $K = 10^{0,1} = 1,259$.

De l'expression de A_{u_1} , on tire :

$$K = 1 + k + \sqrt{k(2+k)} \Rightarrow k = \frac{(K-1)^2}{2K} = 2,66 \cdot 10^{-2} \\ \Rightarrow R_1 = kR_2 = 26,6 \Omega.$$

La valeur de résistance itérative s'en déduit :

$$R_{0_i} = \sqrt{R_1(R_1 + 2R_2)} = 232 \Omega.$$

B. 1 • Le dipôle ne comportant pas de source liée, sa conductance d'entrée peut s'évaluer en utilisant les lois d'association des conductances :

$$G_{e_1} = G_2 + \frac{G_1(G_0 + G_2)}{G_0 + G_1 + G_2}.$$

Par définition de la conductance itérative, il vient :

$$G_{0_i} = G_2 = \frac{G_1(G_{0_i} + G_2)}{G_{0_i} + G_1 + G_2},$$

d'où :

$$G_{0_i} = \sqrt{G_2(2G_1 + G_2)}.$$

2 • L'ensemble étant chargé par la conductance itérative, on établit de proche en proche que $G_{0_i} = G_{e_1} = G_{e_2} = \dots = G_{e_n}$.

3 • Comme le quadripôle est chargé par sa conductance itérative, on est fondé à écrire $i_0 = G_{0_i} u_0$ et $i_1 = G_{0_i} u_1$.

Il en résulte que $A_{i_1} = \frac{i_0}{i_1} = \frac{u_0}{u_1} = A_{u_1}$.

En considérant que le quadripôle réalise un diviseur de tension, $u_0 = \frac{G_1}{G_1 + (G_{0_i} + G_2)} u_1$, l'amplification en tension et

l'amplification en courant s'en déduisent immédiatement :

$$\begin{aligned} A_{i_1} = A_{u_1} &= \frac{G_1}{G_{0_i} + G_1 + G_2} \\ &= \frac{G_1}{\sqrt{G_2(2G_1 + G_2)} + G_1 + G_2} \\ &= \frac{1}{1 + k + \sqrt{k(2+k)}}. \end{aligned}$$

4 • Pour établir les expressions de A_{u_n} , il suffit de remarquer, d'une part, que :

$$A_{u_n} = \frac{u_0}{u_n} = \frac{u_0}{u_1} \frac{u_1}{u_2} \dots \frac{u_{n-1}}{u_n}$$

et, d'autre part, que tous les quadripôles de l'association ont la même amplification en tension, parce qu'ils sont tous chargés par la conductance itérative. En conséquence :

$$A_{u_n} = (A_{u_1})^n.$$

Pour l'amplification en courant, on aboutit à un résultat analogue : $A_{i_n} = (A_{i_1})^n$.

5 • On pose $A_{u_n} = \left(\frac{1}{K}\right)^n$, il vient $K = 10^{0,1} = 1,259$.

De l'expression de A_{u_1} , on tire :

$$K = 1 + k + \sqrt{k(2+k)} \Rightarrow k = \frac{(K-1)^2}{2K} = 2,66 \cdot 10^{-2},$$

d'où :

$$G_2 = kG_1 = 2,66 \cdot 10^{-5} \text{ S},$$

soit :

$$R_2 = \frac{1}{G_2} = 37,6 \text{ k}\Omega.$$

La valeur de la conductance itérative s'en déduit :

$$G_{0_i} = \sqrt{G_2(2G_1 + G_2)} = 2,32 \cdot 10^{-4} \text{ S},$$

soit encore

$$R_{0_i} = \frac{1}{G_{0_i}} = 4,3 \text{ k}\Omega.$$

10 Convertisseur analogique numérique

1 • a. Les tensions U_k délivrées par le réseau sont données par la relation de récurrence $U_{k+1} = pU_k$, d'où :

$$U_k = p^k U_0.$$

La tension U_k étant une fonction croissante de k car $p > 1$, le quantum de ce réseau est la tension U_0 délivrée par la sortie S_0 .

La tension de référence $U_{\text{réf}}$ délivrée par la sortie S_n étant reliée au quantum par la relation :

$$U_{\text{réf}} = p^n U_0.$$

Il en résulte que :
$$U_k = \frac{U_{\text{réf}}}{p^{n-k}}.$$

Les résistances étant en série, il vient, par définition du pas,

$$p = \frac{U_{k+1}}{U_k} = \frac{R_{k+1}}{R_k} > 1, \text{ d'où la relation de récurrence,}$$

$R_{k+1} = pR_k$, qui permet le calcul de $R_k = \sum_{p=0}^k r_p$ en fonction de R_0 : $R_k = p^k R_0$.

Il apparaît que la plus petite résistance du réseau est :

$$r = R_0 = r_0.$$

Les valeurs des résistances constitutives du réseau, en fonction de r , en découlent :

$$\begin{aligned} r_k &= R_k - R_{k-1} = (p^k - p^{k-1})R_0 \\ &= p^{k-1}(p-1)R_0, \end{aligned}$$

d'où $r_k = p^{k-1}(p-1)r$ ($k > 0$).

Comme $R = R_n$, il vient $R = p^n r$, et par suite :

$$r_k = \frac{p-1}{p^{n+1-k}} R.$$

A.N. : Le réseau est constitué des $(n+1) = 6$ résistances :

$$r_0 = r ; r_1 = 9r ; r_2 = 9.10r ; r_3 = 9.10^2 r ; r_4 = 9.10^3 r ;$$

$$r_5 = 9.10^4 r.$$

Soit numériquement :

$$r_0 = r = 100 \Omega ; r_1 = 900 \Omega ; r_2 = 9\,000 \Omega ; r_3 = 90\,000 \Omega ;$$

$$r_4 = 900\,000 \Omega ; r_5 = R = 9\,000\,000 \Omega.$$

b. Les tensions délivrées (en l'absence de débit de courant) par le diviseur de tension sont données par la relation :

$$U_k = \frac{U_{\text{réf}}}{p^{n-k}},$$

soit respectivement :

$$U_0 = 0,1 \text{ mV} ; U_1 = 1 \text{ mV} ;$$

$$U_2 = 10 \text{ mV} ; U_3 = 100 \text{ mV} ;$$

$$U_4 = 1 \text{ V} ; U_5 = U_{\text{réf}} = 10 \text{ V}.$$

Elles forment une échelle des multiples décimaux du quantum $U_0 = 0,1 \text{ mV}$ entre les valeurs $U_0 = 0,1 \text{ mV}$ et $U_{\text{réf}} = 10 \text{ V}$.

Ce type de réseau de résistances est utilisé comme atténuateur pour les changements de gammes dans les appareils de mesure analogiques.

2 • Pour un diviseur de tension de pas $p = 2$, les résistances constitutives sont données par la relation :

$$r_k = 2^{k-1} r.$$

La tension prélevée à la sortie S_k est :

$$U_k = 2^k U_0,$$

soit encore, en fonction de $U_{\text{réf}}$:

$$U_k = \frac{U_{\text{réf}}}{2^{n-k}}.$$

A.N. : Comme $1\,024 = 2^{10}$, il résulte, d'après la relation $U_{\text{réf}} = 2^n U_0$, qu'il faut $n+1 = 11$ résistances pour former

un réseau délivrant toutes les tensions U_k multiples de 2 du quantum $U_0 = 1 \text{ mV}$ entre les valeurs $U_0 = 1 \text{ mV}$ et $U_n = U_{\text{réf}} = 1\,024 \text{ mV}$.

Un tel réseau peut être utilisé pour la réalisation d'un convertisseur analogique-numérique (C.A.N.).

3 • En remarquant que $U_e = KU_s U'_e + U'_s$, avec $K = 1V^{-1}$ on conclut que ces circuits logiques sont des diviseurs fournissant le quotient en U_s et le reste en U'_s quand le dividende est présenté en U_e et le diviseur en U'_e lorsque $2U'_e < U_e \leq 0$.

La structure du C.A.N. permet ainsi une écriture en binaire de la tension U :

$$U = K \sum_{k=0}^n U_{s,k} U_k = K \sum_{k=0}^n U_{s,k} 2^k U_0.$$

Si la tension U ne s'exprime pas par un nombre entier de mV, la partie décimale ($< 1 \text{ mV}$) apparaît aux bornes de la résistance p sous la forme d'une tension analogique $U'_{s,0}$.

Lorsque $U = 800,5 \text{ mV}$, on observe aux niveaux des sorties de circuits logiques les valeurs suivantes :

$$800,5 = 0 \times 1024 + 800,5$$

$$\Rightarrow U_{s,10} = 0 \text{ et } U'_{s,10} = 800,5 \text{ mV} ;$$

$$800,5 = 1 \times 512 + 288,5$$

$$\Rightarrow U_{s,9} = 1 \text{ et } U'_{s,9} = 288,5 \text{ mV} ;$$

$$288,5 = 1 \times 256 + 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,8} = 1 \text{ et } U'_{s,8} = 32,5 \text{ mV} ;$$

$$32,5 = 0 \times 128 = 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,7} = 0 \text{ et } U'_{s,7} = 32,5 \text{ mV} ;$$

$$32,5 = 0 \times 64 = 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,6} = 0 \text{ et } U'_{s,6} = 32,5 \text{ mV} ;$$

$$32,5 = 1 \times 32 + 32,5$$

$$\Rightarrow U_{s,5} = 1 \text{ et } U'_{s,5} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 16 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,4} = 0 \text{ et } U'_{s,4} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 8 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,3} = 0 \text{ et } U'_{s,3} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 4 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,2} = 0 \text{ et } U'_{s,2} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 2 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,1} = 0 \text{ et } U'_{s,1} = 0,5 \text{ mV} ;$$

$$0,5 = 0 \times 1 + 0,5$$

$$\Rightarrow U_{s,0} = 0 \text{ et } U'_{s,0} = 0,5 \text{ mV}.$$

L'écriture en binaire de U est :

$$U = (01\,100\,100\,000)_2.$$

Ce convertisseur est un convertisseur à 11 bits donc la tension maximale admissible est :

$$U_{\text{max}} = 2^{11} - 1 = 2047 \text{ mV}.$$

11 Convertisseur numérique-analogique

1 • Les courants I_j qui traversent les résistances du réseau ($R, 2R$) sont indépendants de l'état des commutateurs (K_j), puisque l'amplificateur opérationnel étant parfait, son entrée inverseuse est aussi au potentiel zéro.

De proche en proche, on constate que la résistance du réseau situé à droite d'un nœud A_j est $2R$.

Ainsi, tout courant qui aboutit sur un nœud A_j se divise en deux courants I_j égaux.

La source débite le courant $I = \frac{E}{2R}$ qui se divise ensuite en deux courants égaux au niveau de chaque nœud :

$$I_{n-1} = \frac{I}{2^1}, \quad I_{n-2} = \frac{I}{2^2}, \quad \dots, \quad I_j = \frac{I}{2^{n-j}}, \quad \dots,$$

$$I_1 = \frac{I}{2^{n-1}}, \quad I_0 = \frac{I}{2^n}.$$

2 • Selon l'état (b_j) du commutateur (K_j), le courant I_j est dirigé vers la masse ou vers l'entrée inverseuse de l'amplificateur opérationnel.

Le courant I_N qui traverse la résistance R' est :

$$I_N = \sum_{j=0}^{n-1} b_j I_j = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{I}{2^{n-j}} = \frac{E}{R} \sum_{j=0}^{n-1} b_j \frac{1}{2^{n+1-j}}.$$

La tension délivrée par le C.N.A. s'établit alors à :

$$\begin{aligned} U_s &= -R' I_N = -E \frac{R'}{R} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b_j}{2^{n+1-j}} \\ &= -E \frac{R'}{R} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j. \end{aligned}$$

3 • Le quantum δU_s est la variation (en valeur absolue) de tension observée à la sortie du C.N.A. lorsque le bit de plus faible poids $b_0 2^0$ est seul à varier quand on passe d'une information $N_{(2)}$ à une information $N'_{(2)}$:

$$\delta U_s = E \frac{R'}{R} \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Pour que $\delta U_s = 10 \text{ mV}$, il faut prendre une source de f.e.m. E telle que :

$$E = \frac{R}{R'} 2^{n+1} \delta U_s = 12,8 \text{ V}.$$

4 • La valeur de la tension U_s s'obtient par application de la formule obtenue dans la question 2) :

$$\begin{aligned} U_s &= -E \frac{R'}{R} \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j = -\delta U_s \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j \\ &= -10^{-2} (2^7 + 2^4 + 2^1) = -1,46 \text{ V}. \end{aligned}$$

De façon plus générale, on voit que :

$$N = \sum_{j=0}^{n-1} b_j 2^j = -\frac{U_s}{\delta U_s},$$

c'est-à-dire que la valeur numérique décimale de $N_{(2)}$ est :

$$N = -\frac{U_s}{\delta U_s} = -100 U_s,$$

avec U_s exprimée en volt, soit :

$$N = 146.$$

Pour connaître l'état de tous les commutateurs il suffit alors d'écrire N en base 2 : $N_{(2)}$.

Pour écrire N en base 2, il suffit de diviser N par 2 et de relever le premier reste b_0 , puis de recommencer sur le dividende N_0 obtenu jusqu'à obtenir un dividende nul.

Ainsi, pour $N = 146$ il vient successivement :

$$\frac{146}{2} = 73 + 0 \Rightarrow N_0 = 73 \text{ et } b_0 = 0$$

$$\frac{73}{2} = 36 + 1 \Rightarrow N_1 = 36 \text{ et } b_1 = 1$$

$$\frac{36}{2} = 18 + 0 \Rightarrow N_2 = 18 \text{ et } b_2 = 0$$

$$\frac{18}{2} = 9 + 0 \Rightarrow N_3 = 9 \text{ et } b_3 = 0$$

$$\frac{9}{2} = 4 + 1 \Rightarrow N_4 = 4 \text{ et } b_4 = 1$$

$$\frac{4}{2} = 2 + 0 \Rightarrow N_5 = 2 \text{ et } b_5 = 0$$

$$\frac{2}{2} = 1 + 0 \Rightarrow N_6 = 1 \text{ et } b_6 = 0$$

$$\frac{1}{2} = 0 + 1 \Rightarrow N_7 = 0 \text{ et } b_7 = 1$$

soit, en définitive :

$$N_{(2)} = (10 \ 010 \ 010).$$

LES OBJECTIFS

- Relations tension-courant pour une bobine idéale et un condensateur idéal.
- Étude du régime libre d'un circuit comportant des dipôles passifs.
- Étude de l'établissement d'un régime permanent par l'intermédiaire d'un régime transitoire.
- Étude énergétique de ces circuits.

LES PRÉREQUIS

- Lois de Kirchhoff.
- Théorèmes généraux en régime permanent.
- Relations tension-courant pour un générateur et pour un résistor.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.

ESSENTIEL

◀ L'approximation des régimes quasi stationnaires

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires (A.R.Q.S.) tous les effets liés à la propagation des signaux sous forme de tensions ou de courants sont négligés.

Les lois de Kirchhoff restent valables avec les grandeurs instantanées, et l'intensité instantanée est la même en tous points d'une même branche.

◀ Théorèmes généraux

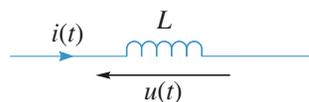
Tous les théorèmes généraux (loi des nœuds en termes de potentiels, relation de Millman) et ceux relatifs aux circuits linéaires restent valables avec les grandeurs instantanées.

Le principe de superposition pour les circuits linéaires reste valable à condition de considérer la superposition des états liés aux sources et de ceux liés aux valeurs initiales non nulles des variables d'état (intensités et/ou tensions).

◀ Bobines idéales

Les bobines *idéales* établissent entre la tension $u(t)$ à leurs bornes et l'intensité $i(t)$ qui les traverse la relation :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$



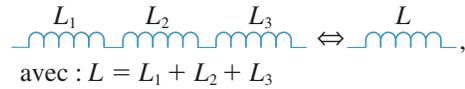
où L est l'inductance de la bobine.

Le courant $i(t)$ à travers une bobine est une fonction continue du temps.

L'énergie d'une bobine est :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} Li^2(t).$$

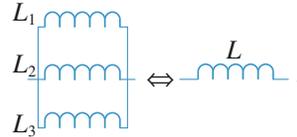
La variable d'état d'une bobine est son courant : la connaissance de $i(t)$ renseigne complètement sur l'état de la bobine. Des bobines idéales en série ajoutent leurs inductances :



$$L = \sum_k L_k.$$

Des bobines idéales en parallèle ajoutent les inverses de leurs inductances :

$$\frac{1}{L} = \sum_k \frac{1}{L_k}.$$



avec : $\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3}$

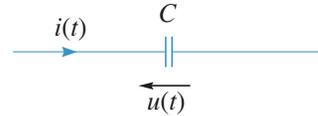
Pour s'entraîner : ex. 2

Condensateurs idéaux

Ils établissent, entre le courant $i(t)$ qui les traverse et la tension $u(t)$ à leurs bornes, la relation :

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt},$$

où C est la capacité du condensateur.



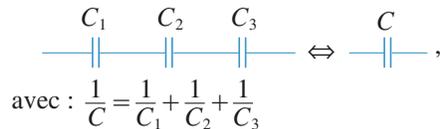
La tension $u(t)$ aux bornes d'un condensateur et donc sa charge $q(t) = Cu(t)$ sont des fonctions continues du temps.

L'énergie d'un condensateur est : $\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t)$.

La variable d'état d'un condensateur est la tension à ses bornes : la connaissance de $u(t)$ renseigne complètement sur l'état du condensateur.

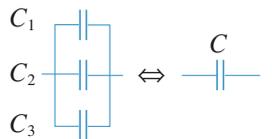
Des condensateurs idéaux en série ajoutent les inverses de leurs capacités :

$$\frac{1}{C} = \sum_k \frac{1}{C_k}.$$



Des condensateurs idéaux en parallèle ajoutent leurs capacités :

$$C = \sum_k C_k.$$



avec : $C = C_1 + C_2 + C_3$

Pour s'entraîner : ex. 1 et 3

Régime libre

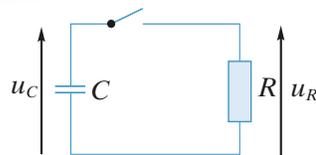
Le régime libre d'un circuit est le régime qu'on observe lorsque ses sources libres sont éteintes. Les conditions initiales des variables d'état fixent alors l'énergie du circuit, et par voie de conséquence, le régime libre qui en résulte.

• **Circuit (R, C)**

L'équation différentielle d'évolution s'écrit $\tau \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$

avec $\tau = RC$ où τ est le temps de relaxation.

La solution est $u_C(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.



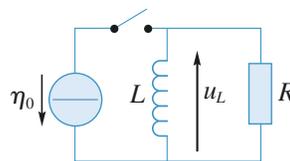
à $t = 0 : u_C(t = 0) = u_0$
(condensateur chargé)

• **Circuit (R, L)**

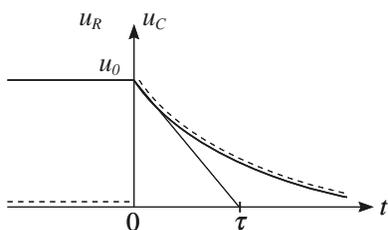
L'équation différentielle d'évolution s'écrit $\tau \frac{di}{dt} + i = 0$

avec $\tau = \frac{L}{R}$ où τ est le temps de relaxation.

La solution est $i(t) = \eta_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$.

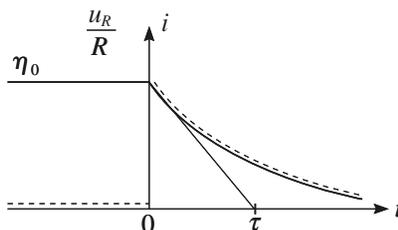


À l'ouverture de l'interrupteur ($t = 0$),
l'intensité dans la bobine est $i(0) = \eta_0$.



$u_R(t) = \dots$
 $u_C(t) = \dots$ (tension aux bornes de la capacité)

La tension aux bornes d'une résistance peut être discontinue.



$i(t) = \dots$
 $\frac{u_R(t)}{R} = \dots$ (courant dans la résistance)

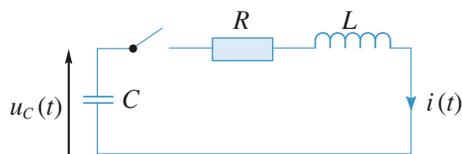
L'intensité peut être discontinue dans une résistance.

• **Circuit (R, L, C)**

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2 \sigma \omega_0 \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0,$$

ou encore : $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0,$



à $t = 0 : u_C(t = 0) = u_0$ et $i(t = 0) = 0$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ la période propre

et $Q = \frac{1}{2\sigma} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$, le facteur de qualité (grandeur sans dimension). Ce facteur est aussi appelé facteur de surtension (cf. chapitre 3).

Selon les valeurs de Q , donc de σ , les régimes libres sont différents. En effet, A et B étant des constantes déterminées par les conditions initiales, il vient :

– si $Q < \frac{1}{2}$, alors $\sigma > 1$, le régime est apériodique (courbe 1 : $\sigma = 1,5$), et en posant

$\omega = \omega_0 \sqrt{\sigma^2 - 1}$, on a :

$$u_C(t) = e^{-\sigma \omega_0 t} (A \cosh \omega t + B \sinh \omega t) ;$$

– si $Q = \frac{1}{2}$, alors $\sigma = 1$, le régime est critique (courbe 1 : $\sigma = 1$), et :

$$u_C(t) = e^{-\omega_0 t} (A + Bt) ;$$

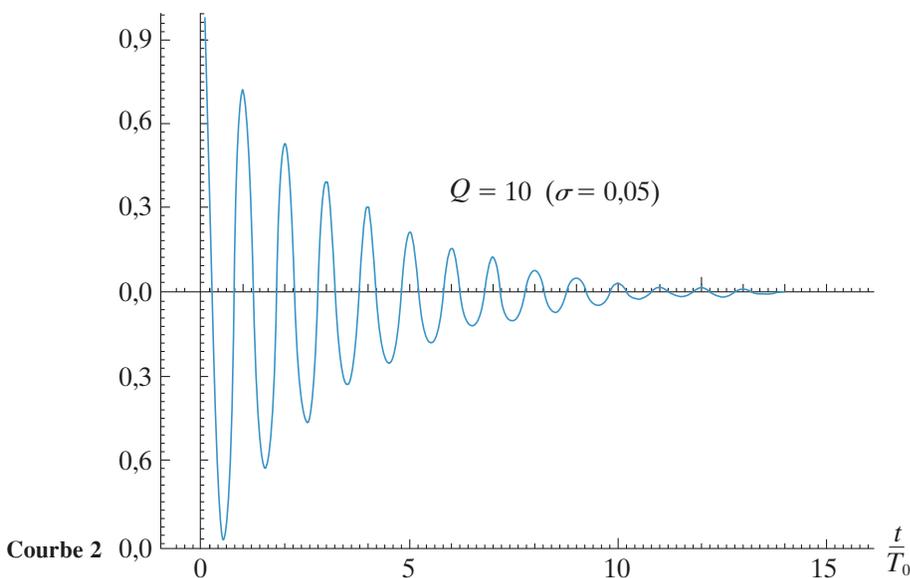
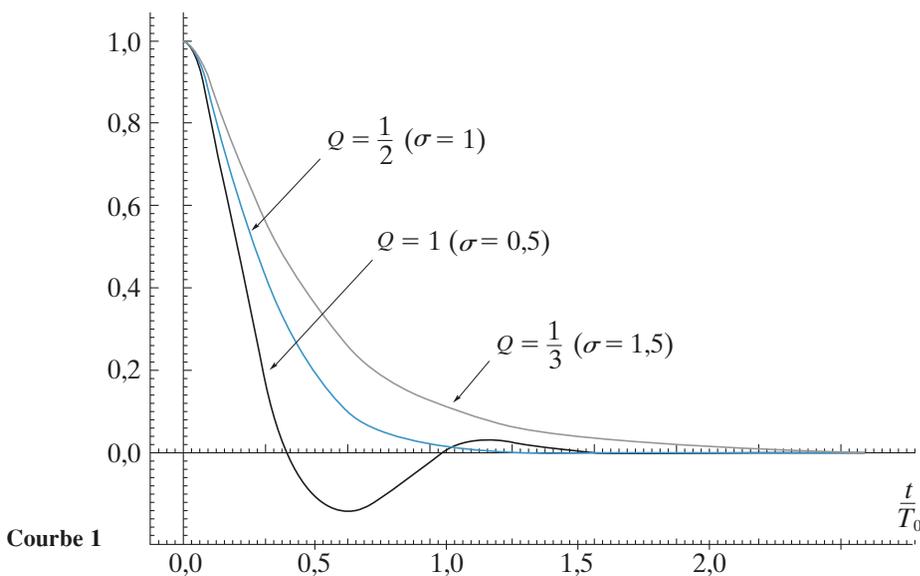
– si $Q > \frac{1}{2}$, alors $\sigma < 1$ le régime est pseudo-périodique ou oscillant amorti (courbe 1 :

$\sigma = 0,5$ et courbe 2 : $\sigma = 0,05$). En posant $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \sigma^2}$, il vient :

$$u_C(t) = e^{-\sigma \omega_0 t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t).$$

• Le temps de relaxation le plus court correspond sensiblement à $Q = \frac{1}{2}$ (ou $\sigma = 1$) (courbe 1).

• Lorsque le facteur de qualité est grand, $Q \gg 1$ (donc $\sigma \ll 1$), le nombre d'oscillations « observables » donne un ordre de grandeur du facteur de qualité : ainsi pour la courbe 2 ($Q = 10$), on observe bien une dizaine d'oscillations.



► Pour s'entraîner : ex. 4 et 6

◀ Régime transitoire – Régime forcé

Les courants et les tensions d'un circuit linéaire sont, à chaque instant, fonctions des valeurs initiales de ses variables d'état et des caractéristiques (f.e.m. et c.e.m.) de ses sources indépendantes. Généralement, après un régime transitoire où les effets liés aux conditions initiales se manifestent, il s'établit un régime forcé (ou permanent) déterminé uniquement par les caractéristiques des sources indépendantes.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 5, 7 et 8**

Conseils et pièges à éviter

- Les réseaux étant linéaires, le théorème de superposition est applicable, mais attention aux conditions initiales.
- Bien connaître les lois d'associations de résistors, de bobines idéales, et de condensations idéaux.
- Pour un circuit R, L, C série les équations différentielles d'évolution peuvent s'écrire :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\sigma\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

$$\text{ou } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

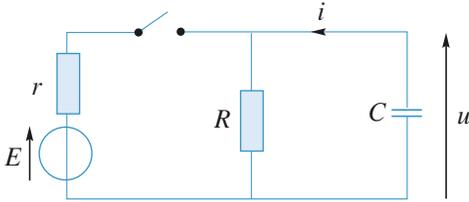
Avec Q le coefficient de qualité du circuit.

Comme en mécanique il faut bien connaître les diverses solutions.

1 Décharge d'un condensateur

E est une tension continue. L'interrupteur étant fermé depuis « très longtemps », on l'ouvre à la date $t = 0$.

Déterminer $u(t)$ et $i(t)$.



Conseils

L'interrupteur étant fermé depuis une durée pratiquement infinie, que peut-on dire de i et de u à la date $t = 0^-$ (juste avant l'ouverture) ?

Laquelle de ces deux grandeurs est une fonction continue du temps ?

On fera attention aux orientations de u et de i .

2 Étude de circuits (R, L) (d'après ENAC)

Dans chacune des questions on choisira la bonne proposition en la justifiant soigneusement.

1 • Le circuit représenté sur la *figure 1* est alimenté par une source de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne négligeable devant R . On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Établir l'expression de l'intensité i du courant dans le circuit en fonction du temps t .

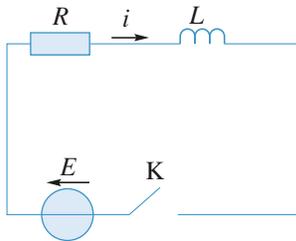


Fig. 1

a. $i(t) = \frac{E}{2R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RL}\right) \right)$

b. $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 + \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right)$

c. $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{L}{R}t\right) \right)$

d. $i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \right)$

2 • Le même générateur alimente le circuit représenté sur la *figure 2*.

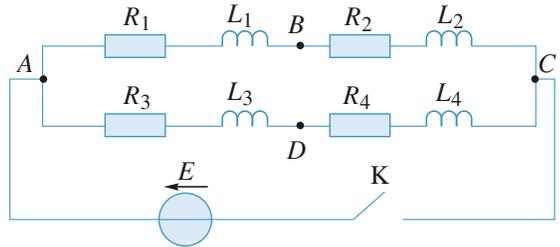


Fig. 2

Déterminer la relation entre L_1 , L_2 , R_1 et R_2 pour que la différence de potentiel V_{AB} entre les points A et B soit indépendante du temps.

a. $L_1 R_1 = (L_1 + L_2) (R_1 - R_2)$

b. $L_2 R_2 = (L_1 + L_2) (R_2 - R_1)$

c. $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$

d. $L_1 R_1 = L_2 R_2$

3 • La relation établie à la question précédente étant vérifiée, calculer l'énergie W_{AB} consommée dans le tronçon de circuit AB pendant l'intervalle de temps $[0, t]$ en fonction de la variable $\frac{R_1}{L_1} t$.

a. $W_{AB} = E^2 \frac{L_1}{(R_1 + R_2)^2} \left[\frac{R_1}{L_1} t - \left(1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L_1} t\right) \right) \right]$

b. $W_{AB} = E^2 \frac{R_1}{(R_1 + R_2)^2} \left[\frac{R_1}{L_1} t + 1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L_1} t\right) \right]$

c. $W_{AB} = E^2 \frac{L_1}{(L_1 + L_2)^2} \left[\frac{R_1}{L_1} t + 1 + \exp\left(-\frac{R_1}{L_1} t\right) \right]$

d. $W_{AB} = E^2 \frac{L_1}{2(R_1 + R_2)^2} \left[-\frac{R_1}{L_1} t + 1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L_1} t\right) \right]$

d. $W_{AB} = E^2 \frac{L_1}{2(R_1 + R_2)^2} \left[-\frac{R_1}{L_1} t + 1 - \exp\left(-\frac{R_1}{L_1} t\right) \right]$

4 • La relation établie à la question 2 étant toujours vérifiée, déterminer les relations entre L_1 , L_2 , L_3 , L_4 et R_1 , R_2 , R_3 , R_4 pour que la différence de potentiel v_{BD} entre les points B et D soit constamment nulle.

a. $L_1 R_1 = L_2 R_2 = L_3 R_3 = L_4 R_4$

b. $(L_3 + L_4) R_1 = (L_4 + L_1) R_2 = (L_1 + L_2) R_3 = (L_2 + L_3) R_4$

c. $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_3}{L_4} = \frac{R_3}{R_4}$

d.
$$\frac{R_1}{L_3 + L_4} = \frac{R_2}{L_4 + L_1} = \frac{R_3}{L_1 + L_2} = \frac{R_4}{L_2 + L_3}$$

Conseils

1) Ce cas est celui du cours.
2) Utiliser des associations de dipôles et 1. pour établir le courant dans AC, puis exprimer V_{AB} .

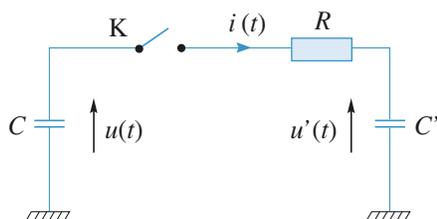
3) Écrire V_{AB} et $\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}$ en tenant compte de 2.

avant d'écrire $W_{AB}(t) = \int_0^t V_{AB} \cdot i_{AB}(u) du$.

4) Il faut utiliser la question 2. pour raisonner par analogie sur la branche ADC ; pour que V_{BD} soit nul il faut nécessairement qu'il soit indépendant du temps.

3 Transfert de charges entre deux condensateurs

Un condensateur de capacité C est chargé sous une d.d.p. E , puis, à $t = 0$, est relié, par fermeture de l'interrupteur K, à un circuit (R, C') série (le condensateur de capacité C' est initialement non chargé).



- 1 • Déterminer les variations du courant $i(t)$ de décharge du condensateur C .
- 2 • Calculer la variation d'énergie $\Delta \mathcal{E}$ du système constitué par la résistance R et les deux condensateurs C et C' .
- 3 • Démontrer que $|\Delta \mathcal{E}|$ est aussi l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance R .
- 4 • L'expression de $|\Delta \mathcal{E}|$ étant indépendante de R , que se passe-t-il lorsque R tend vers zéro ?

Conseils

Penser à écrire la conservation de la charge électrique pour les deux condensateurs.

L'équation différentielle en $i(t)$ s'obtient en écrivant que $i(t)$ traverse la résistance R et les deux condensateurs.

Quand R tend vers zéro, les conditions de l'A.R.Q.S. sont-elles réalisées ?

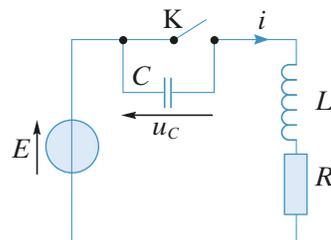
4 Annulation de la surtension aux bornes d'un circuit (R, L) commuté

Un circuit de commutation, modélisé par un interrupteur K et un condensateur de capacité C , relie un circuit (R, L) série à un générateur de tension continue de f.e.m. E .

1 • À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K. Déterminer l'intensité $i(t)$ dans l'inductance sachant que sa valeur initiale est nulle. À quelle date peut-on assurer, à mieux de 1 %, que le régime permanent est atteint ?

2 • Le régime permanent étudié précédemment étant établi, on ouvre l'interrupteur K. À quelle condition sur C le courant d'ouverture $i(t)$ décroît-il uniformément jusqu'à s'annuler sans qu'aucune surtension n'apparaisse aux bornes de l'interrupteur ?

Représenter, dans ces conditions, les variations de $i(t)$ et celles de $u_c(t)$.



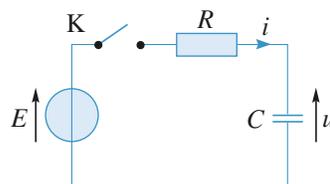
3 • Expliquer qualitativement ce que l'on aurait observé, à l'ouverture de l'interrupteur, en l'absence de la capacité C .

Conseils

Écrire l'équation de la maille et utiliser les conditions de continuité du courant dans l'inductance et de la tension aux bornes de la capacité pour établir les conditions initiales.

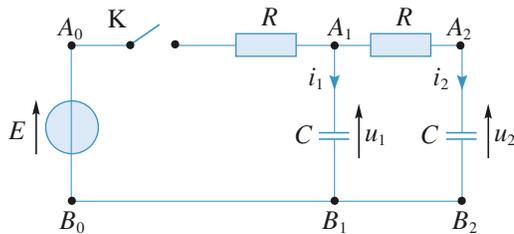
5 Cellules (R, C) soumises à un échelon de tension

1 • Un condensateur de capacité C étant chargé sous la tension U_0 , à $t = 0$ on ferme l'interrupteur du circuit. Calculer le courant $i(t)$ à travers C .



2 • On associe à la première cellule (R, C) une seconde cellule (R, C) comme indiqué ci-dessous.

À $t = 0$, les deux condensateurs ont la même tension U_0 à leurs bornes.



À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

- Déterminer les valeurs initiales des courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$.
- Établir et résoudre l'équation différentielle donnant le courant $i_2(t)$ dans la seconde cellule.

Conseils

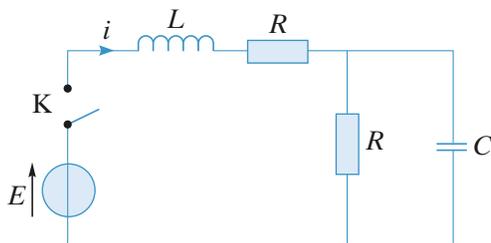
Pour le second circuit, appliquer la loi de nœuds en A_1 de façon à n'utiliser que les deux courants $i_1(t)$ et $i_2(t)$, puis appliquer la loi des mailles à deux mailles indépendantes. Lors de l'établissement des conditions initiales, ne pas oublier que la tension et la charge d'un condensateur sont des fonctions continues du temps.

6 Réponse d'un circuit (R, L, C)

On considère le circuit représenté ci-dessous alimenté par un générateur de force électromotrice constante E . On ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$, le condensateur étant initialement non chargé.

Calculer l'intensité i du courant traversant l'inductance au cours du temps.

On suppose que $RC = \frac{L}{R} = \tau$.

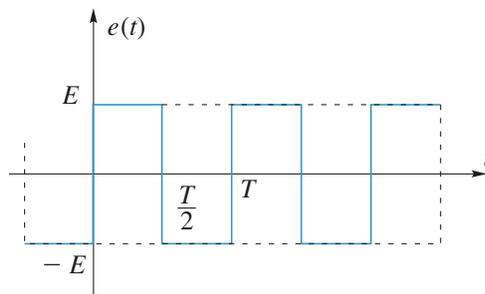
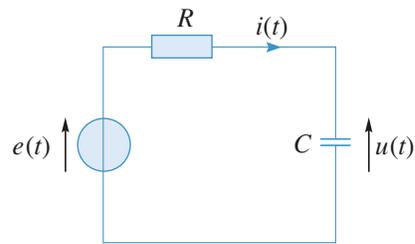


Conseils

Appliquer la loi des nœuds et la loi des mailles. Pour trouver les conditions initiales, se souvenir que la tension aux bornes d'un condensateur est continue et que le courant dans une inductance l'est également.

7 Réponse d'un circuit (R, C) série à une excitation périodique en créneaux

Un générateur de tension délivrant des signaux en créneaux $e(t)$ de valeur moyenne nulle et d'amplitude E est branché aux bornes d'un circuit (R, C) série.



- Déterminer, en régime périodique établi (de période T), l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur et représenter ses variations. On écrira, en fonction de E, R, C et T , les expressions de valeurs extrêmes u_{\max} et u_{\min} de $u(t)$.

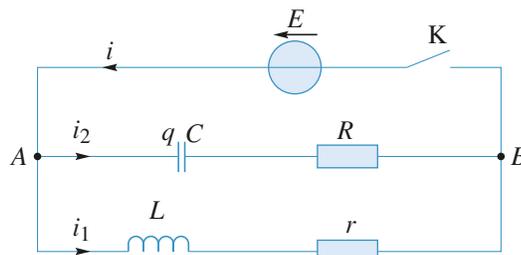
- Déterminer la trajectoire de phase du condensateur, lieu de ses points de phase $M\left(u, \tau \frac{du}{dt}\right)$, où $\tau = RC$.

Conseils

Utiliser le fait qu'en régime permanent la réponse $u(t)$ est de valeur moyenne nulle, comme l'excitation $e(t)$. Penser à utiliser l'équation différentielle pour établir l'équation de la trajectoire de phase.

8 Circuits alimentés en parallèle

On considère le circuit ci-dessous composé de deux branches comportant l'une, une résistance r et un inductance L et l'autre, une résistance R et un condensateur de capacité C . Elles sont alimentées par un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne négligeable.



Le condensateur étant déchargé, on ferme à l'instant $t = 0$ l'interrupteur K. On désignera respectivement par i_1 et par i_2 les intensités dans la branche contenant l'inductance et dans la branche contenant le condensateur, et par i l'intensité dans le générateur.

1 • Déterminer par un raisonnement physique, les valeurs de i_1 , i_2 et i immédiatement après la fermeture de l'interrupteur K et une fois le régime permanent établi.

2 • Déterminer en fonction du temps les régimes transitoire de $i_1(t)$ et $i_2(t)$ et tracer l'allure des courbes correspondantes.

3 • En déduire l'expression de $i(t)$. Que devient ce résultat si les conditions $R = r$ et $\frac{L}{C} = R^2$ sont vérifiées ?

On supposera dans toute la suite que $R = r$ et $\frac{L}{C} = R^2$.

On considère toujours le même circuit alimenté par le même générateur. K étant fermé, le régime permanent précédent est établi. À un instant que l'on choisira comme nouvelle origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

4 • Établir l'équation différentielle vérifiée par $q(t)$.

5 • Montrer que juste après l'ouverture $i_2 = -\frac{E}{R}$ et $q = CE$.

6 • Déterminer complètement l'expression de $i_2(t)$ en fonction de E , R , C , et t .

7 • Déterminer, de deux manières différentes, l'énergie dissipée par effet Joule au bout d'un temps très long après l'ouverture de l'interrupteur K.

Conseils

1) Il faut envisager les différentes continuités des variables d'état intensité et tension pour $t = 0$ et t tendant vers l'infini.

2) Les deux mailles sont indépendantes et l'on retrouve à chaque fois le cours.

4) K ouvert, il n'y a qu'une loi des mailles à écrire ; penser à tenir compte des relations imposées par l'énoncé.

5) Ici encore il faut se servir des relations de continuité et des résultats de la première question.

6) Déduire de celle de $q(t)$ l'équation vérifiée par $i_2(t)$. Quelle est la solution d'une équation différentielle du second ordre dont le discriminant de l'équation caractéristique est nul ? Il faut avec 5. trouver $\frac{di_2}{dt}(0)$.

7) On peut directement calculer l'énergie dissipée par l'ensemble des deux résistances, ou se poser la question de savoir où était initialement stockée cette énergie.

9 Détermination des caractéristiques électriques d'une membrane cellulaire

Cet exercice représente une moitié d'épreuve de concours de 3 h 00. Il porte sur des régimes variables non-sinusoï-

daux mais nécessite la connaissance de l'amplificateur opérationnel fonctionnant en régime linéaire (cf. chapitre 4). Si vous n'avez pas encore abordé ces notions, vous pouvez traiter la question préliminaire 3. puis revenir au reste de ce problème après le cours sur l'amplificateur opérationnel.

A • Questions préliminaires :

1 • Conversion intensité-tension

L'amplificateur opérationnel est supposé parfait (fig. 1.) et fonctionne en régime linéaire. Exprimer la tension de sortie V_0 en fonction de l'intensité du courant I , de la tension $V_{\text{réf}}$ et de R .

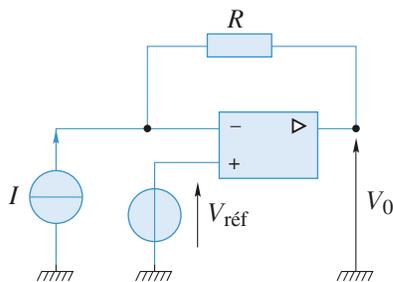


Fig. 1

2 • Montage soustracteur et amplificateur :

2 • 1. L'amplificateur opérationnel est supposé parfait (fig. 2.) et fonctionne en régime linéaire.

Exprimer la tension V_s en fonction de V_{e1} et V_{e2} ainsi que des différentes résistances.

Que se passe-t-il si les quatre résistances sont identiques ?

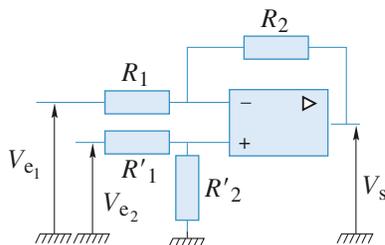


Fig. 2

2 • 2. L'amplificateur opérationnel est supposé parfait (fig. 3.) et fonctionne en régime linéaire.

Déterminer la tension V en fonction de V_1 , R et R_{var} .

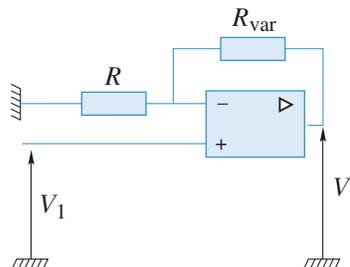
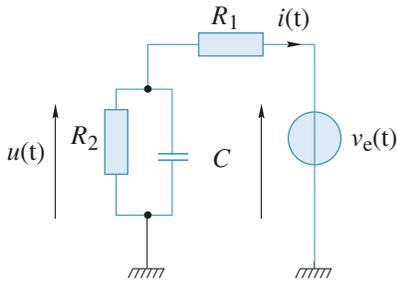


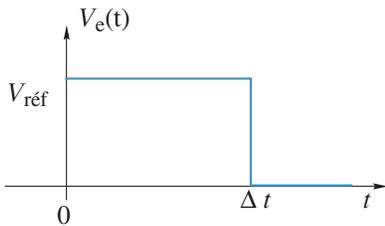
Fig. 3

3 • Étude d'un régime transitoire :

Nous considérons le circuit ci-dessous constitué d'un condensateur de capacité C , initialement déchargé, de deux résistances R_1 et R_2 , alimenté par un générateur délivrant un signal variable dans le temps $v_e(t)$.



On applique à ce circuit une stimulation d'amplitude $\Delta V = V_{\text{réf}} > 0$ et de durée Δt , ayant l'allure suivante :



3 • 1. Exprimer $i(t = 0^+)$ en fonction de $V_{\text{réf}}$ et R_1 . Exprimer $i(t = \Delta t^-)$ en fonction de $V_{\text{réf}}$, R_1 et R_2 . On supposera Δt suffisamment grand pour que le circuit ait atteint un régime permanent à l'instant Δt^- .

3 • 2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ en fonction de R_1 , R_2 , C et $v_e(t)$. Préciser la constante de temps τ' de ce circuit.

3 • 3. Établir l'expression de $u(t)$ sur l'intervalle $[0, \Delta t]$. En supposant $\tau' \ll \Delta t$, préciser la valeur $u(\Delta t)$.

3 • 4. En déduire $i(t)$ sur l'intervalle $[0, \Delta t]$.

3 • 5. Établir l'expression de $u(t)$ dans l'intervalle $[\Delta t^+, +\infty[$. En déduire $i(t)$ dans l'intervalle $[\Delta t^+, +\infty[$. Quelle est l'allure de $i(t)$ sur $]-\infty, +\infty[$?

B • Modèle simplifié de l'amplificateur

Les techniques de potentiel imposé à une membrane ont pour finalité le maintien du potentiel membranaire d'une cellule ou d'un groupe de cellules à une valeur fixe et l'enregistrement simultané des courants ioniques liés aux transferts d'ions à travers la membrane. Toute mesure nécessite une paire d'électrodes : une électrode de mesure reliée à un convertisseur et une électrode de référence indifférente (généralement une électrode au calomel ou au chlorure d'argent).

La pipette d'enregistrement est un simple tube de verre contenant une solution ionique de composition fixée par l'expérience dans lequel est placée une électrode d'argent chlorurée. L'ensemble permet la conduction électrique entre la membrane cellulaire ou l'intérieur de la cellule et le premier étage de l'amplificateur, qui est un convertisseur courant-tension (bloc (2)).

Le second étage (blocs (3) et (4)) retranche la tension de référence et amplifie le signal d'un facteur compris entre 1 et 200.

1 • Étude de l'amplificateur :

En utilisant les résultats des questions préliminaires :

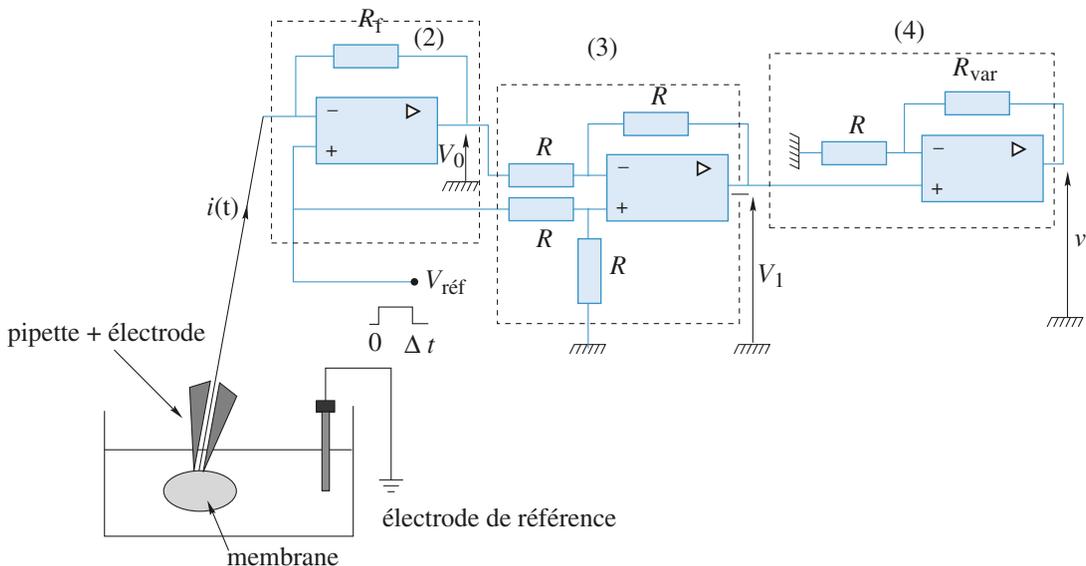
1 • 1. Exprimer V_0 en fonction de $V_{\text{réf}}$, $i(t)$ et R_f .

1 • 2. Exprimer V_1 en fonction de $V_{\text{réf}}$ et V_0 , puis en fonction de $i(t)$ et R_f .

1 • 3. Exprimer V en fonction de $i(t)$, R_f , R et R_{var} .

2 • Mesure de la résistance de « seal » :

La pipette est modélisable par une résistance R_{pip} de $10\text{M}\Omega$. La zone de contact (ZC) entre la pipette et la



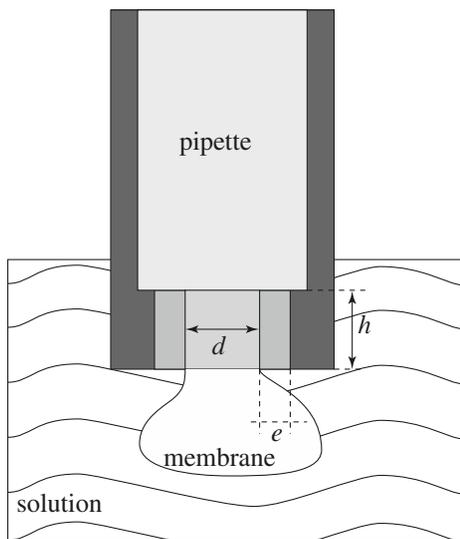
membrane peut être représentée par un cylindre de diamètre $d = 1 \mu\text{m}$ et de hauteur $h = 2 \mu\text{m}$, de conductivité $\sigma = 10^{-2} \Omega^{-1} \cdot \text{cm}^{-1}$.

2 • 1. Exprimer la résistance d'accès $R_{\text{accès}}$ à la membrane en fonction de h, d , et σ . Calculer numériquement $R_{\text{accès}}$.

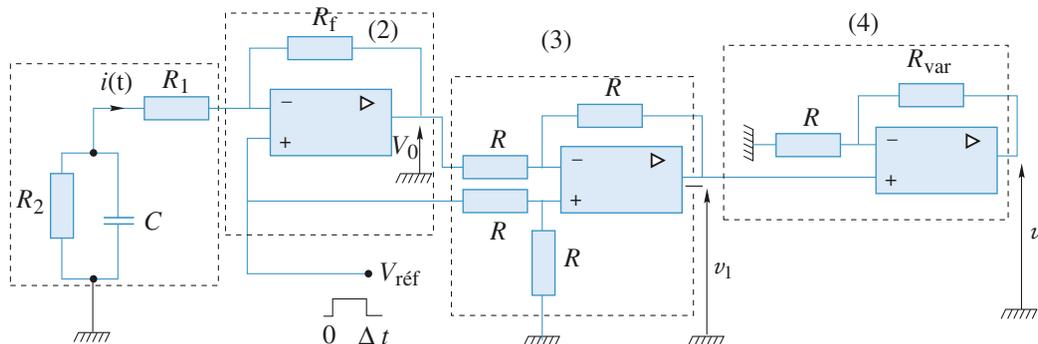
Il se forme de plus une résistance de jonction, ou de fuite, appelée résistance de *seal*, conditionnant la stabilité de la liaison pipette membrane. Cette résistance est constituée par une colonne cylindrique entourant la zone ZC, de même conductivité σ que ZC. Cette colonne a l'épaisseur $e = 3 \cdot 10^{-10} \text{m}$ ($e \ll d$) et la hauteur $h = 2 \mu\text{m}$.

2 • 2. Exprimer la résistance de jonction R_{seal} en fonction de h, d, e et σ . Calculer numériquement R_{seal} .

2 • 3. Quel est alors le montage électrique équivalent à l'association de ces trois résistances : R_{pip} , $R_{\text{accès}}$ et R_{seal} ? Compte tenu des valeurs numériques, simplifier le montage.



3 • Mesure en configuration cellule entière : On modélise par R_1 la résistance équivalente de la pipette précédente et (R_2, C) représente la résistance et la capacité de la membrane (bloc (1) du schéma ci-dessous) :



Déduire de l'enregistrement de $v(t)$ donné ci-dessous les valeurs de R_1, R_2 et C . On précise que $V_{\text{réf}} = 5 \text{mV}$, $R_f = 100 \text{M}\Omega$ et $R_{\text{var}} = 0$. Sur cet enregistrement, l'abscisse t est en seconde et l'ordonnée V est en volt.

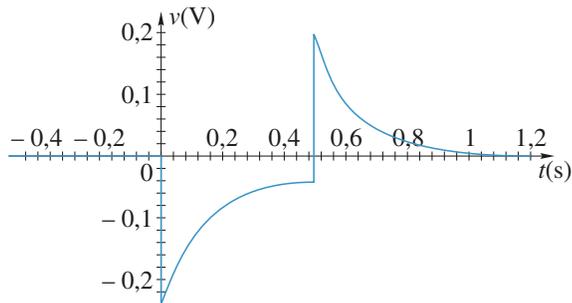


Fig. 5

Conseils

A) Questions 1. et 2. : se souvenir qu'un AO idéal est tel que $i_+ = i_- = 0$ et qu'en régime linéaire $V_+ = V_-$.

3.1) Quelle est la variable d'état continue pour un condensateur ? En déduire $i(0+)$. À quoi est assimilable un condensateur en régime permanent continu ? En déduire $i(\Delta t^-)$.

3.2) Il suffit d'écrire loi des mailles et loi des nœuds.

3.3) L'intégration de cette équation différentielle est classique ; il faut ensuite faire $\Delta t \gg \tau'$ dans l'expression obtenue ou considérer C comme un interrupteur ouvert pour obtenir $u(\Delta t)$.

3.5) Écrire la nouvelle équation différentielle et l'intégrer en tenant compte de la valeur de $u(\Delta t)$ précédente.

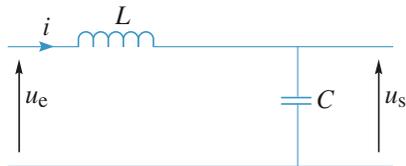
B) Questions 1.1. à 1.3. : il suffit de transposer les résultats du A.

2.1) à 2.3) Se souvenir de la relation donnant la résistance d'un tronçon cylindrique de conducteur ohmique. Comment sont associées R_{pip} , R_{seal} et $R_{\text{accès}}$?

3) Les lectures de $v(0+)$, $v(\Delta t^-)$ et τ' donnent par l'intermédiaire de A.3.1. les valeurs cherchées ; la valeur de $v(\Delta t^-)$ confirme les valeurs de R_1 et R_2 .

10 Réponse d'un circuit (L, C) à une impulsion

On étudie la réponse du circuit représenté sur le *document 1* pour plusieurs excitations. La bobine et le condensateur sont supposés idéaux.

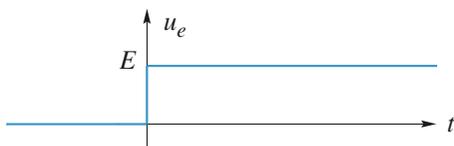


Doc. 1

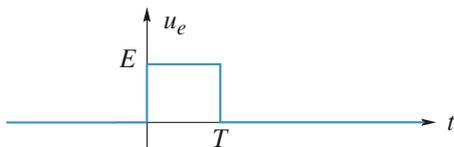
1. $u_e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u_e(t) = E$ pour $t \geq 0$ (doc. 2). Déterminer $u_s(t)$.

2. $u_e(t) = 0$ pour $t < 0$ et pour $t > T$; $u_e(t) = E$ pour $t \in [0, T]$ (doc. 3). Déterminer $u_s(t)$.

Pour quelles valeurs de T l'amplitude des oscillations est-elle maximale ?



Doc. 2



Doc. 3

3. $u_e(t)$ est une impulsion : $u_e(t)$ a la forme précédente mais avec :

$$T \rightarrow 0, E \rightarrow \infty \text{ avec le produit } ET = A \text{ (constant).}$$

Déterminer $u_s(t)$.

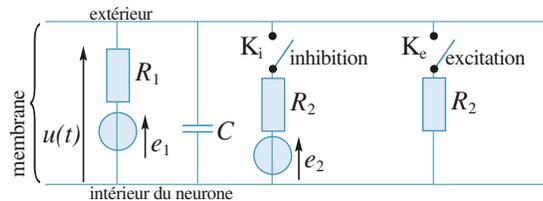
2) On pourra décomposer $u_e(t)$ en une somme de deux fonctions dont la réponse est déjà connue.

Quelles sont les valeurs de u_s et de $\frac{du_s}{dt}$ à la date $t = 0^-$? Ces deux grandeurs sont-elles des fonctions continues du temps ?

3) On fera un développement limité à l'ordre 1 en $\omega_0 T$.

11 Modélisation d'un neurone

La membrane d'un neurone peut être grossièrement représentée par le modèle électrique suivant, où $e_1 = 70 \text{ mV}$ et $e_2 = 80 \text{ mV}$ (les valeurs numériques sont approximatives).



Lors d'une excitation l'interrupteur K_e est fermé, lors d'une inhibition l'interrupteur K_i est fermé et lors d'un état de repos (désexcitation) K_e et K_i sont ouverts.

Lors d'une excitation de durée finie, on observe une diminution exponentielle de la différence de potentiel $u(t)$ avec une constante de temps de $\tau_c = 2 \text{ ms}$ et lors d'une désexcitation un retour à $e_1 = 70 \text{ mV}$ avec une constante de temps $\tau_c = 10 \text{ ms}$.

Déduire de ces valeurs la réponse $u(t)$ du neurone à un signal d'inhibition de durée 5 ms :

a. lorsque la cellule est au départ au repos (K_e toujours ouvert) ;

b. lorsque la cellule est au départ excitée (K_e s'ouvrant à $t = 0$).

Conseils

La constante de temps de charge ou décharge d'un circuit (R, C) est $\tau = RC$.

Remplacer, lors de l'excitation ou de l'inhibition, l'ensemble {générateur, R_1 , R_2 } par le générateur de Thévenin équivalent.

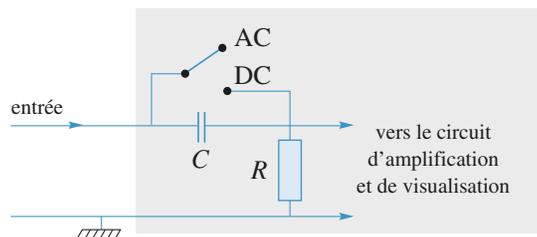
Les constantes de temps sont-elles différentes ? Quelle information leur rapport permet-il d'obtenir ? Ne pas oublier qu'après le signal d'inhibition, le neurone retourne à son état de repos.

12 Signal carré et oscilloscope en mode « AC »

Rappeler les ordres de grandeur de l'impédance d'entrée de tout oscilloscope.

Rappeler les ordres de grandeur de l'impédance de sortie de tout générateur de fonction.

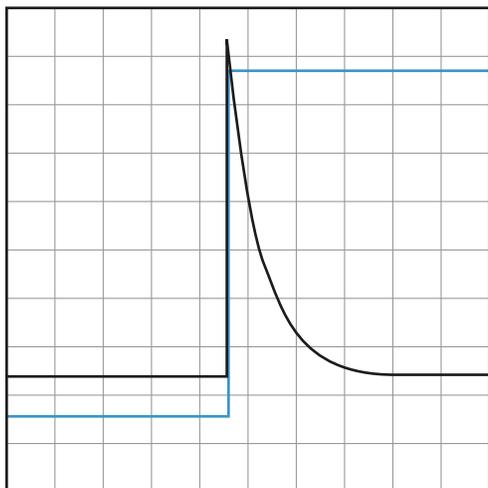
Le circuit d'entrée d'un oscilloscope en mode *Alternative Current* (AC) peut être modélisée par un circuit RC :



Doc. 1. Oscilloscope

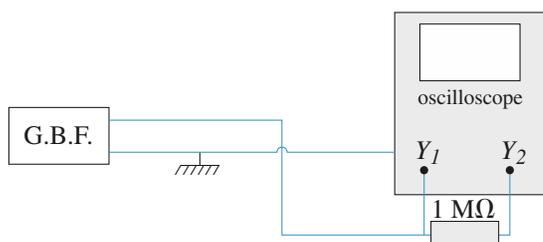
En mode *Direct Current* (DC) le condensateur C est court-circuité.

On branche sur les deux entrées, l'une Y_1 en mode « DC » et l'autre Y_2 en mode « AC », de l'oscilloscope un générateur basse fréquence de résistance de sortie négligeable. On observe les signaux de sortie suivants pour des calibres identiques en Y_1 et Y_2 , 1 V/division et en X : 100 ms/division :



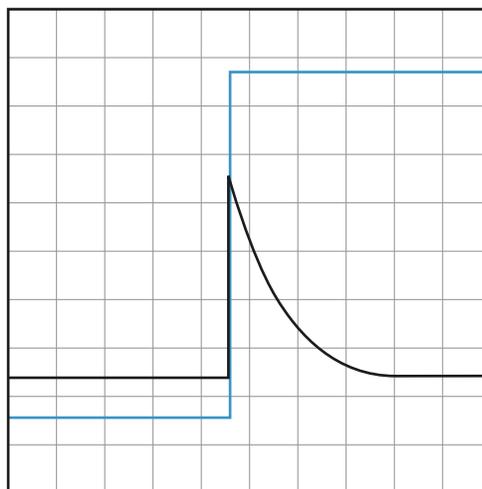
Doc. 2

On branche une résistance de valeur $1\text{ M}\Omega$ en série avec l'entrée Y_2 de l'oscilloscope et on réalise la même mesure avec les mêmes calibres d'oscilloscope.



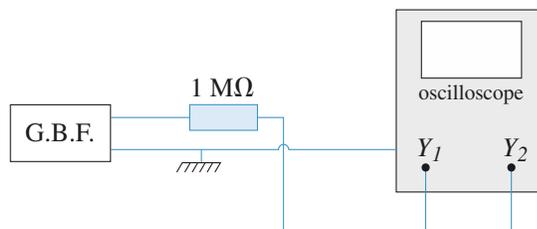
Doc. 3

On observe alors les deux signaux suivants :



Doc. 4

- 1 ■ Vérifier que le résultat des deux expériences est compatible avec le modèle des entrées DC et AC de l'oscilloscope et en déduire les valeurs de R et C . On donnera les équations des divers signaux.
- 2 ■ Que donneraient les signaux Y_1 et Y_2 si la résistance de $1\text{ M}\Omega$ était branchée de la façon suivante :



Doc. 5

On prendra $R = 1\text{ M}\Omega$ pour cette dernière question.

Conseils

Le protocole expérimental permet de visualiser la réponse à un échelon de tension des deux montages. Comment la première permet-elle de calculer la constante de temps RC ?

La deuxième mesure permet de calculer R et C . Il suffit de voir si les valeurs sont compatibles avec la première mesure.

Pour la deuxième question, il est judicieux d'utiliser le générateur de Thévenin équivalent au G.B.F. à la résistance de $1\text{ M}\Omega$ et à la résistance d'entrée en Y_1 .

1 Décharge d'un condensateur

L'interrupteur étant fermé depuis « très longtemps », le circuit a atteint son régime permanent. Le condensateur est complètement chargé et le courant qui le traverse est nul. On peut donc le remplacer par un circuit ouvert.

Sur le schéma équivalent à $t = 0^-$, on reconnaît un diviseur de tension, ce qui donne :

$$u(0^-) = E \frac{R}{R+r}$$

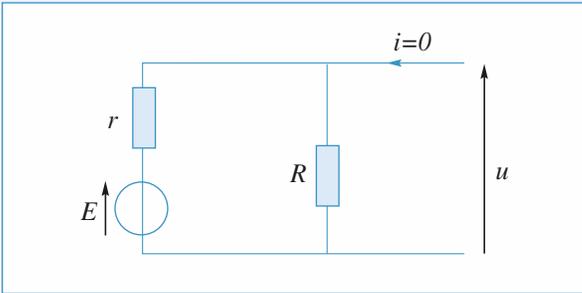


Schéma équivalent à $t = 0^-$

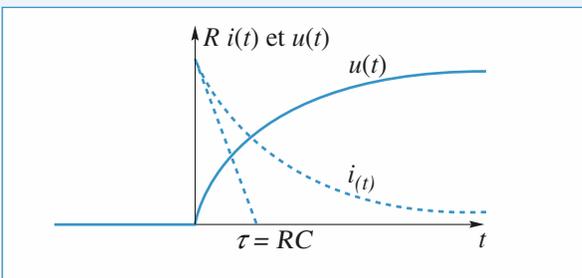
Sur le schéma valable pour $t > 0$, on reconnaît le régime libre d'un simple circuit (R, C) .

Avec les conventions utilisées :

$$u(t) = +R i(t) \text{ et } i(t) = -C \frac{du}{dt}$$

L'équation différentielle est donc :

$$\tau \frac{du}{dt} + u = 0 \text{ avec } \tau = RC$$



On remarque que contrairement à $u(t)$, la fonction $i(t)$ est discontinue en $t = 0$.

La tension u étant une fonction continue du temps :

$$u(0^+) = u(0^-) = E \frac{R}{R+r}$$

On en déduit la solution : $u(t) = E \frac{R}{R+r} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$,

et donc, par dérivation (ou en remarquant que $u(t) = Ri(t)$) :

$$i(t) = \frac{E}{R+r} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$$

2 Étude de circuits (R, L) (d'après ENAC)

1 • Sachant que τ est homogène à temps, les réponses a. et c. sont impossibles. À $t = 0$ on doit avoir $i(t) = 0$ donc la réponse c. est aussi impossible. La réponse est donc d. C'est le cas du cours ; l'important est de bien écrire la continuité de i dans la bobine en $t = 0$.

L'équation différentielle est $E = Ri + L \frac{di}{dt}$ et s'intègre en

$$i = \lambda \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) + \frac{E}{R}; \text{ avec } i(0^+) = i(0^-) = 0,$$

il vient bien d.

2 • On peut associer L_1 et L_2 en série : $L = L_1 + L_2$ et R_1 et R_2 en série : $R = R_1 + R_2$ et appliquer 1. pour déterminer i_{AC}

$$i_{AC} = \frac{-E}{R_1 + R_2} \left(\exp\left[-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t\right] - 1 \right)$$

D'autre part $V_{AB} = R_1 i_{AC} + L_1 \frac{di_{AC}}{dt}$

$$V_{AB} = \left(-R_1 \frac{E}{R_1 + R_2} + L_1 \frac{E}{L_1 + L_2} \right) \exp\left(-\frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2}t\right) + \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$$

d'où V_{AB} indépendant du temps si $\frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2}$

ou encore $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$, réponse c.

3 • Avec la relation du 2.

$$V_{AB} = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2} \text{ et } \frac{R_1 + R_2}{L_1 + L_2} = \frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$$

et $P_{AB}(t) = V_{AB} i_{AC}(t)$

soit $\omega_{AB}(t) = \int_{u=0}^{u=t} V_{AB} i_{AC}(u) du$

$$\omega_{AB}(t) = \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_2)^2} \left(\int_0^t 1 - e^{-\frac{R_1}{L_1}u} du \right)$$

$$\omega_{AB} = \frac{R_1 E^2}{(R_1 + R_2)^2} \left[t + \left(e^{-\frac{R_1}{L_1}t} - 1 \right) \frac{L_1}{R_1} \right]$$

soit réponse a.

Remarque : Les réponses b. et c. peuvent être éliminées d'emblée car inhomogènes.

4 • Si 2. est vérifiée $V_{AB} = \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$.

• Par analogie avec 2.,

$$V_{AD} = \frac{R_3 E}{R_3 + R_4} + \left(\frac{L_3 E}{L_3 + L_4} - \frac{R_3 E}{R_3 + R_4} \right) e^{-\frac{R_3 + R_4}{L_3 + L_4} t}$$

Or, $V_{BD} = V_{BA} + V_{AD}$; une condition nécessaire pour que V_{BD} soit nul est que V_{AB} soit indépendant du temps ;

donc, par la même démarche qu'en 2., $\frac{L_3}{L_4} = \frac{R_3}{R_4}$

• Il reste alors $V_{BD} = \frac{R_3 E}{R_3 + R_4} - \frac{R_1 E}{R_1 + R_2}$

qui doit être nul, soit $R_3 R_2 = R_1 R_4$ et finalement la bonne proposition est c.

3 Transfert de charges entre deux condensateurs

1 • La loi d'Ohm appliquée à la résistance s'écrit :

$$(1) u - u' = Ri, \text{ avec } i = -C \frac{du}{dt} = C' \frac{du'}{dt}.$$

En dérivant la première relation, on élimine les tensions u et u' à l'aide de la deuxième relation :

$$R \frac{di}{dt} + \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right) i = 0.$$

En posant $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'} \right)$, on obtient une équation diffé-

rentielle d'ordre 1 à coefficients constants $\frac{di}{dt} + \frac{i}{\tau} = 0$, qui

s'intègre en $i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ puisque $i(0) = \frac{E}{R}$. En effet,

$$u(0^-) = u(0^+) = E$$

et $u'(0^-) = u'(0^+) = 0$, par continuité de $q(t)$ et $q'(t)$ en 0.

Le courant de décharge décroît exponentiellement jusqu'à s'annuler.

2 • Initialement seul le condensateur C est chargé et :

$$\mathcal{E}(0) = \frac{CE^2}{2}.$$

Lorsque l'équilibre est atteint, (1) conduit à $u(\infty) = u'(\infty) = U_\infty$, l'énergie du système est :

$$\mathcal{E}(\infty) = \frac{(C + C')U_\infty^2}{2}.$$

La détermination de U_∞ s'effectue en écrivant que la charge du système s'est conservée : $CE = (C + C')U_\infty$, d'où :

$$U_\infty = \frac{C}{C + C'} E \text{ et } \mathcal{E}(\infty) = \frac{C^2 E^2}{2(C + C')}.$$

L'énergie du système a varié de :

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \mathcal{E}(\infty) - \mathcal{E}(0) = \frac{CE^2}{2} \left(\frac{C}{C + C'} - 1 \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} E^2 < 0. \end{aligned}$$

La charge du système n'a pas varié, mais son énergie a diminué.

3 • On calcule l'énergie dissipée dans la résistance R :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R &= \int_0^\infty Ri^2 dt = R \left(\frac{E}{R} \right)^2 \int_0^\infty e^{-\frac{2t}{\tau}} dt \\ &= \frac{E^2}{2R} \tau \left[-e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^\infty = \frac{E^2}{2R} \tau = \frac{1}{2} \frac{CC'}{C + C'} E^2. \end{aligned}$$

On constate que $\mathcal{E}_R = |\Delta \mathcal{E}|$: la présence de la résistance permet la dissipation de l'énergie $|\Delta \mathcal{E}|$ sous forme d'effet Joule, mais la valeur de $|\Delta \mathcal{E}|$ n'est pas déterminée par la résistance R qui ne figure d'ailleurs pas dans son expression.

4 • Lorsque la résistance R est nulle, le bilan d'énergie peut se modéliser de deux façons différentes ou complémentaires :

- de l'énergie est dissipée au niveau de l'interrupteur lors de la mise en contact ;
- le circuit ne fonctionne plus dans l'A.R.Q.S. et de l'énergie est rayonnée (effet d'antenne).

4 Annulation de la surtension aux bornes d'un circuit (R, L) commuté

1 • L'équation différentielle en $i(t)$ s'obtient par la loi des mailles :

$$E = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt},$$

d'où, en posant $\tau = \frac{L}{R}$: $\tau \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{E}{R}$.

Cette équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet une solution de la forme :

$$i(t) = A e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R},$$

où la constante d'intégration A se détermine à l'aide des conditions initiales $i(0_-) = i(0_+) = 0$, traduisant que le courant à travers l'inductance est une fonction continue du temps :

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

Le régime permanent est théoriquement atteint au bout d'un temps infini et l'intensité est alors égale à $i_{\text{lim}} = \frac{E}{R}$. L'écart

entre la valeur de l'intensité à la date t et sa valeur limite est, en valeur relative, égale à $\frac{i_{\text{lim}} - i(t)}{i_{\text{lim}}} = e^{-\frac{t}{\tau}}$. Soit t_0 tel que

$e^{-\frac{t_0}{\tau}} = 10^{-2}$, il vient $t_0 = \tau \ln(10^2) = 4,6 \tau$. Pratiquement, au bout de 5τ , on ne perçoit plus, à mieux de 1 %, d'évolution pour le courant $i(t)$.

2 • Pour étudier l'évolution de la tension $u_C(t)$ après l'ouverture de l'interrupteur K, on prend comme nouvelle origine des temps la date de l'ouverture de l'interrupteur. L'équation différentielle en $u_C(t)$ s'obtient encore par application de la loi des mailles :

$$E = u_C(t) + Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt},$$

où $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$, soit en définitive :

$$E = u_C(t) + RC \frac{du_C(t)}{dt} + LC \frac{d^2u_C(t)}{dt^2}.$$

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$,

soit : $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Il vient, en divisant l'équation précédente par LC :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C(t)}{dt} + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 E. \quad (1)$$

Pour qu'aucune surtension n'apparaisse aux bornes de l'interrupteur, il faut que le régime du circuit soit un régime aperiodique :

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \leq \frac{1}{2}, \text{ donc } C \geq \frac{4L}{R^2}.$$

En dérivant l'équation différentielle en $u_C(t)$, on obtient l'équation différentielle en $i(t)$:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i(t) = 0.$$

C'est pour la valeur critique $Q_C = \frac{1}{2}$ que le courant d'ouverture s'annule le plus rapidement possible. Mais cette

condition est quasiment impossible à satisfaire exactement, il faut prendre Q légèrement inférieur à la valeur critique pour obtenir le résultat souhaité. En définitive, il faut choisir un condensateur de capacité C légèrement supérieure à la

valeur critique $C_c = \frac{4L}{R^2}$.

On considère pour la suite, le cas théorique de l'amortissement critique. Le courant évolue alors suivant une loi de la forme :

$$i(t) = (A + Bt)e^{-\omega_0 t}.$$

Les conditions de continuité à $t = 0$ imposent :

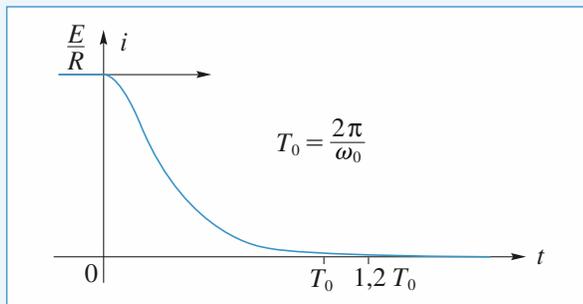
$$i(0_-) = i(0_+) = \frac{E}{R} \text{ et } E = Ri(0_+) + L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0_+},$$

$$\text{soit } L \left(\frac{di}{dt} \right)_{t=0_+} = 0.$$

Il en résulte que $A = \frac{E}{R}$ et $B = \frac{E}{R} \omega_0$, donc :

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}.$$

Les variations de $i(t)$ sont données ci-après :



Par ailleurs, les conditions de continuité à $t = 0$ donnent :

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 0 \text{ et } i(0_+) = C \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{R}$$

donc $\left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0} = \frac{E}{RC} = \frac{\omega_0}{2} E$, car $Q_C = \frac{1}{2}$.

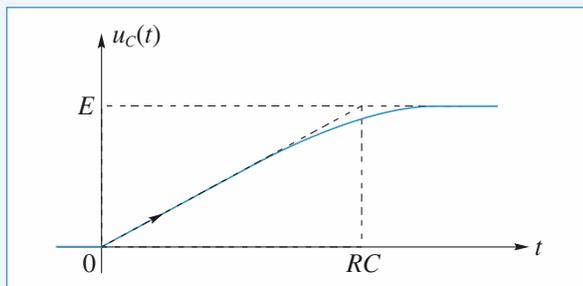
En régime critique, la loi de variation de $u_C(t)$, solution de l'équation différentielle (1), est de la forme :

$$u_C(t) = (A' + B't)e^{-\omega_0 t} + E$$

ce qui, compte tenu des conditions initiales, s'explique en :

$$u_C(t) = E - E \left(1 + \frac{1}{2} \omega_0 t \right) e^{-\omega_0 t}.$$

Les variations de $u_C(t)$ sont données ci-dessous.



La valeur maximale de $u_C(t)$ s'obtient en calculant la dérivée de $u_C(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{du_C(t)}{dt} &= \frac{1}{C} i(t) = \frac{E}{RC} (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t} \\ &= \frac{E\omega_0}{2} (1 + \omega_0 t) e^{-\omega_0 t}. \end{aligned}$$

Cette dérivée ne s'annule que pour t tendant vers l'infini, c'est-à-dire que $u_{C, \max} = E$. Aucune surtension n'apparaît aux bornes de l'interrupteur.

3 • En l'absence de condensateur, l'inductance provoque aux bornes de l'interrupteur K une surtension telle qu'il y apparaît une étincelle conductrice qui referme le circuit. Ainsi, la continuité du courant à travers l'inductance se trouve assurée (contre la volonté de l'expérimentateur).

Cette surtension peut d'ailleurs être dangereuse pour des systèmes inductifs parcourus par des courants importants (moteurs électriques). La présence du condensateur à l'ouverture du circuit est une mesure de sécurité.

5 Cellules (R, C) soumises à un échelon de tension

1 • L'équation de maille $E = Ri + \frac{q}{C}$ donne par dérivation par rapport au temps :

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0, \text{ car } i = \frac{dq}{dt}.$$

Cette équation différentielle s'intègre en :

$$i(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

en posant $\tau = RC$.

La constante d'intégration A se détermine à l'aide de la

condition initiale $i(0) = \frac{E - U_0}{R}$, d'où :

$$i(t) = \frac{E - U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

2 • a. À tout instant $i_2(t) = \frac{u_1(t) - u_2(t)}{R}$, donc à l'instant

initial : $i_2(0) = 0$, car $u_1(0) = u_2(0) = U_0$.

Par ailleurs, la résistance R , placée entre A_0 et A_1 est, à

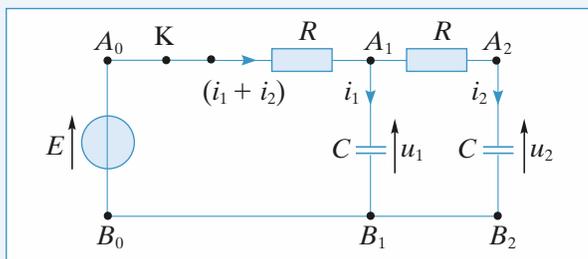
tout instant, parcourue par le courant $i_1(t) + i_2(t) = \frac{E - u_1(t)}{R}$,

ce qui donne, à l'instant initial :

$$i_1(0) + i_2(0) = \frac{E - U_0}{R}.$$

Compte tenu de la valeur $i_2(0)$, la valeur initiale de $i_1(t)$ s'établit à :

$$i_1(0) = \frac{E - U_0}{R}.$$



b. On applique la loi des mailles à la maille $A_1A_2B_2B_1$, puis à la maille $A_0A_2B_2B_0$. On obtient :

$$u_1 = Ri_2 + u_2 \text{ et } E = R(i_1 + i_2) + Ri_2 + u_2.$$

En notant que $i_1 = C \frac{du_1}{dt}$ et que $i_2 = C \frac{du_2}{dt}$, on dérive les

deux relations précédentes, il vient :

$$\frac{i_1}{C} = R \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C} \text{ et } 0 = R \frac{di_1}{dt} + 2R \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C}.$$

Portant l'expression de i_1 déduite de la première des deux relations précédentes dans la seconde, on obtient l'équation différentielle en $i_2(t)$:

$$\tau^2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + 3\tau \frac{di_2}{dt} + i_2 = 0,$$

où $\tau = RC$.

Cette équation différentielle du second ordre linéaire à coefficients constants a pour équation caractéristique :

$$\tau^2 r^2 + 3\tau r + 1 = 0,$$

dont les racines sont $r = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2\tau}$.

Il en résulte que la solution est de la forme :

$$i_2(t) = e^{-\frac{3t}{2\tau}} \left(Ae^{\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} + Be^{-\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} \right),$$

où A et B sont des constantes d'intégration déterminées par

les conditions initiales $i_2(0)$ et $\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0}$.

Pour ce faire, on calcule la dérivée de $i_2(t)$:

$$\frac{di_2}{dt} = e^{-\frac{3t}{2\tau}} \left[-\frac{3}{2\tau} \left(Ae^{\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} + B e^{-\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} \right) + \frac{\sqrt{5}}{2\tau} \left(Ae^{\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} - B e^{-\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} \right) \right]$$

et on détermine la valeur initiale de $\left(\frac{di_2}{dt}\right)$.

De la relation $\frac{i_1}{C} = R \frac{di_2}{dt} + \frac{i_2}{C}$, on en déduit :

$$\left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} = \frac{1}{RC} [i_1(0) - i_2(0)] = \frac{E - U_0}{R\tau}.$$

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par le système des deux équations :

$i_2(0) = A + B = 0$ et :

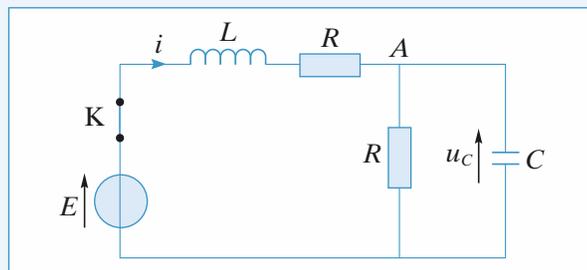
$$\begin{aligned} \left(\frac{di_2}{dt}\right)_{t=0} &= -\frac{3}{2\tau} (A + B) + \frac{\sqrt{5}}{2\tau} (A - B) \\ &= \frac{\sqrt{5}}{2\tau} (A - B) = \frac{E - U_0}{R\tau}, \end{aligned}$$

ce qui donne $A = -B = \frac{E - U_0}{R\sqrt{5}}$ et, par suite :

$$\begin{aligned} i_2(t) &= \frac{E - U_0}{R\sqrt{5}} e^{-\frac{3t}{2\tau}} \left(e^{\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} - e^{-\frac{\sqrt{5}t}{2\tau}} \right) \\ &= \frac{2}{\sqrt{5}} e^{-\frac{3t}{2\tau}} \frac{E - U_0}{R} \operatorname{sh} \left(\frac{\sqrt{5}}{2\tau} t \right). \end{aligned}$$

6 Réponse d'un circuit (R, L, C)

On note u_C la tension aux bornes du condensateur.



On applique la loi des nœuds en A :

$$i = \frac{u_C}{R} + C \frac{du_C}{dt} \quad (1)$$

Pour les deux mailles qui contiennent le générateur, la loi des mailles s'écrit :

$$E = L \frac{di}{dt} + Ri + u_C, \quad (2)$$

ce qui donne en dérivant :

$$0 = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} \quad (3)$$

L'équation différentielle en $i(t)$ du circuit s'obtient en éliminant u_C entre les trois relations précédentes.

Pour ce faire, il suffit de multiplier la relation (2) par $\frac{1}{R}$, la

relation (3) par C et les ajouter membre à membre.

Les termes en u_C ainsi formés expriment alors le courant i d'après la relation (1).

On obtient :

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{R} \left(L \frac{di}{dt} + Ri + u_C \right) + C \left(L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{du_C}{dt} \right),$$

soit encore :

$$LC \frac{d^2i}{dt^2} + \left(RC + \frac{L}{R} \right) \frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R}.$$

On a :

$$\tau = RC = \frac{L}{R}, \text{ soit } LC = \tau^2.$$

L'équation à résoudre est donc :

$$\tau^2 \frac{d^2i}{dt^2} + 2\tau \frac{di}{dt} + 2i = \frac{E}{R} \quad (4)$$

On remarque que $\omega_0^2 = \frac{2}{\tau^2}$ et $\frac{2}{\tau} = \frac{\omega_0}{Q}$, soit $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$;

on doit donc obtenir un régime oscillant amorti.

On résout d'abord l'équation homogène associée :

$$\tau^2 \frac{d^2i}{dt^2} + 2\tau \frac{di}{dt} + 2i = 0.$$

On cherche des solutions en e^{st} , où s vérifie l'équation caractéristique suivante :

$$\tau^2 s^2 + 2\tau s + 2 = 0.$$

$$\Delta' = \tau^2 - 2\tau^2 = -\tau^2.$$

$$s = \frac{-\tau \pm j\tau}{\tau^2} = \frac{1}{\tau} (-1 \pm j), \text{ avec } j^2 = -1.$$

La solution générale de l'équation homogène est donc :

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau} \right).$$

Une solution particulière de l'équation complète (4) est

donnée par une constante, puisque le second membre $\frac{E}{R}$ est constant. Elle doit vérifier :

$$2i = \frac{E}{R}, \text{ soit } i = \frac{E}{2R}.$$

La solution générale de l'équation complète (4) est donc :

$$i(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \left(A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau} \right) + \frac{E}{2R}.$$

Pour déterminer A et B , on se sert des conditions initiales. La tension u_C aux bornes du condensateur est continue et le courant i dans la bobine l'est aussi.

On a donc :

$$\text{à } t = 0^+, i = 0 \text{ et } u_C = 0.$$

En remplaçant dans (2), il vient :

$$E = L \frac{di}{dt}(0^+) \Rightarrow \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L}.$$

Par dérivation de $i(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} = e^{-\frac{t}{\tau}} & \left[-\frac{1}{\tau} \left(A \cos \frac{t}{\tau} + B \sin \frac{t}{\tau} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\tau} \left(-A \sin \frac{t}{\tau} + B \cos \frac{t}{\tau} \right) \right]. \end{aligned}$$

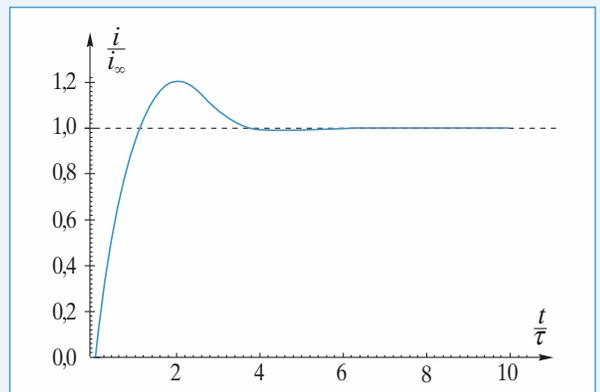
À $t = 0^+$, on a donc :

$$\begin{cases} i(0^+) = 0 = A + \frac{E}{2R} \\ \frac{di}{dt}(0^+) = \frac{E}{L} = -\frac{A}{\tau} + \frac{1}{\tau} B. \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} A = -\frac{E}{2R} \\ B = A + \tau \frac{E}{L} = -\frac{E}{2R} + \frac{E}{R} = \frac{E}{2R}. \end{cases}$$

$$\text{Donc : } i(t) = \frac{E}{2R} e^{-\frac{t}{\tau}} \left(-\cos \frac{t}{\tau} + \sin \frac{t}{\tau} \right) + \frac{E}{2R}$$

$$\text{et : } i(\infty) = i_\infty = \frac{E}{2R}.$$



7 Réponse d'un circuit (R, C) série à une excitation périodique en créneaux

1 • L'équation différentielle du circuit s'obtient en écrivant que le même courant traverse la résistance et le condensateur :

$$\frac{e(t) - u}{R} = C \frac{du}{dt},$$

d'où, en posant $\tau = RC$:

$$\tau \frac{du}{dt} + u = e(t).$$

On note u_{\min} et u_{\max} les valeurs extrêmes de $u(t)$ en régime établi.

Pour $0 < t < \frac{T}{2}$, le condensateur se charge sous $+E$ donc

$$u\left(\frac{T}{2}\right) = u_{\max}; \text{ de même pour } \frac{T}{2} < t < T \text{ il se charge sous } -E$$

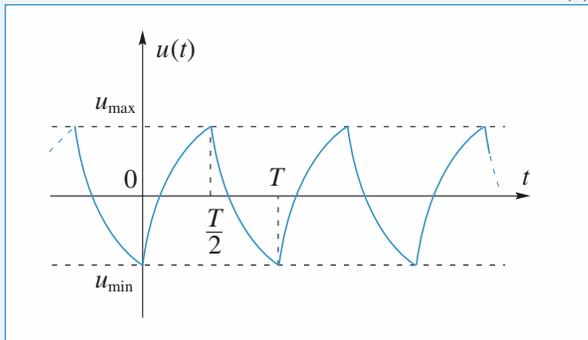
donc $u(0) = u(T) = u_{\min}$.

Pour $0 < t < \frac{T}{2} [\text{mod } T]$, $e(t) = E$, et la solution de l'équation différentielle est :

$$u(t) = (u_{\min} - E) e^{-\frac{t}{\tau}} + E. \quad (1)$$

Pour $\frac{T}{2} < t < T [\text{mod } T]$, $e(t) = -E$ et la solution de l'équation différentielle est :

$$u(t) = (u_{\max} + E) e^{-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}} - E. \quad (2)$$



On écrit en utilisant (1), qu'en régime établi, les valeurs extrêmes de $u(t)$ sont, par raison de symétrie, opposées :

$$u_{\max} = -u_{\min} :$$

$$u\left(\frac{T}{2}\right) = (u_{\min} - E) e^{-\frac{T}{2\tau}} + E = u_{\max} = -u_{\min},$$

d'où l'expression de u_{\min} :

$$u_{\min} = -\frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} E$$

et celle de u_{\max} :

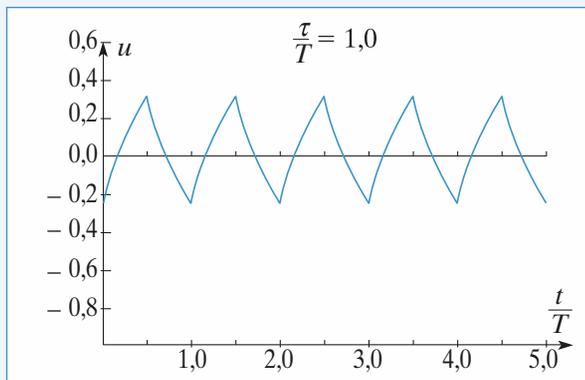
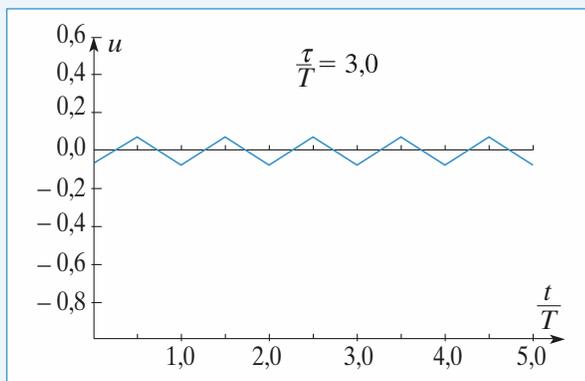
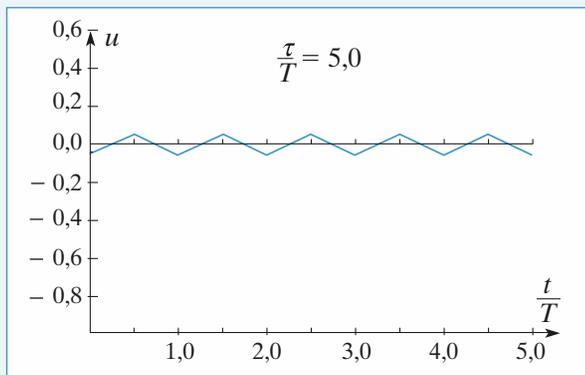
$$u_{\max} = \frac{1 - e^{-\frac{T}{2\tau}}}{1 + e^{-\frac{T}{2\tau}}} E.$$

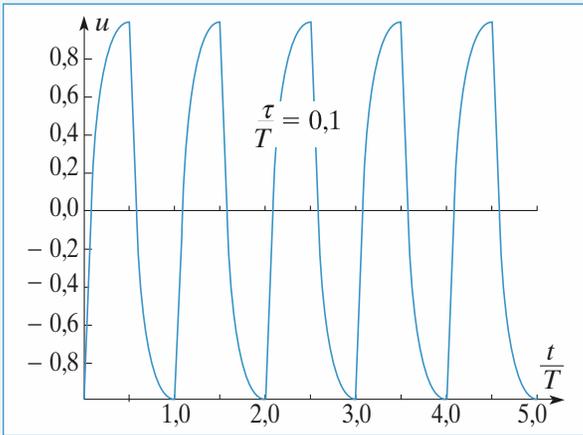
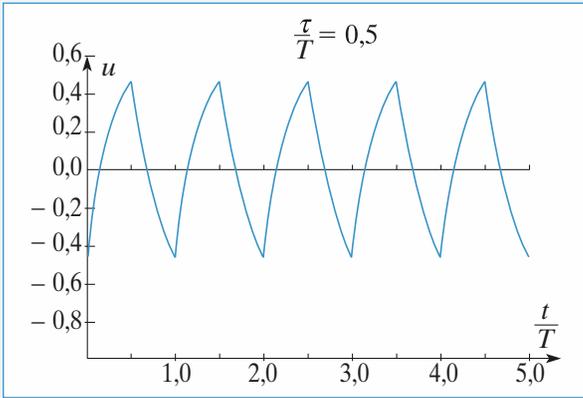
On arrive aux mêmes expression en utilisant (2).

Le graphe de $u(t)$ en régime permanent est donné ci-après

pour différentes valeurs du rapport $\frac{\tau}{T}$:

$$\frac{\tau}{T} = 5; 3; 1; 0,5 \text{ et } 0,1.$$





2 • • Pour $0 < t < \frac{T}{2}$ [mod T], l'équation différentielle

s'écrit :
$$\tau \frac{du}{dt} = E - u,$$

ce qui signifie que, dans le plan de phase $(u, \tau \frac{du}{dt})$, le point de phase M du condensateur décrit un segment de droite entre les points :

$$M(0_+) = (u_{\min}, E - u_{\min})$$

et
$$M\left(\frac{T}{2}-\right) = (u_{\max}, E - u_{\max}).$$

• Entre $\frac{T}{2}-$ et $\frac{T}{2}+$, la f.e.m. du générateur varie brutalement de $-2E$. La tension u aux bornes du condensateur ne subit aucune discontinuité :

$$u\left(\frac{T}{2}-\right) = u\left(\frac{T}{2}+\right) = u_{\max}, \text{ mais}$$

le courant $i = C \frac{du}{dt}$ en subit une.

• Pour $\frac{T}{2} < t < T$ [mod T], on a $\tau \frac{du}{dt} = -E - u$,

donc le point de phase M du condensateur décrit un segment de droite entre les points de phase :

$$M\left(\frac{T}{2}+\right) = (u_{\max}, -E - u_{\max}) \text{ et } M(T_-) = (u_{\min}, -E - u_{\min}).$$

• Entre T_- et T_+ , la f.e.m. du générateur varie brutalement de $2E$. La tension aux bornes du condensateur ne subit pas de discontinuité :

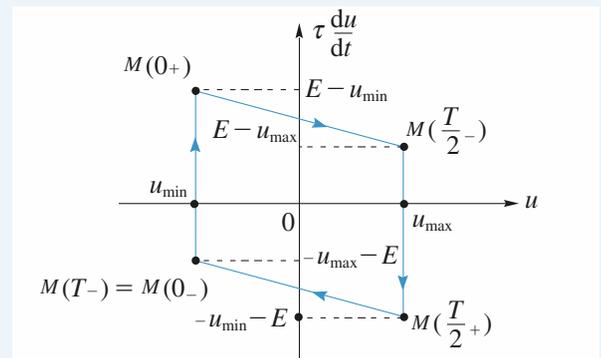
$$u(T_-) = u(T_+) = u_{\min},$$

mais le courant $i = C \frac{du}{dt}$ en subit une, amenant le point de

phase du condensateur de $M(T_-) = M(0_-)$ en :

$$M(T_+) = M(0_+).$$

La trajectoire de phase du condensateur, en régime permanent, est représenté ci-après. Cette trajectoire est le cycle limite vers lequel tend, quelles que soient les conditions initiales, le point de phase du condensateur.



8 Circuits alimentés en parallèle

1 • • à $t = 0^+$ par continuité de i dans la bobine $i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$; par continuité de q aux bornes du condensateur $u_C(0^+) = u_C(0^-)$; or $u_C(0^-) = 0$ par hypothèse, d'où

$$u_{AB}(0^+) + Ri_2(0^+) + u_{AB}(0^+) = E, \text{ soit } i_2(0^+) = \frac{E}{R};$$

enfin $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+) = \frac{E}{R}.$

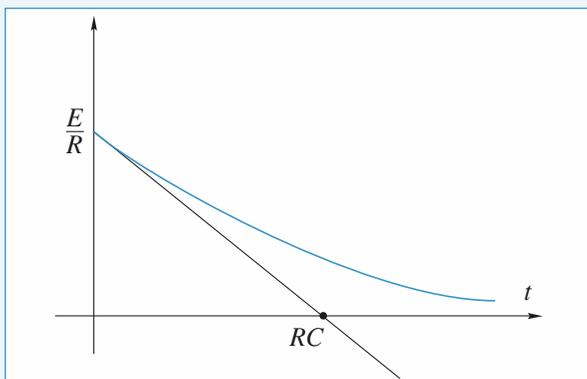
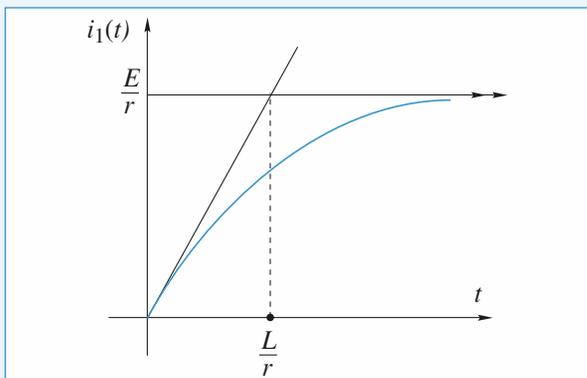
• Quand le régime permanent est établi, $i_2(t) = \text{constante}$ donc $u_L = 0$, la bobine « est un fil », d'où $i_2(\infty) = \frac{E}{r}$;

d'autre part le condensateur est chargé donc $i_1(\infty) = \frac{dq}{dt}(\infty) = 0.$

D'où, $i(\infty) = \frac{E}{r}.$

2 • Il s'agit de deux mailles (R, C, E) et (r, L, E) indépendantes ; avec les conditions initiales ci-dessus, on obtient

$$\text{immédiatement } i_1(t) = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{r}{L}t}\right) \text{ et } i_2(t) = \frac{E}{r} e^{-\frac{t}{RC}}.$$



$$3 \bullet i = i_1 + i_2 = \frac{E}{r} \left(1 - e^{-\frac{rt}{L}}\right) + \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$$

$$\text{si } r = R \text{ et } \frac{L}{C} = R^2,$$

$$i = \frac{E}{R} + \frac{E}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{t}{RC}}\right) = \frac{E}{R}.$$

$$4 \bullet \text{ Il ne reste qu'une maille : } \frac{q}{C} + (R + C)i_2 + L \frac{di_2}{dt} = 0,$$

$$\text{soit avec } i_2 = \frac{dq}{dt},$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + (R+r) \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \text{ ou encore avec les hypothèses}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{2}{RC} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0.$$

$$5 \bullet i_2 \text{ est continue grâce à la bobine ; or } i_2(0^+) = -i_1(\infty) = -\frac{E}{r}.$$

q est continue et $q(0^+) = q(\infty) = CE$, les deux valeurs à l'infini correspondent à l'établissement du régime permanent des questions 1. à 3.

6 • L'équation vérifiée par i_2 est la même que celle vérifiée par q .

$$\text{L'équation caractéristique en est } r^2 + \frac{2}{RC}r + \frac{1}{LC} = 0$$

$$\text{dont le discriminant est nul car } \frac{L}{C} = R^2.$$

$$\text{D'où } i_2(t) = (A + Bt) C^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\text{Or } i_2(0^+) = -\frac{E}{R} = A \text{ et } \frac{di_2}{dt}(0) = -\frac{A}{RC} + B \text{ avec}$$

$$\frac{q}{C} + 2Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} = 0 \text{ que nous appliquons en } 0 :$$

$$\frac{CE}{C} + 2R \left(-\frac{E}{R}\right) + L \left(\frac{di_2}{dt}\right)(0) = 0,$$

$$\text{soit } \left(\frac{di_2}{dt}\right)(0) = \frac{E}{L}. \text{ Il vient alors}$$

$$-\frac{A}{RC} + B = \frac{E}{L} \Rightarrow +\frac{E}{RC} \cdot \frac{1}{R} + B = \frac{E}{L} \text{ or } \frac{1}{R^2C} = \frac{1}{L}$$

$$\text{donc } B = 0 \text{ et } i_2(t) = -\frac{E}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

7 • Première méthode

L'énergie dissipée l'est dans les deux résistances $R = r$

$$w_J = \int_0^\infty 2Ri_2^2(t) dt = \int_0^\infty \frac{2E^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} dt = CE^2$$

• Deuxième méthode

L'énergie dissipée provient de l'énergie stockée initialement dans la bobine et le condensateur :

$$w_J = -(w_C + w_L)$$

$$w_J = \left(\frac{1}{2}L i_2^2(0) + \frac{1}{2} \frac{q^2(0)}{C}\right)$$

$$w_J = \frac{1}{2}L \frac{E^2}{R^2} + \frac{1}{2} \frac{C^2 E^2}{C}, \text{ soit avec } \frac{L}{R^2} = C,$$

$$w_J = CE^2 \text{ et l'on retrouve le même résultat.}$$

9 Caractéristiques électriques d'une membrane

A • Questions préliminaires

1 • L'AO étant idéal et fonctionnant en régime linéaire $i_- = 0$ et $V_+ = V_-$, soit $V_0 - V_{\text{réf}} = -RI$. (1)

2 • 1. •

$$V_+ = \frac{R'_2}{R'_2 + R'_1} V_{e_2} \text{ et } \frac{V_{e_1} - V_-}{R_1} = \frac{V_- - V_S}{R_2} \text{ grâce à } i_+ = 0$$

et $i_- = 0$.

• D'autre part $V_- = V_+$ d'où

$$\frac{V_S}{R_2} = \frac{R'_2}{R'_1 + R'_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) V_{e_2} - \frac{V_{e_1}}{R_1},$$

$$\text{soit } V_S = -\frac{R_2}{R_1} V_{e_1} + \frac{R'_2}{R'_1 + R'_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) V_{e_2}$$

Si les résistances sont identiques $V_S = V_{e_2} - V_{e_1}$ (2)

2 • 2. $-\frac{V_1}{R} = \frac{V_1 - V}{R_{\text{var}}}$, toujours en utilisant les propriétés de

$$\text{l'A.O., soit } V = R_{\text{var}} V_1 \left(\frac{1}{R_{\text{var}}} + \frac{1}{R} \right)$$

$$\text{ou } V = V_1 \left(1 + \frac{R_{\text{var}}}{R} \right) \quad (3)$$

3 • 1. • La tension aux bornes de C est continue donc $V(0^+) = u(0^-)$ et comme $q(0^-) = 0$, $u(0^-) = 0$. Donc

$$i(0^+) = -\frac{V_{\text{réf}}}{R_1}.$$

• L'équation d'évolution de $i(t)$ est issue de :

$$v_e = -R_1 i + u, \quad i = -\frac{u}{R_2} - C \frac{du}{dt}.$$

En régime permanent ($\Delta t \ll \text{grand}$) le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $C \frac{du}{dt}(\Delta t^-) = 0$ et

$$\text{comme } v_e = V_{\text{réf}}, \quad i(\Delta t^-) = -\frac{V_{\text{réf}}}{R_1 + R_2}.$$

3 • 2. En éliminant i des équations du **3.1.**, il vient :

$$-\frac{u}{R_2} - C \frac{du}{dt} = \frac{u - V_{\text{réf}}}{R_1}$$

$$\text{soit } \frac{du}{dt} + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) u = \frac{V_{\text{réf}}}{R_1 C}.$$

on a donc $\frac{1}{\tau'} = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. On notera $\tau_1 = R_1 C$.

3 • 3. L'intégration donne $u = V_{\text{réf}} \frac{\tau'}{L_1} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau'}}$ or à $t = 0^-$,

$u(0^-) = 0$ et u est continue donc $u(0^+) = 0$ et

$$u(t) = V_{\text{réf}} \frac{\tau'}{\tau_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}} \right) \text{ pour } t \in [0, \Delta t].$$

Si $\tau' \ll \Delta t$, $e^{-\frac{\Delta t}{\tau'}} \ll 1$ et $u(\Delta t) = V_{\text{réf}} \frac{\tau'}{\tau_1} = V_{\text{réf}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}$

Remarque : On trouve le résultat directement avec $i_C(\Delta t) = 0$ et un diviseur de tension.

3 • 4. On a $i = \frac{u - V_{\text{réf}}}{R_1}$, soit $i = -\frac{V_{\text{réf}}}{R_1 + R_2} \left(1 + \frac{R_2}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau'}} \right)$;

on retrouve bien les valeurs $i(0^+)$ et $i(\Delta t^-)$ du **3.1.**

3 • 5. Pour $t > \Delta t$, $v_e = 0$ et $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau'} = 0$,

d'où $u = \mu e^{-\frac{t}{\tau'}}$ et $u(\Delta t^+) = u(\Delta t^-)$ car u_C est continue, d'où

$$u = V_{\text{réf}} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \exp\left(-\frac{t - \Delta t}{\tau'}\right) \text{ en considérant toujours}$$

$$\tau' \ll \Delta t \text{ donc } u(\Delta t) = V_{\text{réf}} \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

On en déduit $i = \frac{u}{R_1} = \frac{V_{\text{réf}}}{R_1} \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \left(\exp-\frac{t - \Delta t}{\tau'} \right)$. L'allure

de $i(t)$ sur $]-\infty, +\infty[$ est celle donnée en figure 5 de l'énoncé.

B • 1 • 1. $V_0 = V_{\text{réf}} - R_f i(t)$

1 • 2. $V_1 = V_{\text{réf}} - V_0 = R_f i(t)$

1 • 3. $V = \left(1 + \frac{R_{\text{var}}}{R} \right) V_1 = R_f \left(1 + \frac{R_{\text{var}}}{R} \right) i(t)$

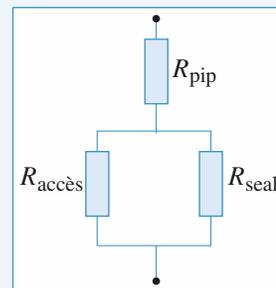
2 • 1. Pour une résistance cylindrique de longueur L , de section Σ et de conductivité σ , $R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{\Sigma}$.

$$\text{Ici, } R_{\text{accès}} = \frac{h}{\sigma \left(\pi \frac{d^2}{4} \right)} = 2,5 \text{ M}\Omega$$

2 • 2. Pour R_{seal} , comme $e \ll d$, $\Sigma \approx \pi de$ et

$$R_{\text{seal}} \approx \frac{h}{\sigma \pi de} = 2,1 \text{ G}\Omega.$$

2 • 3. On peut proposer la modélisation suivante :



Comme $R_{\text{seal}} \gg R_{\text{accès}}$,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_{\text{seal}}} + \frac{1}{R_{\text{accès}}} \approx \frac{1}{R_{\text{accès}}}$$

Donc $R_{\text{totale}} \approx R_{\text{accès}} + R_{\text{pip}} = 12,5 \text{ M}\Omega$.

3 • 1. Remarque : Comme $R_{\text{var}} = 0$, le bloc (4) est un suiveur tel que $V = V_1 = R_f i(t)$.

On peut lire sur le graphe :

$$\Delta t = 0,5 \text{ s} ; V(0^+) = -0,24 \text{ V} ;$$

$$V(\Delta t^-) = -0,04 \text{ V} ; V(\Delta t^+) = +0,2 \text{ V. La tangente à l'origine}$$

coupe l'axe des t pour $\frac{3}{5} \cdot 0,2 \text{ s}$ environ, soit $\tau' = 0,12 \text{ s}$.

$$\bullet i(0^+) = -\frac{V_{\text{réf}}}{R_1} \text{ (cf. A.3.1.) et } i(0^+) = V(0^+)/R_f. \text{ On en tire}$$

$$R_1 = -R_f \frac{V_{\text{réf}}}{V(0^+)} = 2,1 \text{ M}\Omega.$$

$$\bullet V(\Delta t^-) = R_f i(\Delta t^-) = R_f \cdot \frac{-V_{\text{réf}}}{R_1 + R_2} \text{ (A.3.1.)}$$

$$\text{soit } R_1 + R_2 = R_f \frac{-V_{\text{réf}}}{V(\Delta t^-)} = 12,5 \text{ M}\Omega, \text{ soit } R_2 = 10,4 \text{ M}\Omega.$$

$$\bullet V(\Delta t^+) = R_f i(\Delta t^+) = R_f \frac{V_{\text{réf}} R_2}{(R_1 + R_2) R_1} \text{ (A.3.5.)}$$

L'AN donne, avec R_1 et R_2 trouvés précédemment, $V(\Delta t^+) = 0,2 \text{ V}$ ce que confirme la lecture.

$$\bullet \text{ Enfin, } \tau' = \frac{1}{C} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \text{ d'où } C = 70 \text{ nF.}$$

Remarque : La lecture de τ' est approximative et donne C à une dizaine de % près.

10 Réponse d'un circuit (L, C) à une impulsion

1 • On peut écrire à chaque instant :

$$u_e(t) = u_s(t) + L \frac{di}{dt} \text{ et } i = C \frac{du_s}{dt}.$$

On en déduit que $u_s(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Pour $t > 0$, cette équation s'écrit :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 E.$$

La tension aux bornes d'une capacité et le courant dans une inductance étant des fonctions continues du temps, les conditions initiales sont :

$$u_s(0^+) = u_s(0^-) = 0 \text{ et } i(0^+) = C \left(\frac{du_s}{dt} \right)_{t=0^+} = i(0^-) = 0.$$

La solution qui vérifie les conditions initiales est :

$$u_s = E[1 - \cos(\omega_0 t)] \text{ pour } t > 0.$$

2 • $u_e(t)$ peut se mettre sous la forme de la somme de deux échelons : $u_e(t) = u_{e_1}(t) + u_{e_2}(t)$, où $u_{e_1}(t)$ est la fonction du 1 et $u_{e_2}(t) = u_{e_1}(t - T)$.

L'équation différentielle étant linéaire, la solution est la superposition des solutions associées séparément à $u_{e_1}(t)$ et $u_{e_2}(t)$.

$u_s(t) = u_{s_1}(t) + u_{s_2}(t)$ avec :

$$\bullet u_{s_1}(t) = 0 \text{ pour } t < 0 ;$$

$$u_{s_1}(t) = E[1 - \cos(\omega_0 t)] \text{ pour } t > 0 ;$$

$$\bullet u_{s_2}(t) = 0 \text{ pour } t < T ;$$

$$u_{s_2}(t) = -E[1 - \cos(\omega_0 t - \omega_0 T)] \text{ pour } t > T.$$

D'où :

$$u_s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 ;$$

$$u_s(t) = E[1 - \cos(\omega_0 t)] \text{ pour } 0 < t < T ;$$

$$u_s(t) = E[-\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_0 t + \omega_0 T)]$$

$$= 2E \sin \frac{\omega_0 T}{2} \sin \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0 T}{2} \right) \text{ pour } t > T.$$

L'amplitude des oscillations est égale à $\left| 2E \sin \frac{\omega_0 T}{2} \right|$; elle

est maximale si $\frac{\omega_0 T}{2} = (2p + 1) \frac{\pi}{2}$;

$$\text{soit : } \omega_0 T = (2p + 1)\pi.$$

3 • Si $T \rightarrow 0$ on détermine u_s par un D.L. à l'ordre 1 en $\omega_0 T$.

$$\bullet u_s(t) = 0 \text{ pour } t < 0 ;$$

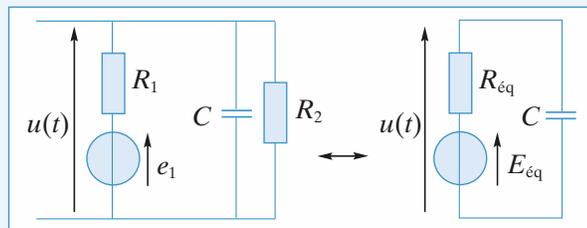
$$\bullet u_s(t) = 0 \text{ pour } 0 < t < T ;$$

$$\bullet u_s(t) = ET \omega_0 \sin \omega_0 t \text{ pour } t > T.$$

11 Modélisation d'un neurone

• On commence par calculer les constantes de temps relatives aux différents états.

Lors de l'excitation, le circuit équivalent est :



On obtient le générateur de Thévenin équivalent en transformant le générateur (e_1, R_1) en générateur de Norton (soit

$$\eta_1 = \frac{e_1}{R_1}, R_1), \text{ puis en regroupant les deux résistances } R_1 \text{ et}$$

$$R_2 \text{ en } R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ et enfin en transformant le générateur}$$

de Norton $(\eta_1, R_{\text{éq}})$ en générateur de Thévenin.

On obtient donc :

$$R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \text{ et } E_{\text{éq}} = e_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

La constante de temps du circuit est $\tau_c = R_{\text{éq}} C$.

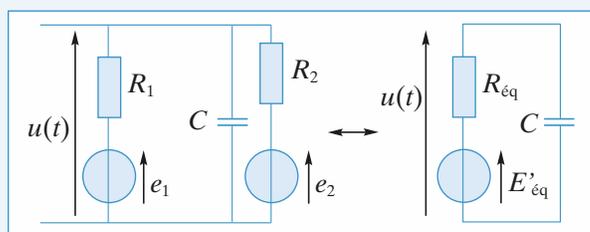
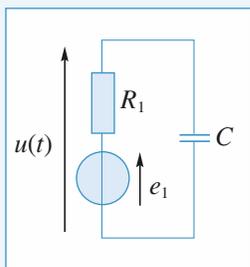
Pendant la désexcitation, le circuit est celui-ci.

Sa constante de temps est $\tau'_c = R_1 C$.

$$\text{Donc } \frac{\tau'_c}{\tau_c} = 1 + \frac{R_1}{R_2} = 5,$$

d'où $R_1 = 4R_2$ et $E_{\text{éq}} = 14 \text{ mV}$.

• Lors de l'inhibition, le circuit électrique équivalent est :



Le générateur de Thévenin équivalent s'obtient comme ci-dessus. On transforme les deux générateurs (e_1, R_1) et (e_2, R_2) en générateur de Norton $(\eta_1 = \frac{e_1}{R_1}, R_1)$, et $(\eta_2 = \frac{e_2}{R_2}, R_2)$,

on regroupe les deux résistances R_1 et R_2 en $R_{\text{éq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

et les deux générateurs de courant en un seul $(\eta = \eta_1 + \eta_2)$ et enfin on transforme le générateur de Norton $(\eta, R_{\text{éq}})$ en générateur de Thévenin.

On obtient donc :

$$E'_{\text{éq}} = \frac{\frac{e_1}{R_1} + \frac{e_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{e_1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)e_2}{1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)} = 78 \text{ mV}.$$

Lors de l'inhibition, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$

$$\text{est : } R_{\text{éq}} C \frac{du}{dt} + u = E'_{\text{éq}}$$

dont la solution est de la forme :

$$u(t) = E'_{\text{éq}} + A \exp\left(\frac{-t}{\tau_c}\right). \quad (1)$$

• Lors du retour à l'état de repos, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ est :

$$R_1 C \frac{du}{dt} + u = e_1.$$

Elle admet, pour $t > 5 \text{ ms}$, une solution de la forme :

$$u(t) = e_1 + B \exp\left(\frac{-t}{\tau_c}\right).$$

• Pour déterminer la réponse du neurone, il suffit de déterminer les valeurs de A et B dans les deux cas proposés en utilisant la continuité de la tension aux bornes du condensateur.

a) À $t = 0$, le condensateur est chargé avec la tension $u(0) = e_1 = 70 \text{ mV}$, d'où $A = -8 \text{ mV}$ d'après (1).
Pendant l'inhibition :

$$u(t) = 78 - 8 \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \text{ (} u \text{ en mV et } t \text{ en ms)}.$$

À $t = 5 \text{ ms}$, il vient $u(5) = 77,3 \text{ mV}$.

La désexcitation débute alors et, d'après (2) :

$$77,3 = 70 + B \exp\left(-\frac{5}{2}\right),$$

d'où $B = 88,9 \text{ mV}$.

b) À $t = 0$, le condensateur est chargé sous la tension $u(0) = E_{\text{éq}} = 14 \text{ mV}$, d'où $A = -64 \text{ mV}$.

Pendant l'inhibition :

$$u(t) = 78 - 64 \exp\left(-\frac{t}{2}\right) \text{ (} u \text{ en mV et } t \text{ en ms)}.$$

À $t = 5 \text{ ms}$, on a $u(5) = 72,7 \text{ mV}$.

Au début du retour à l'état de repos, on a :

$$72,7 = 70 + B \exp\left(-\frac{5}{2}\right), \text{ d'après (2),}$$

d'où $B = 32,9 \text{ mV}$.

12 Signal carré et oscilloscope en mode « AC »

L'impédance d'entrée d'un oscilloscope est modélisable par l'association parallèle d'une résistance de l'ordre de $1 \text{ M}\Omega$, et une capacité de quelques dizaines de pF. Ces grandeurs sont directement affichées sur les bornes d'entrée de l'appareil. L'impédance de sortie d'un générateur de fonction est de l'ordre de 50Ω .

1 • Première mesure

Les deux entrées de l'oscilloscope sont attaquées par un échelon de tension d'amplitude 7 V . La réponse de l'entrée Y_1 est « instantanée », alors que celle de l'entrée Y_2 ne l'est pas. Le signal mesuré revient exponentiellement à sa valeur initiale après avoir eu une discontinuité de 7 V .

Ce résultat est compatible avec le document 1 donné des entrées.

• Pour Y_1 , l'influence de la résistance R est nulle car l'impédance de sortie du G.B.F. est négligeable.

• Pour Y_2 , un signal créneau attaque un circuit RC :

L'équation différentielle vérifiée par la variation de charge

$$\Delta q \text{ du condensateur est } R \frac{d\Delta q}{dt} + \frac{\Delta q}{C} = \Delta v_1 \text{ car l'intensité}$$

dans R est égale à $\frac{dq}{dt}$.

La charge du condensateur est continue à $t = 0$ donc :

$$\Delta q = CE_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right)$$

où E_0 représente l'amplitude de l'échelon.

La variation de la tension aux bornes de R est donnée par :

$$\Delta v_2 = RC \frac{dq}{dt} = E_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Remarque : Pour ce type de montage, avec un peu d'habitude, il est inutile d'écrire l'équation différentielle puis de l'intégrer avec les conditions initiales données. Il suffit de savoir que l'évolution se fait selon une exponentielle décroissante de temps caractéristique RC et d'ajuster ensuite aux conditions aux limites $\Delta v_2(0) = E_0$ (continuité de la tension aux bornes de C) et $\Delta v_2(\infty) = 0$ (quand t tend vers l'infini, le courant dans le circuit RC tend vers 0) ce qui donne directement le résultat.

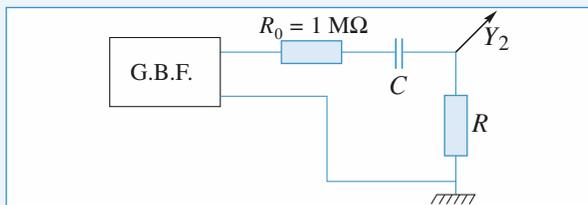
La valeur de la constante de temps peut être mesurée à partir du temps de demi-décroissance $t_{1/2} = RC \ln 2$.

Ici $t_{1/2} \approx 0,05$ s soit $RC \approx 70$ ms.

Deuxième mesure

L'entrée Y_1 n'est pas modifiée par rapport à la première mesure.

Pour l'entrée Y_2 , on a le schéma équivalent :



En utilisant la remarque faite dans la première mesure :

- la constante de temps du circuit est $(R + R_0)C$;
- la valeur initiale de Δv_2 aux bornes de R est obtenue en utilisant la formule du pont diviseur de tension car la tension aux bornes de C est continue :

$$\Delta v_2(0) = \frac{R}{R + R_0} E_0 ;$$

- la valeur initiale de Δv_2 est nulle.

$$\text{D'où : } \Delta v_2 = \frac{R}{R + R_0} E_0 \exp\left(-\frac{t}{(R + R_0)C}\right).$$

Le signal Y_2 présente un pic de tension d'amplitude légèrement inférieure à 4 V avec une décroissance exponentielle de temps de demi-décroissance $t_{1/2} \approx 0,1$ s.

L'amplitude permet de calculer R , soit comme :

$$E_0 \approx 7 \text{ V}, \frac{R}{R + R_0} \approx \frac{4}{7} \text{ d'où } R \approx 1,3 \text{ M}\Omega.$$

Le nouveau temps de décroissance permet d'obtenir :

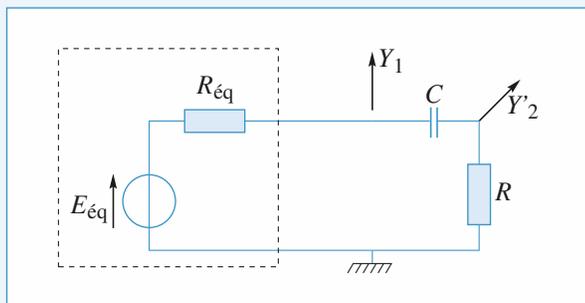
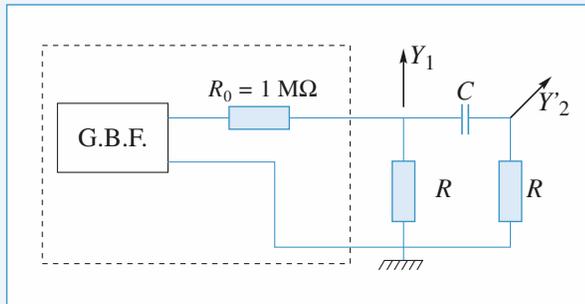
$$(R + R_0)C \approx 140 \text{ ms.}$$

Combiné avec la valeur RC obtenue à la première mesure, ceci donne :

$$R \approx R_0 = 1 \text{ M}\Omega \text{ et } C = 0,14 \text{ }\mu\text{F.}$$

Vu la précision des mesures, les deux valeurs de R sont bien compatibles.

- 2 • Le schéma équivalent est un peu plus compliqué ici :



Pour simplifier l'étude du montage, on prend le générateur de Thévenin équivalent à la partie encadrée. Sa résistance

interne est $\frac{RR_0}{R + R_0}$ soit $R_{\text{éq}} = \frac{R}{2} = 500 \text{ k}\Omega$.

L'échelon de tension qu'il délivre est :

$$\Delta E_{\text{éq}} = \frac{R}{R_0 + R} E_0 = \frac{E_0}{2} \approx 3,5 \text{ V.}$$

La remarque faite à la question 1) permet :

- de déterminer Δv_2 :
 - la constante de temps du circuit est : $(R + R_{\text{éq}})C = \frac{3}{2} RC$;
 - la valeur initiale de Δv_2 est : $\frac{R}{R + R_{\text{éq}}} \Delta E_{\text{éq}}$ soit $\frac{E_0}{3}$, sa valeur finale nulle.

$$\text{D'où : } \Delta v_2 = \frac{E_0}{3} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) ;$$

- de déterminer Δv_1 :

La constante de temps est identique, la valeur initiale de Δv_1

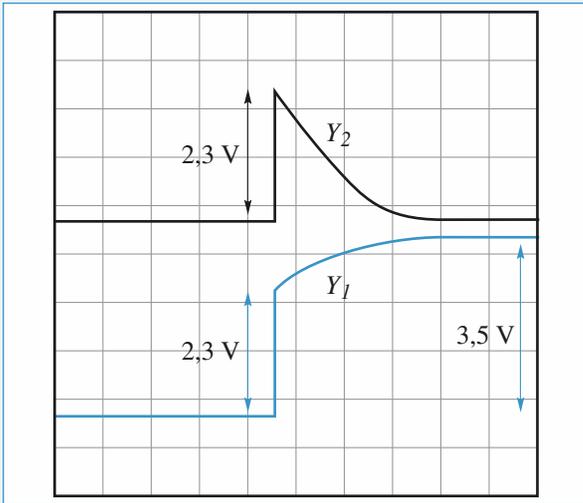
est identique, sa valeur finale est $\Delta E_{\text{éq}} = \frac{E_0}{2}$. D'où :

$$\Delta v_1 = \frac{E_0}{2} + A \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right).$$

$$\text{À } t = 0, \Delta v_1 = \frac{E_0}{3} = \frac{E_0}{2} + A, \text{ d'où :}$$

$$\Delta v_1 = \frac{E_0}{2} - \frac{E_0}{6} \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right).$$

Ceci donne les *courbes* suivantes :



LES OBJECTIFS

- Méthodes d'étude des circuits linéaires en régime sinusoïdal forcé : représentation complexe, représentation de Fresnel.
- Puissance en régime sinusoïdal forcé.
- Étude des résonances du circuit (R, L, C).

LES PRÉREQUIS

- Lois de Kirchhoff en régime continu.
- Méthodes d'étude des circuits comportant des dipôles linéaires en régime continu.
- Relations tension-courant des dipôles linéaires passifs.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Utilisation du plan complexe.
- Résolution des systèmes d'équations algébriques dans \mathbb{C} .

ESSENTIEL

Signal sinusoïdal

• Représentation complexe

À un signal sinusoïdal $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$ d'amplitude réelle s_m (positive) et de phase φ est associée la représentation complexe : $\underline{s}(t) = \underline{s}_m e^{j\omega t}$, d'amplitude complexe : $\underline{s}_m = s_m e^{j\varphi}$.

La représentation de Fresnel de $s(t) = s_m \cos(\omega t + \varphi)$ est la représentation géométrique de son amplitude complexe \underline{s}_m dans le plan complexe.

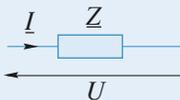
• Utilisation de la notation complexe

La notation complexe d'un signal peut être utilisée lorsqu'on effectue des opérations linéaires sur celui-ci : additions, soustractions, multiplication par un réel, dérivation, intégration (avec une constante non nulle).

Les opérations de dérivation et d'intégration de la représentation complexe d'un signal sont très simples puisqu'il suffit de multiplier ou diviser, respectivement, le signal complexe par le facteur $j\omega$.

• Impédances complexes et lois d'association

L'impédance complexe d'un dipôle passif est définie en convention récepteur par :

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$


$$\underline{Z}_R = R ; \underline{Z}_L = jL\omega ; \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Les lois d'association d'impédances en RSF sont :

- en parallèle : $\frac{1}{Z} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}$
- en série : $Z = \sum_{i=1}^n Z_i$

► Pour s'entraîner : ex. 1 et 2

◀ Circuit linéaire en régime sinusoïdal

• Régime transitoire, régime forcé

La solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$\sum_n a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = f(t)$$

peut s'écrire comme la superposition d'une solution particulière $s_1(t)$ de cette équation avec second membre $f(t)$ et d'une solution $s_0(t)$ de l'équation sans second membre :

$$s(t) = s_0(t) + s_1(t).$$

Pour un réseau linéaire stable, soumis à une excitation sinusoïdale, un régime permanent sinusoïdal s'établit après un régime transitoire qui tend vers zéro. En régime sinusoïdal forcé, tous les courants et tensions du circuit, *de même pulsation*, seront caractérisés par leurs amplitude et phase.

• Étude du régime sinusoïdal forcé

Dans le cas d'un réseau linéaire en régime harmonique permanent (ou régime sinusoïdal forcé), on peut transposer les lois et modèles développés en régime constant, et utiliser :

- *les lois de Kirchhoff* :
 - la loi des nœuds pour les intensités complexes ;
 - la loi des mailles pour les tensions complexes ;
- *la décomposition du réseau en dipôles élémentaires* :
 - dipôles passifs caractérisés par leur impédance complexe ($\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$ en convention récepteur) ;
 - générateurs de tension sinusoïdale de f.e.m. complexe $\underline{e} = \underline{e}_m e^{j\omega t}$, de courant sinusoïdal de c.e.m. : $\underline{\eta} = \underline{\eta}_m e^{j\omega t}$, d'impédance interne \underline{Z}_i s'ils ne sont pas idéaux ;
- *le théorème de superposition* : la valeur complexe $\underline{s}(t)$ d'une grandeur quelconque (courant ou tension) est égale à la somme des valeurs complexes de cette même grandeur obtenues lorsque toutes les sources sinusoïdales sont éteintes à l'exception d'une seule.

► Pour s'entraîner : ex. 4, 5 et 7

◀ Le circuit (R, L, C) en régime sinusoïdal

Lorsqu'un circuit (R, L, C) est soumis à une excitation sinusoïdale de pulsation ω , un régime permanent sinusoïdal de même pulsation que l'excitation imposée s'établit après un régime transitoire qui dépend du facteur de qualité Q du circuit.

L'utilisation de la notation complexe permet d'obtenir l'amplitude complexe de la réponse en régime permanent sinusoïdal du circuit (R, L, C). Le module et la phase de cette amplitude complexe permettent d'obtenir l'expression du régime sinusoïdal forcé, en notation réelle.

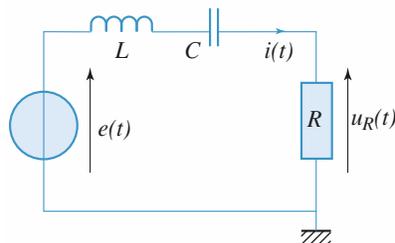
Soit un circuit (R, L, C) excité par une f.e.m. sinusoïdale d'amplitude e_m constante et de pulsation ω : $e(t) = e_m \cos(\omega t)$.

• On associe à l'intensité $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ dans le circuit, l'amplitude complexe : $\dot{i}_m = i_m e^{j\varphi}$, d'expression :

$$\dot{i}_m = \frac{i_r}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

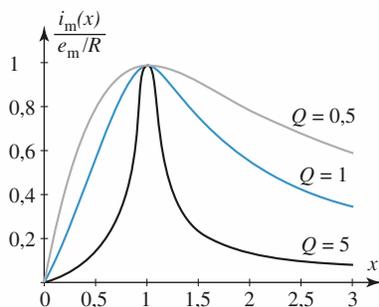
avec :

- $i_r = \frac{e_m}{R}$, l'intensité à la résonance obtenue pour $x = 1$,
- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, la pulsation réduite,
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, la pulsation de résonance (d'intensité),
- $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ le facteur de qualité du circuit.



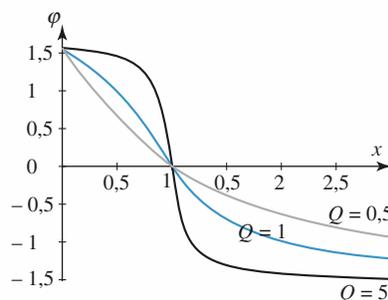
Étude d'un circuit (R, L, C) série.

Ainsi, $i_m = \frac{i_r}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$, et $\varphi = -\arctan\left[Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right]$.



Variations de $\frac{i_m(x)}{e_m/R}$ en fonction de x

pour $Q = \frac{1}{2}$, $Q = 1$ et $Q = 5$.



Variations du déphasage $\varphi(x)$ de la réponse $i(t)$ par rapport à l'excitation $e(t)$ en fonction

de x pour $Q = \frac{1}{2}$, $Q = 1$ et $Q = 5$.

Le courant est nul à très haute fréquence ($\omega \gg \omega_0$), et à très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$). Une résonance de courant est observée lorsque le circuit est excité **exactement** à sa pulsation propre

ω_0 : le courant égal à $i_r = \frac{e_m}{R}$ est alors en phase avec la tension excitatrice.

L'acuité à la résonance augmente avec le facteur de qualité : le domaine de fréquence $\Delta\omega$ dans lequel $i_m > \frac{i_r}{\sqrt{2}}$ est :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}.$$

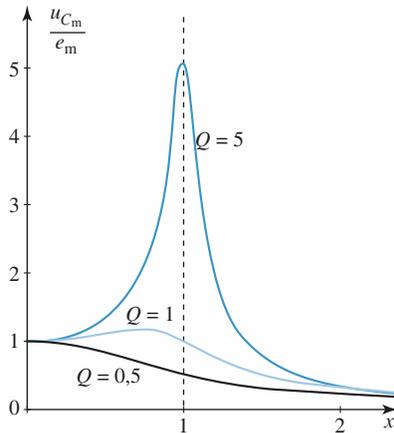
À la résonance ($\omega = \omega_0$), la tension $u_R = Ri(t)$ aux bornes de la résistance est maximale et égale à la tension de la f.e.m.

- On associe à la tension $u_C(t) = u_{C,m} \cos(\omega t + \psi)$ aux bornes de la capacité, l'amplitude complexe $\underline{u}_{C,m} = u_{C,m} e^{j\psi}$, d'expression :

$$\underline{u}_{C,m} = \frac{-j \frac{Q}{x} e_m}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} = \frac{e_m}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}},$$

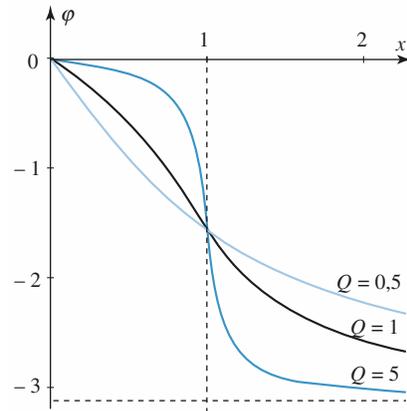
avec les mêmes notations que précédemment. Ainsi :

$$u_{C,m} = \frac{e_m}{\sqrt{(x^2 - 1)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}} \quad \text{et} \quad \psi = \varphi - \frac{\pi}{2} = -\arctan \left[Q \left(x - \frac{1}{x}\right) \right] - \frac{\pi}{2}.$$



Variations de $\frac{u_{C,m}}{e_m}$ en fonction de x pour :

$$Q = \frac{1}{2}, 1 \text{ et } 5.$$



Variations du déphasage $\varphi(x)$ et $u_C(t)$ par rapport à $e(t)$ en fonction de $Q = \frac{1}{2}, 1$ et 5 .

Cette tension passe par un maximum si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: dans ce cas, la résonance est obtenue pour une pulsation ω_r inférieure à ω_0 . Pour un bon facteur de qualité ($Q \gg 1$), $\omega_r \approx \omega_0$, et la tension aux bornes de la capacité est égale, pour $\omega = \omega_0$, à $u_{C,m} = Q e_m \gg e_m$.

C'est pour cette raison que le *facteur de qualité* Q porte aussi le nom de *facteur de surtension*.

◆ Pour s'entraîner : ex. 6 et 11

◆ Puissance en régime sinusoïdal

- La valeur efficace de la grandeur périodique $s(t)$ est :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}.$$

Si $s(t)$ est une grandeur sinusoïdale d'amplitude s_m :

$$S_{\text{eff}} = \frac{s_m}{\sqrt{2}}.$$

La puissance absorbée par un dipôle est, en convention récepteur :

$$p(t) = u(t) i(t).$$

- En régime sinusoïdal, la puissance moyenne absorbée est :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi.$$

La puissance est le produit de la tension par le courant : ce n'est pas une grandeur linéaire :

$p(t) = u(t)i(t)$ ne s'identifie pas à $\mathcal{R}e[u(t)i(t)]$.

La puissance moyenne absorbée par un dipôle en régime sinusoïdal est, en convention récepteur :

$$\mathcal{P} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}e[\underline{u}(t) \dot{i}^*(t)].$$

En particulier, la puissance absorbée par un dipôle passif d'impédance $\underline{Z}(\omega)$ est, en fonction de sa résistance $R(\omega) = \mathcal{R}e(\underline{Z}(\omega))$, ou de sa conductance $G(\omega) = \mathcal{R}e\left(\frac{1}{\underline{Z}(\omega)}\right)$:

$$\mathcal{P} = R(\omega) I_{\text{eff}}^2 = G(\omega) U_{\text{eff}}^2.$$

- En régime sinusoïdal, pour que la puissance transmise du générateur ($\underline{E}_g, \underline{Z}_g$) à l'utilisation (\underline{Z}_u) soit maximale il faut que \underline{Z}_u et \underline{Z}_g soient conjugués. On parle alors d'*adaptation d'impédance*.

► **Pour aller plus loin : ex. 3, 8, 9 et 10**

Conseils et pièges à éviter

- L'ensemble des résultats est aussi vu en mécanique.
- Bien connaître les divers résultats ou savoir les retrouver sans hésitation.
- Lors de la résolution d'équations linéaires, on peut utiliser les notations complexes. La puissance est une grandeur quadratique (donc non linéaire). Il faut alors abandonner les notations complexes. Seule la puissance moyenne est accessible par les notations complexes à l'aide de la formule suivante qu'il faut connaître :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) i(t) dt = \frac{1}{2} \mathcal{R}e(\underline{U} \underline{I}^*)$$

1 Utilisation de la notation complexe

1 • Pour chacun des dipôles suivants, utilisés à la fréquence $f = 50$ Hz, déterminer les expressions des impédances complexes \underline{Z} et en déduire leurs modules Z et leurs arguments φ , sachant que $R = 100 \Omega$, $L = 100$ mH et $C = 0,1 \mu\text{F}$:

- dipôle (R, C) série ;
- dipôle (R, C) parallèle ;
- dipôle (R, L) série ;
- dipôle (R, L) parallèle ;
- dipôle R en série avec (L, C) parallèle.

2 • Calculer la valeur des composants R' et C' du dipôle (R', C') parallèle pour qu'il ait la même impédance que celle du dipôle (R, C) série à la pulsation ω d'utilisation.

On posera $\alpha = \frac{1}{RC\omega}$, $\alpha' = R'C'\omega$.

Comparer les facteurs α et α' .

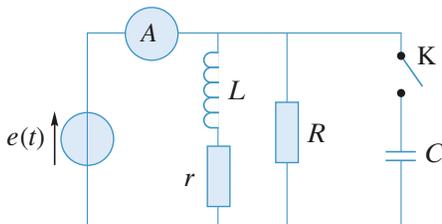
Conseils Les dipôles étant passifs, utiliser les lois d'association des impédances, puis écrire $\underline{Z} = Ze^{j\varphi}$ avec

$$\tan \varphi = \frac{\text{Re}(Z)}{\text{Im}(Z)}$$

2 Une question d'impédance

Soit le circuit ci-dessous où le générateur de f.e.m. $e(t) = e_m \cos(\omega t)$, débite un courant $i(t)$ tel que :

$$i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi).$$



Comment doit-on choisir la capacité C pour que l'ampèremètre mesurant le courant débité par la source fournisse, en régime établi, la même indication, que l'interrupteur soit ouvert ou fermé ?

Interpréter le résultat dans le diagramme de Fresnel, en faisant figurer dans le plan complexe les amplitudes complexes des courants traversant les branches en parallèle.

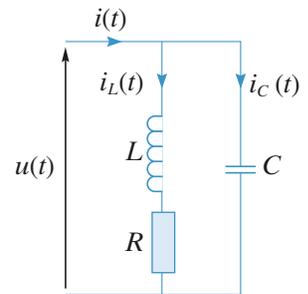
Conseils

Ne pas oublier qu'un ampèremètre fournit en alternatif une valeur efficace et, qu'en conséquence, il donne la même indication pour deux courants dont les intensités complexes sont conjuguées.

3 Calculs de valeurs efficaces et de déphasages

Soit le circuit ci-dessous pour lequel on donne la valeur efficace de $u(t)$:
 $U = 220$ V ; $f = 500$ Hz ;
 $L = 0,3$ H ; $R = 600 \Omega$;
 $C = 0,2 \mu\text{F}$.

Calculer les valeurs efficaces et les déphasages, par rapport à u , des courants i , i_L et i_C . Représenter ces trois courants dans le plan complexe, en représentation de Fresnel des intensités.



Conseils

Calculer d'abord i_C et i_L ainsi que leur déphasage par rapport à u . Ne pas oublier que la loi des nœuds ne s'applique pas aux intensités efficaces.

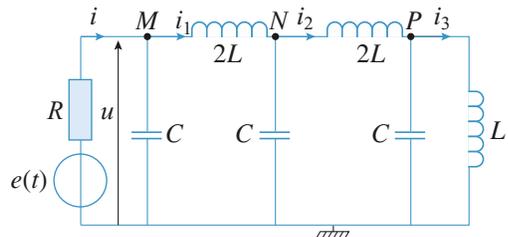
4 Étude d'un réseau

On étudie le réseau représenté sur la figure ci-dessous.

$$e(t) = e_m \cos \omega t.$$

Les valeurs de R, L et C sont telles que :

$$R = L\omega \text{ et } LC\omega^2 = 2.$$



Déterminer $u(t)$ ainsi que les courants $i(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ et $i_3(t)$ en régime sinusoïdal forcé.

Conseils

On appliquera les méthodes élémentaires utilisant les associations et les diviseurs.

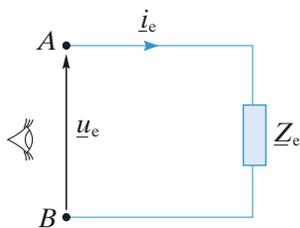
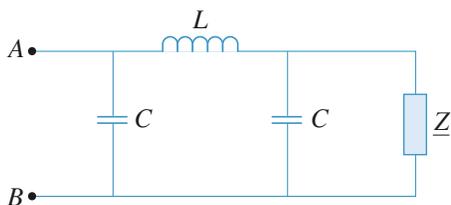
Le calcul n'est simple que parce que $LC\omega^2 = 2$.

Utiliser cette relation à chaque étape du calcul.

Le calcul utilise les représentations complexes, mais le résultat final doit s'exprimer par une fonction réelle du temps.

5 Impédance itérative

Quelle valeur Z_i faut-il donner à Z pour que l'impédance complexe d'entrée de ce réseau vue entre A et B soit égale à Z ? Discuter de la valeur de Z_i en fonction de ω , pulsation du signal appliqué en entrée.



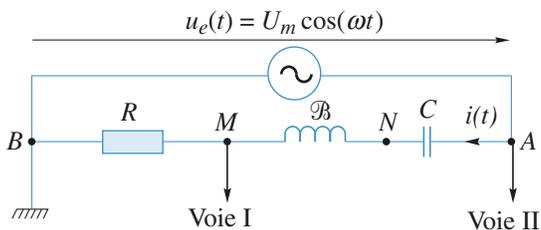
Conseils

L'impédance complexe d'entrée Z_e est égale au rapport de la tension u_e au courant i_e qui rentre en A . C'est l'impédance « vue » entre A et B .

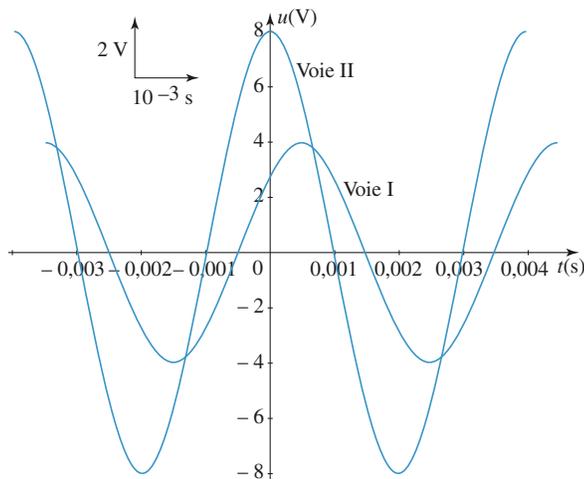
On trouvera Z_i^2 en fonction de L , C et ω . Il ne faut pas prendre la racine carrée sans précaution.

6 Résistance interne d'une bobine (CCP 2005)

On étudie le circuit suivant constitué d'une résistance R , d'une bobine de coefficient L et de résistance interne r , et d'un condensateur de capacité C :



L'oscillogramme (ou copie d'écran de l'oscilloscope), ainsi que les indications sur l'échelle commune utilisée pour les deux voies, sont reproduites ci-dessous :



Données : $R = 22 \Omega$; $C = 10 \mu F$.

1 • À l'aide de l'oscillogramme, calculer les valeurs de la période T , de la pulsation ω , des amplitudes U_m et I_m , et de l'impédance réelle Z_{AB} et les reporter dans le tableau suivant :

Grandeur	T (s)	ω (rad s ⁻¹)	I_m (A)	U_m (V)	Z_{AB} (Ω)
Valeur numérique					

2 • Des deux tensions u_I et u_{II} , quelle est celle qui est en avance de phase sur l'autre ?

3 • Calculer le déphasage ϕ entre la tension :

$$u_e(t) = U_m \cos(\omega t)$$

et l'intensité du courant $i(t) = I_m \cos(\omega t - \phi)$.

4 • Montrer que, dans l'hypothèse d'une bobine idéale de résistance r nulle, les valeurs numériques de Z_{AB} , ϕ et R (donnée de l'énoncé) sont incohérentes.

5 • Il est donc nécessaire de prendre en compte la résistance r de la bobine. Calculer r et L .

Conseils

1) T , U_m et U_{R} résistance, m se lisent directement sur les graphes ; ω , I_m et Z_{AB} s'en déduisent.

2) Lorsque t croît, laquelle des deux courbes atteint son maximum en premier ?

3) L'intervalle de temps séparant les deux courbes conduit au déphasage correspondant.

4) Écrire l'impédance totale dans cette hypothèse et montrer qu'avec la valeur de R de l'énoncé on ne retrouve pas les valeurs expérimentales de Z_{AB} et ϕ .

5) Réécrire Z_{AB} et ϕ en tenant compte de r .

7 Étude d'un circuit bouchon

Un circuit bouchon est constitué d'une bobine (r, L) montée en parallèle sur un condensateur C . Le circuit, de fréquence propre $f_0 = 1$ MHz, de facteur de qualité :

$$Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0} = 200,$$

est attaqué en tension par un générateur de f.e.m. efficace $E = 10$ mV et de pulsation ω .

L'impédance en continu du circuit est $r = 2 \Omega$.

Déterminer :

a. la valeur de l'inductance L de la bobine et celle de la capacité C du condensateur ;

b. l'impédance $Z_0 = |Z(\omega_0)|$ de ce circuit à la résonance ($\omega = \omega_0$) ;

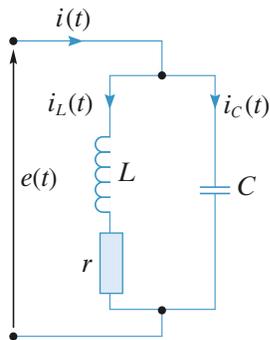
c. la valeur efficace, à la fréquence f_0 des intensités I_L et I_C dans les deux branches du circuit ainsi que celle du courant I débité par le générateur ;

d. le rapport $\frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)}$ pour $\left| \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right| \ll 1$ et montrer

qu'il s'exprime simplement en fonction de Q et de

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}.$$

Pourquoi ce circuit est-il appelé circuit « bouchon » ?



3 • Calculer L_1 lorsque P a sa valeur maximale, sachant que $R = 12 \Omega$. En déduire la valeur numérique de P_{\max} .

4 • Pour une valeur R_1 de R (avec $R_1 > R_0$), la puissance délivrée par le générateur vaut $P_1 = 1936$ W ; calculer R_1 en prenant la valeur de L_1 trouvée en 3.

5 • Calculer la valeur de C pour que, lorsque $R = R_1$, la tension aux bornes du générateur soit en phase avec le courant qu'il débite.

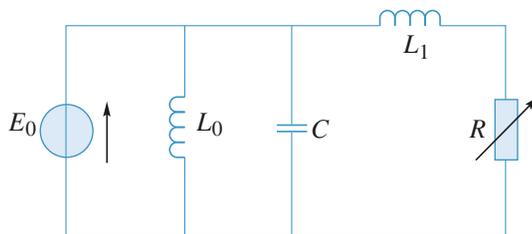


Figure 1

Conseils

1. Les dipôles inductance pure et capacité pure sont-ils dissipatifs ? En exprimant le $\cos(\phi)$ de la relation $\langle P \rangle = UI \cos(\phi)$, on peut montrer la relation du texte puis l'appliquer au dipôle L_1 en série avec R .

2. Il suffit de dériver par rapport à R l'expression précédente.

5. Comment doit être la partie imaginaire de l'impédance (ou l'admittance) d'un dipôle pour que la tension à ses bornes et l'intensité qui le parcourt soient en phase ?

Conseils

La valeur élevée de Q autorise des approximations. Ne pas oublier que la loi des nœuds ne s'applique pas aux intensités efficaces.

8 Puissance absorbée (ENAC 2007)

Le circuit représenté sur le schéma de la figure 1 est alimenté par une source de tension de force électromotrice sinusoïdale de fréquence $f = 50$ Hz et de valeur efficace $E_0 = 220$ V.

La résistance R est variable et $L_0 = 1$ H.

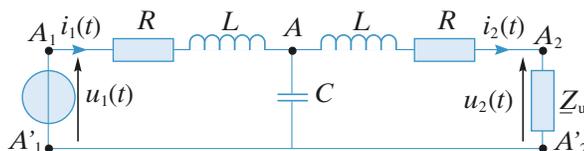
1 • Exprimer la puissance moyenne fournie par le générateur au circuit sur une période. On pourra montrer que la puissance moyenne absorbée par un dipôle d'impédance Z vaut $U_{\text{efficace}}^2 \cdot \text{Re}\left(\frac{1}{Z}\right)$.

$$Z \text{ vaut } U_{\text{efficace}}^2 \cdot \text{Re}\left(\frac{1}{Z}\right).$$

2 • Calculer la valeur R_0 de R pour laquelle la puissance P est maximale. Exprimer P_{\max} .

9 Ligne de transport d'énergie

Le schéma équivalent d'une ligne de transport d'énergie à haute tension est donné ci-dessous avec $R = 10 \Omega$, $L = 100$ mH et $C = 1 \mu\text{F}$, la fréquence du courant étant $f = 50$ Hz. L'utilisation absorbe une puissance moyenne $\mathcal{P}_2 = 1$ MW, sous une tension efficace $U_2 = 15\,000$ V, avec un facteur de puissance $\cos \varphi_2 = 0,78$; le courant $i_2(t)$ à travers l'utilisation étant en retard sur la tension $u_2(t)$ à ses bornes.



1 • Quelle est l'intensité efficace I_2 du courant absorbé par l'utilisation et quelle est son impédance complexe Z_u ?

2 • Déterminer l'intensité efficace I_1 du courant débité par la source.

3 • Quelle est l'impédance de charge Z_c du générateur ? En déduire la tension efficace U_1 à ses bornes.

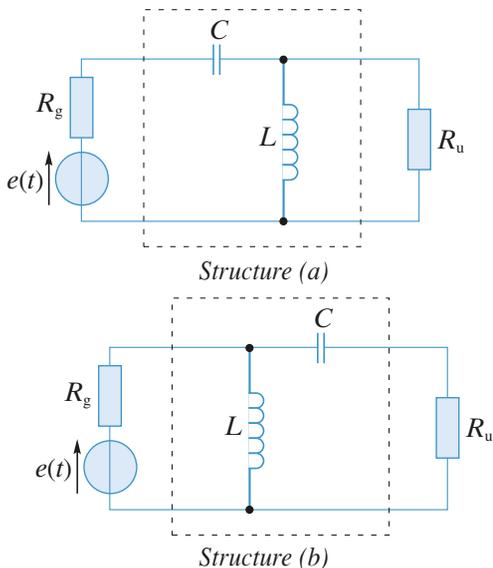
- 4 • Quel est le facteur de puissance $\cos \varphi_1$ au départ de la ligne ?
- 5 • En déduire la puissance moyenne \mathcal{P}_1 fournie par le générateur et la puissance \mathcal{P}_d perdue en ligne.
- 6 • Quelle doit être la valeur C_1 de la capacité à placer aux bornes du générateur pour ramener à l'unité le facteur de puissance au départ de la ligne ?

Conseils

Travailler avec les grandeurs complexes pour être en mesure d'appliquer les lois générales de l'électrocinétique en notation complexe, et conclure avec les grandeurs efficaces.

10 Adaptateur d'impédances à composants réactifs

Pour transmettre une puissance maximale du générateur (e, R_g) à l'utilisation R_u ($\neq R_g$), on intercale entre le générateur et l'utilisation un quadripôle réalisé avec une inductance L et une capacité C (schéma ci-dessous).



- 1 • Montrer que la structure (a) permet l'adaptation d'impédance souhaitée lorsque $R_u > R_g$. Calculer L et C , en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser un transfert maximal d'énergie.
- 2 • Vérifier que la structure (b) permet cette adaptation d'impédances lorsque $R_u < R_g$. Calculer alors L et C , en fonction de R_u, R_g et ω pulsation du générateur, afin de réaliser à nouveau un transfert maximal d'énergie.

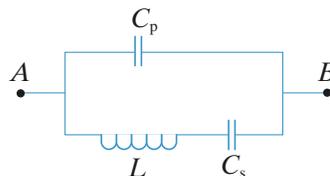
Conseils

Il faut utiliser le résultat du cours : pour que la puissance transmise soit maximale, il faut que $Z_g = Z_u^*$. Écrire l'adaptation d'impédances à l'entrée du dipôle. Une puissance maximale est alors transmise au dipôle qui la restitue intégralement à l'utilisation puisque tous ses éléments sont réactifs.

11 Étude d'un quartz

D'après ENAC.

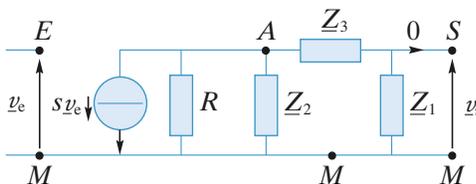
Entre ses deux bornes A et B , on peut donner pour un quartz le circuit équivalent schématisé ci-dessous.



- 1 • Exprimer l'impédance complexe Z entre A et B en fonction de L, C_s, C_p et de la pulsation ω . Mettre Z sous la forme $Z = j \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$. Identifier ω_s et ω_p .

2 • Dans quel domaine de pulsation le circuit a-t-il un comportement inductif ?

3 • On considère maintenant le circuit représenté ci-dessous modélisant un convertisseur tension-courant avec sa charge constituée par le quadripôle (Z_1, Z_2, Z_3).



- a. Calculer la fonction de transfert $H = \frac{v_s}{v_e}$, en sortie ouverte (pas de courant sortant par la borne S).
- b. Les impédances Z_1, Z_2 et Z_3 étant des réactances pures ($Z_k = jX_k$), à quelles conditions les tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ ont-elles même amplitude et même phase ?
- c. Les impédances Z_1 et Z_2 sont réalisées avec des condensateurs parfaits de capacité C , et l'impédance Z_3 est réalisée avec une bobine d'inductance L' . Que deviennent les conditions précédentes ?
- d. L'impédance Z_3 est maintenant constituée par le quartz étudié aux questions 1) et 2) . À quelle fréquence les tensions $v_e(t)$ et $v_s(t)$ sont-elles égales en amplitude et en phase ?

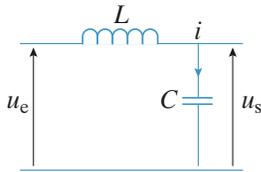
Remarque : Le circuit final étudié représente un élément d'un oscillateur quasi-sinusoïdal d'excellente qualité.

Conseils

Calculer l'impédance Z et la mettre sous la forme désirée en se laissant guider par l'énoncé. Les tensions $v_s(t)$ et $v_e(t)$ ont même amplitude et même phase lorsque la fonction de transfert H est telle que $H = 1$.

12 Réponse d'un circuit (L, C)

On étudie la réponse du circuit représenté sur la *figure* ci-dessous pour une excitation sinusoïdale qui commence à la date $t = 0$. On notera que ce circuit idéal ne comporte aucune résistance.



$u_e(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u_e(t) = U_0 \cos \omega t$ pour $t > 0$.

On posera $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

1 • Premier cas : $\omega \neq \omega_0$

Déterminer la solution complète $u_s(t)$. Peut-on parler ici de régime transitoire ?

2 • Deuxième cas : $\omega = \omega_0$

Pourquoi ne peut-on pas appliquer la solution précédente ?

Vérifier que pour $t > 0$ la solution est de la forme :

$$u_s(t) = \alpha t \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Calculer la puissance instantanée délivrée par la source.

Commenter *son évolution au cours du temps*.

Conseils

1. Quelles sont, à $t = 0^+$, les valeurs initiales de u et de $\frac{du}{dt}$?

Revoir la solution générale d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2.

2. Injecter la solution proposée après avoir utilisé les conditions initiales.

1 Utilisation de la notation complexe

1 • a. Dipôle (R, C) série :

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega},$$

d'où numériquement : $Z = 31,8 \text{ k}\Omega$ et $\varphi = -89,8^\circ$.

b. Dipôle (R, C) parallèle :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + jC\omega = \frac{1 + jRC\omega}{R},$$

d'où $\underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$, soit numériquement :

$$Z = 100 \Omega \text{ et } \varphi = -0,18^\circ.$$

c. Dipôle (R, L) série : $\underline{Z} = R + jL\omega$, donc :

$$Z = 104,8 \Omega \text{ et } \varphi = 17,4^\circ.$$

d. Dipôle (R, L) parallèle : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega}$ et, par suite,

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega R}{R + jL\omega}.$$

Numériquement, il vient $Z = 29,2 \Omega$ et $\varphi = 72,6^\circ$.

e. On note par \underline{Z}_0 l'impédance de (L, C) parallèle :

$$\underline{Z}_0 = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2},$$

$$\text{donc } \underline{Z} = R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2},$$

donc : $Z = 104,8 \Omega$ et $\varphi = 17,45^\circ$.

2 • On réalise l'égalité :

$$\frac{1}{\underline{Z}'} = \frac{1}{R'} + jC'\omega = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jC\omega}{1 + jRC\omega}$$

$$= \frac{R(C\omega)^2 + jC\omega}{1 + (RC\omega)^2}.$$

En égalant les parties réelles, il vient :

$$R' = \frac{1 + (RC\omega)^2}{R(C\omega)^2} = R + \frac{1}{R(C\omega)^2},$$

soit encore, en introduisant le facteur α ($\alpha = \frac{1}{RC\omega}$) :

$$R' = R(1 + \alpha^2).$$

De même, en égalant les parties imaginaires, on obtient :

$$C' = \frac{C}{1 + (RC\omega)^2} = \frac{C\alpha^2}{1 + \alpha^2}.$$

On calcule alors :

$$\alpha' = R'C'\omega = RC\omega\alpha^2 = \alpha.$$

Les facteurs α et α' sont donc identiques.

2 Une question d'impédance

Dans le premier cas, le courant traversant l'ampèremètre est d'amplitude complexe : $i_m = \underline{Y}e_m$, avec :

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{r + jL\omega} = \left[\frac{1}{R} + \frac{r}{r^2 + L^2\omega^2} \right] + \left[-\frac{jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} \right].$$

Dans le second cas, il vient : $i'_m = \underline{Y}'e_m$, avec :

$$\underline{Y}' = \underline{Y} + jC\omega = \left[\frac{1}{R} + \frac{r}{r^2 + L^2\omega^2} \right] + \left[jC\omega - \frac{jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} \right].$$

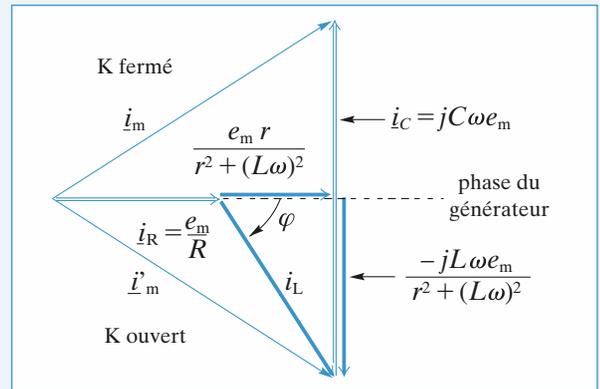
L'ampèremètre indique la valeur efficace du courant, de sorte que l'on veut que la condition $|i_m| = |i'_m|$ soit réalisée, soit encore : $|\underline{Y}| = |\underline{Y}'|$.

Ces deux admittances ont même partie réelle, et leurs parties imaginaires, différentes, ne peuvent s'identifier qu'au signe près. La condition recherchée est alors nécessairement :

$$jC\omega - \frac{jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} = -\left(\frac{-jL\omega}{r^2 + L^2\omega^2} \right)$$

ou encore :

$$C = \frac{2L}{r^2 + L^2\omega^2}.$$



i_R : courant dans la résistance R , en phase avec e_m délivré par le générateur.

i_L : courant dans l'inductance (r, L) , en retard de φ tel que $\tan \varphi = -\frac{L\omega}{r}$.

i_C : courant dans le condensateur C , en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur la phase du générateur.

L'égalité des modules de i_m et i'_m (K fermé et K ouvert) impose :

$$C\omega = \frac{2L\omega}{r^2 + L^2\omega^2}, \text{ soit } C = \frac{2L}{r^2 + L^2\omega^2}.$$

3 Calculs de valeurs efficaces et de déphasages

On utilise la notation complexe.

- $i_{Cm} = jC\omega u_m$.

Donc i_C présente un déphasage $\varphi_C = 90^\circ$ par rapport à u et sa valeur efficace est :

$$I_C = C\omega U = 0,14 \text{ A.}$$

- D'autre part, on a :

$$u_m = (jL\omega + R)i_{Lm},$$

d'où :

$$i_{Lm} = \frac{u_m}{R + jL\omega},$$

et :

$$I_L = \frac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = 0,2 \text{ A.}$$

Le déphasage φ_L de i_L par rapport à u est défini par

$$\tan \varphi_L = -\frac{L\omega}{R} \text{ avec } \cos \varphi_L > 0.$$

Soit $\varphi_L = -58^\circ$.

- Il reste à préciser i :

$$i_m = i_{Lm} + i_{Cm} = \frac{u_m}{R + jL\omega} + jC\omega u_m$$

soit encore :

$$i_m = \frac{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}{R + jL\omega} u_m$$

d'où :

$$i_m = (1 - LC\omega^2 + jRC\omega)i_{Lm}.$$

Numériquement :

$$i_m = (0,41 + 0,38j)i_{Lm}.$$

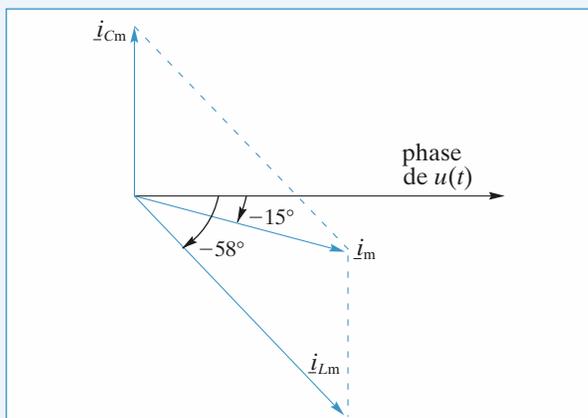
La valeur efficace de i en résulte :

$$I = (0,41^2 + 0,38^2)^{\frac{1}{2}} I_L = 0,11 \text{ A}$$

ainsi que le déphasage φ_I de i par rapport à u :

$$\varphi_I = \arctan \frac{0,38}{0,41} + \varphi_L = 43 - 58 = -15^\circ.$$

La représentation de Fresnel relative à l'intensité est la suivante :



Cette construction n'est autre que la représentation, dans le plan complexe, de la relation :

$$i_m = i_{Cm} + i_{Lm}.$$

4 Étude d'un réseau

On cherche à déterminer l'impédance complexe vue par la source de tension :

– entre le nœud P et la masse : L et C en parallèle, soit :

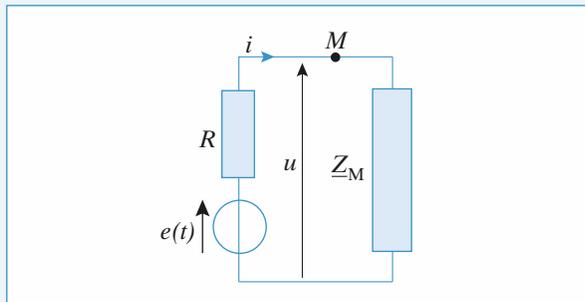
$$\underline{Z}_P = \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2} = -jL\omega, \text{ car } Lc\omega^2 = 2;$$

– entre le nœud N et la masse : ($2L$ en série avec \underline{Z}_P) en parallèle avec C , soit L et C en parallèle, donc :

$$\underline{Z}_N = \underline{Z}_P = -jL\omega;$$

– de même, entre le nœud M et la masse : $\underline{Z}_M = -jL\omega$.

Représentons le schéma équivalent pour le nœud M .



On en déduit immédiatement :

- $i = e \frac{1}{R + \underline{Z}_M} = \frac{e_m}{R(1 - j)}$, car $R = L\omega$.

$$|i| = \frac{e_m}{R\sqrt{2}} \text{ et } \arg(i) = +\frac{\pi}{4}.$$

D'où :

$$i(t) = \frac{e_m}{R\sqrt{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

- $u = -jL\omega i = e_m \frac{-j}{1 - j}$

$$|u| = \frac{e_m}{\sqrt{2}} \text{ et } \arg(u) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}.$$

D'où :

$$u(t) = \frac{e_m}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right).$$

Les amplitudes complexes de i_1 , i_2 et i_3 se déduisent de celle de i par divisions successives de courant :

$$i_1 = i \frac{1}{\underline{Z}_N + j2L\omega} = -i.$$

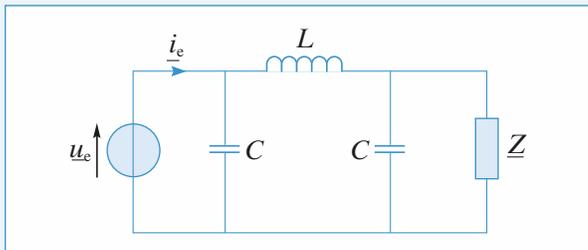
$$\frac{1}{\underline{Z}_N + j2L\omega} + jC\omega$$

On obtient de même : $i_2 = -i_1$ et $i_3 = -i_2$.

On en déduit :

$$i(t) = -i_1(t) = i_2(t) = -i_3(t) = \frac{e_m}{R\sqrt{2}} \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right).$$

5 Impédance itérative



Par définition, l'impédance d'entrée du réseau est donnée par :

$$\underline{Z}_e = \frac{u_e}{i_e}.$$

\underline{Z}_e apparaît comme l'impédance « vue » depuis les bornes du générateur u_e , c'est-à-dire d'un réseau constitué d'un condensateur C en parallèle avec l'impédance \underline{Z}_1 résultat de l'association d'une inductance L en série avec C et \underline{Z} en parallèle.

Donc :

$$\underline{Z}_1 = jL\omega + \frac{\frac{1}{jC\omega} \underline{Z}}{\frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}} = jL\omega + \frac{\underline{Z}}{1 + jC\omega\underline{Z}}$$

et :

$$\underline{Z}_e = \frac{\frac{1}{jC\omega} \underline{Z}_1}{\frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}_1} = \frac{\underline{Z}_1}{1 + jC\omega\underline{Z}_1}.$$

On cherche \underline{Z}_i telle que $\underline{Z}_e = \underline{Z}_i = \underline{Z}$, soit :

$$\underline{Z}_i = \frac{\underline{Z}_1}{1 + jC\omega\underline{Z}_1}$$

ou encore : $\underline{Z}_i(1 + jC\omega\underline{Z}_1) = \underline{Z}_1$.

En remplaçant \underline{Z}_1 par son expression, il vient :

$$\underline{Z}_i \left[1 + jC\omega \left(jL\omega + \frac{\underline{Z}_i}{1 + jC\omega\underline{Z}_i} \right) \right] = jL\omega + \frac{\underline{Z}_i}{1 + jC\omega\underline{Z}_i},$$

d'où, en multipliant cette équation par $(1 + jC\omega\underline{Z}_i)$:

$$\underline{Z}_i(1 + jC\omega\underline{Z}_i - LC\omega^2 - jLC^2\omega^3\underline{Z}_i + jC\omega\underline{Z}_i) = jL\omega - LC\omega^2\underline{Z}_i + \underline{Z}_i,$$

en simplifiant : $2jC\omega\underline{Z}_i^2 - jLC^2\omega^3\underline{Z}_i^2 = jL\omega$.

Finalement l'expression de \underline{Z}_i s'établit à :

$$\underline{Z}_i^2 = \frac{L}{2C - LC^2\omega^2} = \frac{L}{C} \frac{1}{2 - LC\omega^2}.$$

Pour aller plus loin, il faut discuter du signe de $2 - LC\omega^2$:

• si $2 - LC\omega^2 > 0$, soit $\omega < \frac{\sqrt{2}}{LC}$, alors il vient :

$$\underline{Z}_i = \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{2 - LC\omega^2}},$$

\underline{Z}_i est une résistance (en ne retenant que la solution positive seule physiquement acceptable) dont la valeur dépend de la pulsation ω utilisée ;

• si $2 - LC\omega^2 < 0$, soit $\omega > \frac{\sqrt{2}}{LC}$, alors :

$$\underline{Z}_i = \pm j \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{LC\omega^2 - 2}}.$$

\underline{Z}_i est soit une inductance (signe +), soit une capacité (signe -) et sa valeur dépend de ω .

6 Résistance interne d'une bobine

1 • La période lue sur l'oscillogramme est $T = 4 \cdot 10^{-3}$ s ; elle est bien sûr (régime forcé) commune aux deux signaux. On en déduit $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1571 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

• La voie I donne la tension aux bornes de R . Donc

$$I_m = \frac{U_{Rm}}{R} = \frac{4}{22} = 182 \text{ mA}.$$

• La voie II donne directement $u_e(t)$, donc $U_m = 8 \text{ V}$.

• $\underline{U}_e = \underline{Z}_{AB} I$, soit $U_m = Z_{AB} I_m$, donc $Z_{AB} = 44 \Omega$.

2 • La courbe II atteint, lorsque t augmente, son maximum avant la courbe I, elle est donc en avance, c'est-à-dire : si $u_{II} = u_{IIm} \cos(\omega t)$ alors $u_I = u_{Im} \cos(\omega t - \gamma)$ avec $u_{Im} > 0$ et $\gamma > 0$.

3 • L'écart temporel entre les deux courbes est de $\Delta t = 5 \cdot 10^{-4}$ s.

Le déphasage correspondant vaut donc $\frac{\Delta t}{T} \cdot 2\pi = 0,785 \text{ rad}$,

soit 45° . Comme $u_e(t)$ est en avance sur $i(t)$: $u_e(t) = U_m \cos \omega t \Rightarrow i(t) = I_m \cos(\omega t - 0,785)$ et $\phi = +45^\circ$ ou $+0,785 \text{ rad}$

(on vérifie bien que pour $t = \frac{0,785}{\omega}$, i est maximum et pour $t = -\frac{0,785}{\omega}$, i est nul).

4 • En notation complexe $\underline{Z} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$ et $\underline{U} = \underline{Z} I$

avec $\underline{U} = U_m$ et $I = I_m e^{-j\phi}$; soit $\tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$
d'où $L\omega - \frac{1}{C\omega} = R \tan \phi = 22 \Omega$.

$$\text{Or } |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} = 31 \Omega.$$

La valeur expérimentale est $Z_{AB} = 44 \Omega$ ce qui ne correspond pas. Donc l'hypothèse d'une bobine \mathcal{B} parfaite ne convient pas.

5 • En tenant compte de la résistance interne

$$\underline{Z} = (R + r) + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) \quad \text{et} \quad \tan \phi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R + r}$$

R, C sont donnés dans l'énoncé, ϕ, ω et Z_{AB} sont connus, on peut bien en déduire r et L . Comme $\tan \phi = 1$,

$$R + r = L\omega - \frac{1}{C\omega}, \text{ d'où } Z_{AB}^2 = (R + r)^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2$$

il vient $r = 9 \Omega$, puis $L = 60 \text{ mH}$.

7 Étude d'un circuit bouchon

a. Le facteur de qualité Q du circuit donné par l'énoncé est :

$$Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0}$$

en notant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.

Il en résulte que : $L = \frac{rQ}{\omega_0} = 64 \mu\text{H}$

et : $C = \frac{1}{rQ\omega_0} = 400 \text{ pF}$.

b. L'impédance complexe $Z(\omega)$ du circuit est :

$$Z(\omega) = \frac{(r + jL\omega) \frac{1}{jC\omega}}{r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{r + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jrC\omega}$$

Pour $LC\omega_0^2 = 1$, elle s'établit à :

$$Z(\omega_0) = \frac{r + jL\omega_0}{jrC\omega_0} \approx \frac{jL\omega_0}{jrC\omega_0} = rQ^2$$

puisque $r = \frac{L\omega_0}{Q} \ll L\omega_0$.

À la fréquence propre ($\omega = \omega_0$), l'impédance du circuit bouchon est réelle et vaut $Z_0 = rQ^2 = 80 \text{ k}\Omega$.

c. À la fréquence propre ($\omega = \omega_0$), les valeurs efficaces des intensités dans chacune des branches du circuit s'établissent à :

$$I_L = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (L\omega_0)^2}} \approx \frac{E}{L\omega_0} = \frac{E}{rQ} = 25 \mu\text{A}$$

et : $I_C = C\omega_0 E = \frac{E}{rQ} = 25 \mu\text{A}$.

Ces intensités sont presque égales en valeur efficace donc en amplitude mais elles présentent, par rapport à la tension appliquée $e(t)$, des déphasages différents respectivement égaux à :

$$\varphi_L \approx -\frac{\pi}{2} \text{ et } \varphi_C = \frac{\pi}{2}$$

L'intensité du courant principal, c'est-à-dire l'intensité débitée par la source, vaut :

$$I = \frac{E}{Z_0} = \frac{E}{rQ^2} = 125 \text{ nA}$$

On remarque que ces intensités sont liées par la relation :

$$I_L = I_C = QI$$

d. Au voisinage de la fréquence propre, $\frac{|\omega - \omega_0|}{\omega_0} \ll 1$,

on a $r \ll L\omega_0$ et par suite :

$$\begin{aligned} \frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)} &= \frac{r + jL\omega}{(1 - LC\omega^2) + jrC\omega} \frac{jrC\omega_0}{r + jL\omega_0} \\ &\approx \frac{jrC\omega}{(1 - LC\omega^2) + jrC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{r}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}. \end{aligned}$$

On considère le terme $\frac{1}{r}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$. Il est possible de lui

donner une expression plus simple au voisinage de la fréquence propre, en notant :

$\delta\omega = \omega - \omega_0$ (avec $\delta\omega \ll \omega_0$) :

$$\frac{1}{r}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right) = Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \approx 2Q \frac{\delta\omega}{\omega_0}$$

En définitive, il vient :

$$\frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)} = \frac{1}{1 + j\frac{1}{r}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{1}{1 + j2Q\frac{\delta\omega}{\omega_0}}$$

Dès que $\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2Q}$, on a $\left|\frac{Z(\omega)}{Z(\omega_0)}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ainsi pour $\frac{\delta\omega}{\omega_0} < \frac{1}{400} \ll 1$, on a $|Z(\omega)| > \frac{Z(\omega_0)}{\sqrt{2}}$.

Ce circuit est donc très sélectif et « bloque » le passage du courant au voisinage de la fréquence f_0 (d'où son nom de circuit « bouchon »).

Remarque : Le domaine de fréquence $\Delta\omega$ dans lequel :

$|Z(\omega)| > \frac{Z(\omega_0)}{\sqrt{2}}$ est égal à : $\Delta\omega = 2\delta\omega$, soit donc encore :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

$\Delta\omega$ est ici une bande « non passante » d'autant plus faible que Q est grand.

8 Adaptation d'impédances

1 • Les puissances absorbées par le dipôle L_0 et par le dipôle C sont nulles, ces deux éléments étant non dissipatifs.

• La puissance fournie par le générateur est donc celle absorbée par le dipôle série (R, L_1) .

$$\langle P \rangle = UI \cos \varphi = U^2 \frac{\cos \varphi}{Z}$$

pour un dipôle d'impédance $Z = Ze^{j\varphi}$.

Or $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z} e^{-j\varphi}$ et $\frac{\cos \varphi}{Z} = \text{Re}\left(\frac{1}{Z}\right)$, d'où

$$\langle P \rangle = U^2 \text{Re}\left(\frac{1}{Z}\right)$$

$$\text{Ici } \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{R + jL_1\omega}\right) = \frac{R}{R^2 + (L_1\omega)^2}$$

$$\text{et } \langle P \rangle = \frac{RE_0^2}{R^2 + (L_1\omega)^2}.$$

2 • En dérivant l'expression précédente par rapport à R et en annulant le numérateur, on obtient $R_0 = L_1\omega$

$$\text{et } P_{\max} = \frac{E_0^2}{2R_0}.$$

3 • $L_1 = \frac{R_0}{\omega} = 38 \text{ mH}$; $P_{\max} = 2017 \text{ W}$ soit $P_{\max} \approx 2 \text{ kW}$.

$$\mathbf{4 •} \quad R_1 = \frac{E_0^2 + \sqrt{E_0^4 - 4P_1^2(L_1\omega)^2}}{2P_1} = 16 \Omega.$$

Remarque : On a pris la racine supérieure à R_0 de l'équation du second degré en R_1 , issue de **1**.

5 • Pour que le courant et la tension soient en phase il faut que l'impédance ou l'admittance du dipôle $\{C // L_0 // (L_1 \text{ série } R_1)\}$ soit réelle.

$$Y = \frac{1}{jL_0\omega} + jC\omega + \frac{1}{R_1 + jL_1\omega} = \frac{R_1}{R_1^2 + (L_1\omega)^2} + j\left[C\omega - \frac{1}{L_0\omega} - \frac{L_1\omega}{R_1^2 + (L_1\omega)^2}\right]$$

$$\text{D'où } C = \frac{1}{L_0\omega^2} + \frac{L_1}{L_0(R_1^2 + (L_1\omega)^2)} = 106 \mu\text{F}.$$

9 Ligne de transport d'énergie

1 • L'intensité efficace I_2 du courant à travers l'utilisation

$$\text{est : } I_2 = \frac{\mathcal{P}_2}{U_2 \cos(\varphi_2)} = 85,4 \text{ A}.$$

L'utilisation a pour impédance :

$$Z_u = \frac{u_{2m}}{i_{2m}} = \frac{U_2}{I_2} e^{j\varphi_2}$$

avec $\varphi_2 > 0$, ce qui donne numériquement :

$$Z_u = (137 + j110)\Omega.$$

2 • On note $Z_1 = R + jL\omega$ et $Z_2 = \frac{1}{jC\omega}$.

Les impédances Z_2 et $(Z_1 + Z_u)$ forment au nœud A un diviseur de courant pour le courant $i_1(t)$:

$$i_{2m} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2 + Z_u} i_{1m}.$$

Il en résulte que :

$$I_1 = \frac{|Z_1 + Z_2 + Z_u|}{|Z_2|} I_2 = 81,7 \text{ A}.$$

3 • L'impédance de charge du générateur s'obtient par les lois d'association des impédances :

$$Z_c = Z_1 + \frac{Z_2(Z_1 + Z_u)}{Z_1 + Z_2 + Z_u} = (170,8 + j171,4)\Omega.$$

La tension u_{1m} aux bornes du générateur est liée au courant i_{1m} qu'il débite par la relation $u_{1m} = Z_c i_{1m}$, soit encore, en grandeurs efficaces :

$$U_1 = Z_c I_1 = 19,7 \cdot 10^3 \text{ V}.$$

4 • Le déphasage de u_{1m} par rapport à i_{1m} est égal à l'argument de l'impédance de charge Z_c du générateur :

$$\varphi_1 = \arg(Z_c) = 0,787 \text{ rad}$$

et le facteur de puissance aux bornes du générateur s'en déduit :

$$\cos(\varphi_1) = 0,71.$$

5 • La puissance moyenne fournie par le générateur est :

$$\mathcal{P}_1 = U_1 I_1 \cos(\varphi_1) = 1,14 \text{ MW}$$

et celle perdue en ligne s'établit à :

$$\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 = 0,14 \text{ MW}.$$

6 • Pour que le facteur de puissance au départ de la ligne soit égal à l'unité il faut que l'admittance de la ligne, avec la capacité C_1 entre A_1 et A'_1 , soit réelle. Or :

$$jC_1\omega + \frac{1}{Z_c} = 0,00292 + j(C_1\omega - 0,0029),$$

$$\text{d'où : } C_1 \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{\omega} = 9,32 \mu\text{F}.$$

L'impédance de la ligne est alors résistive et elle vaut :

$$Z'_c = \frac{1}{2,92 \cdot 10^{-3}} = 343 \Omega.$$

10 Adaptateur d'impédances à composants réactifs

1 • On écrit l'adaptation d'impédance à l'entrée du dipôle qui, de ce fait, reçoit une puissance maximale de la source. Comme le dipôle est réalisé avec des éléments réactifs, cette puissance est ensuite transmise sans perte à l'utilisation.

On considère la *structure* (a). L'adaptation d'impédances entre le générateur et l'utilisation impose que l'impédance d'entrée de l'adaptateur soit égale à R_g :

$$R_g = \frac{1}{jC\omega} + \frac{jL\omega R_u}{R_u + jL\omega} = \frac{R_u(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jC\omega(R_u + jL\omega)}.$$

En regroupant les termes réels et imaginaires, il vient :

$$[R_u + LC\omega^2(R_g - R_u)] + j[L - R_u R_g C]\omega = 0.$$

L'égalité à zéro implique :

$$LC = \frac{R_u}{(R_u - R_g)\omega^2} \text{ avec } R_u > R_g \text{ et } \frac{L}{C} = R_u R_g.$$

Connaissant le produit LC et le rapport $\frac{L}{C}$, on en déduit :

$$L = \frac{R_u}{\omega} \sqrt{\frac{R_g}{R_u - R_g}} \text{ et } C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_g(R_u - R_g)}}.$$

2 • De même pour la *structure (b)*, l'adaptation d'impédances entre le générateur et le dipôle impose :

$$R_g = \frac{jL\omega \left(R_u + \frac{1}{jC\omega} \right)}{R_u + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)},$$

d'où, en regroupant les termes réels et imaginaires :

$$\left(R_g R_u - \frac{L}{C} \right) + j\omega \left[L(R_g - R_u) - \frac{R_g}{C\omega^2} \right] = 0.$$

L'égalité à zéro entraîne :

$$\frac{L}{C} = R_g R_u \text{ et } LC = \frac{R_g}{\omega^2(R_g - R_u)} \text{ avec } R_g > R_u.$$

On en déduit :

$$L = \frac{R_g}{\omega} \sqrt{\frac{R_u}{R_g - R_u}} \text{ et } C = \frac{1}{\omega \sqrt{R_u(R_g - R_u)}}.$$

11 Étude d'un quartz

1 • La structure du schéma équivalent permet d'écrire :

$$\underline{Z} = \frac{\frac{1}{jC_p\omega} \left(jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega} \right)}{\frac{1}{jC_p\omega} + \frac{1}{jC_s\omega} + jL\omega}.$$

Pour arriver à la forme proposée pour \underline{Z} , il faut multiplier le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par $jC_s\omega$:

$$\underline{Z} = \frac{1}{jC_p\omega} \frac{(1 - LC_s\omega^2)}{1 + \frac{C_s}{C_p} - LC_s\omega^2},$$

$$\text{d'où : } \underline{Z} = j \frac{1}{C_p\omega} \frac{\frac{1}{LC_s} - \omega^2}{\omega^2 - \frac{1}{LC_s} \left(1 + \frac{C_s}{C_p} \right)}.$$

En posant $\omega_s^2 = \frac{1}{LC_s}$ et $\omega_p^2 = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} \right)$, on aboutit à l'expression désirée ci-dessous.

$$2 \bullet \underline{Z} = j \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p\omega(\omega^2 - \omega_p^2)}.$$

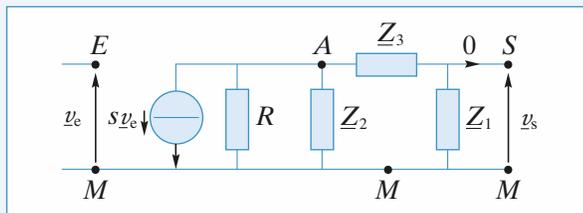
On étudie le signe de $\frac{\omega_s^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$.

ω	0	ω_s	ω_p	$+\infty$
$\omega_s^2 - \omega^2$	+	0	-	-
$\omega^2 - \omega_p^2$	-	-	-	+
$\frac{\omega_s^2 - \omega^2}{\omega^2 - \omega_p^2}$	-	0	+	-

Le circuit a donc un comportement inductif pour :

$$\omega_s < \omega < \omega_p, \text{ alors } \underline{Z} = jL\omega \\ \text{avec } L > 0.$$

3 • a.



Au nœud A, la loi des nœuds en termes de potentiels s'écrit :

$$s v_e + \frac{v_A}{R} + \frac{v_A}{Z_2} + \frac{v_A - v_s}{Z_3} = 0.$$

De plus, $v_A = \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} v_s$, car Z_1 et Z_3 forment un diviseur de la tension v_A .

D'où :

$$s v_e = -v_s \left[\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_2} \right) \frac{Z_1 + Z_3}{Z_1} + \frac{1}{Z_1} \right]$$

$$\underline{H} = \frac{s Z_1}{\frac{R + Z_2}{R Z_2} (Z_1 + Z_3) + 1}, \text{ ou :}$$

$$\underline{H} = - \frac{s R Z_1 Z_2}{(R + Z_2)(Z_1 + Z_3) + R Z_2}.$$

b. Z_1, Z_2 et Z_3 sont des réactances pures, donc elles peuvent être notées :

$$Z_1 = jX_1, \quad Z_2 = jX_2 \quad \text{et} \quad Z_3 = jX_3,$$

où les X_k sont des réels.

Il en résulte que :

$$\underline{H} = \frac{s R X_1 X_2}{-X_2(X_1 + X_3) + jR(X_1 + X_2 + X_3)}.$$

v_e et v_s ont même amplitude et même phase si, et seulement si $\underline{H} = 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ s R X_1 X_2 = -X_2(X_1 + X_3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ s R X_1 X_2 = X_2^2. \end{cases}$$

Comme X_1 et X_2 ne sont pas nulles, les conditions cherchées s'établissent à :

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + X_3 = 0 & (1) \\ s R = \frac{X_2}{X_1} & (2) \end{cases}$$

c. Par hypothèse :

$$X_1 = X_2 = -\frac{1}{C\omega} \quad \text{et} \quad X_3 = L'\omega.$$

Les conditions précédentes deviennent :

$$\begin{cases} L'\omega = \frac{2}{C\omega} \\ sR = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \omega = \sqrt{\frac{2}{L'C}} \\ sR = 1 \end{cases}$$

d. $Z_3 = j \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)}$ et la condition (1) s'écrit :

$$\frac{2}{jC\omega} + \frac{j(\omega_s^2 - \omega^2)}{C_p \omega (\omega^2 - \omega_p^2)} = 0,$$

soit encore : $\frac{2}{C} = \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{C_p (\omega^2 - \omega_p^2)},$

d'où : $2C_p (\omega^2 - \omega_p^2) = C (\omega_s^2 - \omega^2),$

et finalement : $\omega^2 = \frac{2C_p \omega_p^2 + C \omega_s^2}{2C_p + C}.$

La fréquence pour laquelle $v_s(t) = v_e(t)$ s'établit à :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2C_p \omega_p^2 + C \omega_s^2}{2C_p + C} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Le quartz a alors un comportement inductif puisque :

$f_s < f < f_p$, d'après (3) où il apparaît que :

$$\omega_s^2 < \omega^2 < \omega_p^2.$$

12 Réponse d'un circuit (L, C)

1 • Pour $t > 0$, $u_s(t)$ vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e = \omega_0^2 U_0 \cos \omega t.$$

La solution en régime forcé (ou « solution particulière ») est :

$$u_1(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} U_0 \cos \omega t.$$

La solution générale de l'équation avec un second membre nul est :

$$u_2(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

La solution générale de l'équation complète est donc :

$$\begin{aligned} u_s(t) &= u_1(t) + u_2(t) \\ &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} U_0 \cos \omega t + A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

où A et B sont des constantes déterminées par les conditions initiales.

L'inductance impose la continuité du courant, donc $i(0^+) = 0$, soit :

$$\left(\frac{du_s}{dt} \right)_{t=0^+} = 0.$$

Le courant est fini, et la charge du condensateur est continue, donc :

$$(u_s)_{t=0^+} = 0.$$

• $u_s(0) = 0 \Rightarrow \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} U_0 + A = 0.$

$$\bullet \left(\frac{du_s}{dt} \right)_{t=0^+} = 0 \Rightarrow B = 0.$$

La solution est donc :

$$u_s(t) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega} U_0 (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

En l'absence de résistance, le régime libre ne s'amortit pas. On ne peut donc pas parler de régime transitoire.

2 • La solution précédente est évidemment inapplicable pour

$\omega = \omega_0$: elle donne une forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

On cherche une solution de la forme :

$$u_s(t) = \alpha t \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

• Les C.I. doivent être respectées :

$$u_s(0) = 0, \text{ et } \left(\frac{du_s}{dt} \right) = 0 \text{ si } \varphi = \frac{\pi}{2} + p\pi.$$

La solution doit donc être de la forme :

$$u_s(t) = \alpha t \sin \omega_0 t.$$

• On injecte cette solution dans l'équation différentielle :

$$2 \alpha \omega_0 \cos \omega_0 t = \omega_0^2 U_0 \cos \omega_0 t.$$

On en déduit par identification :

$$\alpha = \frac{\omega_0 U_0}{2}.$$

On a montré que la forme proposée convient et on obtient :

$$u_s(t) = \frac{\omega_0 U_0 t}{2} \sin \omega_0 t.$$

• Le courant est donné par :

$$i(t) = C \frac{du_s}{dt} = C \frac{\omega_0 U_0}{2} \sin \omega_0 t + C \frac{\omega_0^2 U_0 t}{2} \cos \omega_0 t.$$

La puissance instantanée est :

$$\begin{aligned} p(t) &= u_e(t) i(t) \\ &= \frac{C \omega_0 U_0^2}{2} \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t + \frac{C \omega_0^2 U_0^2}{2} t \cos^2 \omega_0 t. \end{aligned}$$

Le premier terme a une valeur moyenne nulle.

Le second terme est positif et son amplitude d'oscillation est une fonction croissante du temps.

L'amplitude des oscillations augmentant linéairement, l'énergie stockée dans l'oscillateur croît comme t^2 , d'où la nécessité d'un apport continu (et de plus en plus grand !) d'énergie de la part de la source.

Pour des raisons de limitation de fonctionnement des composants, une telle évolution ne peut cependant pas durer éternellement : soit les éléments vont sortir de leur comportement linéaire, soit ils seront détruits.

4

Amplificateur opérationnel

LES OBJECTIFS

- Le modèle de l'*A.O.* idéal.
- Montages de base à *A.O.*
- Réalisation de fonctions simples avec des circuits à plusieurs *A.O.*

LES PRÉREQUIS

- Dipôles passifs linéaires.
- Diviseurs de courant et de tension.
- Loi des nœuds en termes de potentiels.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.
- Équations algébriques dans \mathbb{C} .

ESSENTIEL

- Les cinq broches importantes d'un amplificateur opérationnel sont :
 - les deux alimentations (généralement symétriques $+V_{CC}$ et $-V_{CC}$) ;
 - l'entrée inverseuse $-$;
 - l'entrée non inverseuse $+$;
 - la sortie S .

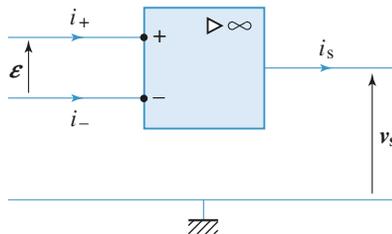
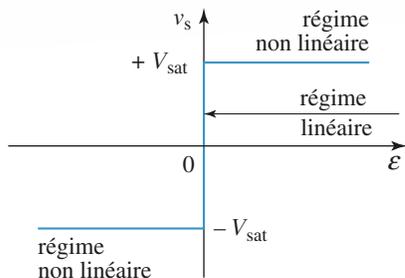
Il n'y a pas de masse sur le boîtier d'un amplificateur opérationnel.

- L'amplificateur opérationnel est un amplificateur différentiel dont le coefficient d'amplification est très important. Pour la plupart des applications, il est possible de le représenter par un modèle idéalisé.

• Amplificateur opérationnel idéal

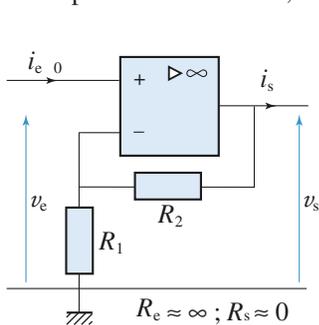
- L'amplificateur idéal est caractérisé par :
 - des courants de polarisation nuls ($i_+ = i_- = 0$)
 - une différence de potentiel nulle entre les deux entrées en régime linéaire.

Sa caractéristique de transfert est :



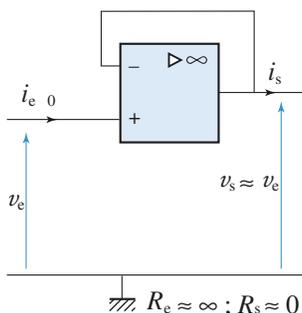
• En régime linéaire, la tension de sortie v_s et le courant de sortie i_s sont fixés par le reste du circuit, compte tenu de la relation $\varepsilon = 0$ et dans la limite $|v_s| < V_{sat}$. Les trois montages de base (à connaître) sont :

- l'amplificateur non inverseur, exercice 3,
- le suiveur, exercice 1,
- l'amplificateur inverseur, exercice 3.

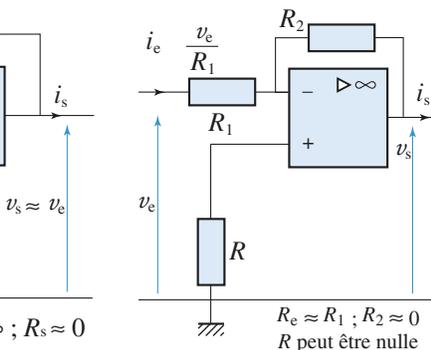


Amplificateur non inverseur

$$v_s \approx \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_e$$



Suiveur



Amplificateur inverseur

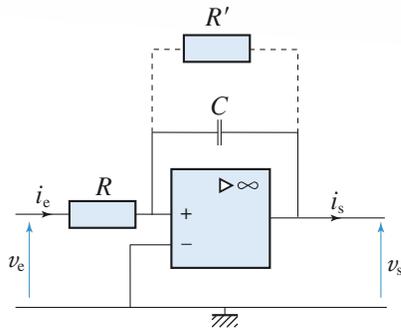
$$v_s \approx -\frac{R_2}{R_1}v_e$$

• En régime non linéaire, l'amplificateur opérationnel fonctionne en comparateur :

$$v_s = +V_{sat}, \text{ si } \varepsilon = v_+ - v_- > 0 \text{ et } v_s = -V_{sat}, \text{ si } \varepsilon = v_+ - v_- < 0.$$

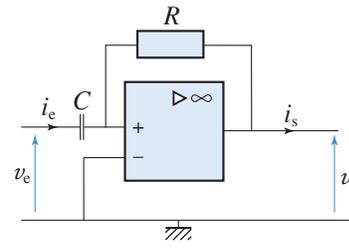
Pour s'entraîner : ex. 11 parties B, C et D

• L'amplificateur opérationnel permet de réaliser, à l'aide de systèmes bouclés variés, des fonctions linéaires autres qu'une simple multiplication par une constante (amplificateur inverseur, ou non, et suiveur). Ces montages permettent, par exemple, de filtrer (voir chapitre suivant), d'intégrer ou de dériver un signal.



Intégrateur

$$v_s(t) = v_s(0) - \frac{1}{RC} \int_0^t v_e(x) dx$$



Dérivateur

$$v_s(t) = -RC \frac{dv_e(t)}{dt}$$

► Pour s'entraîner : ex. 5

Du fait des défauts de l'amplificateur opérationnel, ce montage présente une dérive en sortie (voir *exercice 8*) qui peut être, par exemple, corrigée par une résistance de fuite R' placée en parallèle sur le condensateur, ou par association d'autres montages.

Du fait des défauts de l'amplificateur opérationnel, ce montage peut, lui aussi, présenter des écarts par rapport à la dérivation idéale, que l'on peut corriger.

D'autres fonctions sont réalisées aux exercices 2, 6, 7, 10 et 11.

- En pratique, les entrées non inverseuse (+) et inverseuse (-) ne sont pas équivalentes. La boucle de rétroaction doit revenir sur l'entrée inverseuse pour que le montage soit stable.

◀ Comparateur simple

Un comparateur simple est réalisé à l'aide d'un amplificateur opérationnel en boucle ouverte. La tension de référence V_{ref} est appliquée sur l'une des entrées de l'amplificateur opérationnel et la tension d'entrée v_e sur l'autre.

La tension de sortie est égale à $\pm V_{\text{sat}}$, et ne dépend que du signe de $v_e - V_{\text{ref}}$.

► Pour s'entraîner : ex. 13 partie B

La vitesse finie de balayage σ (ou *slew rate* défini par la valeur maximale de $\left| \frac{dv_s}{dt} \right|$) est le facteur le plus important de limitation des performances d'un comparateur simple à amplificateur opérationnel réel.

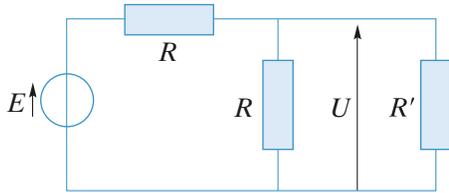
Conseils et pièges à éviter

- Un amplificateur opérationnel ne possède pas de masse ; il est alimenté par une alimentation symétrique $[+V_{\text{ce}}, -V_{\text{ce}}]$, le « zéro » étant la masse du circuit.
- Bien connaître le fonctionnement linéaire et le fonctionnement non linéaire d'un amplificateur opérationnel.
- Bien connaître les montages de bases (amplificateur non inverseur, suiveur, inverseur, intégrateur) : gain, impédances d'entrée et de sortie. Il faut aussi savoir retrouver rapidement ces résultats.

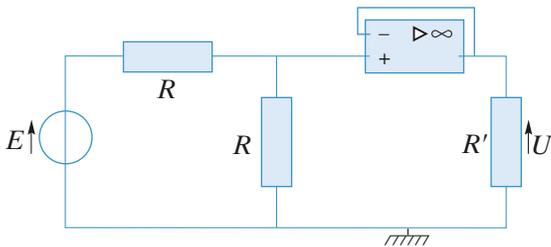
1 Intérêt d'un suiveur

Déterminer la tension U pour les deux montages suivants.

a.



b.



Conclure quant à l'intérêt du suiveur.

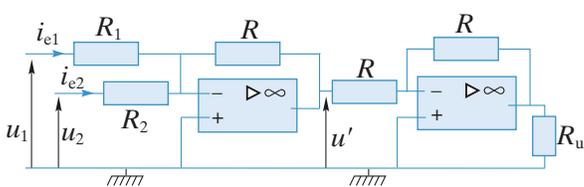
Conseils

Se souvenir du montage « diviseur de tension ».
Quelle est la valeur du courant d'entrée sur la borne de l'amplificateur ?

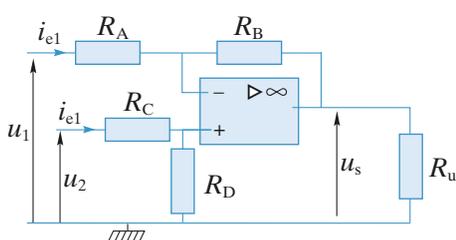
2 Additionneur et soustracteur

1 • Déterminer u_s pour les deux montages suivants en supposant que les amplificateurs sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

a.



b.



2 • Comment faire en sorte que les courants d'entrée soient nuls ?

Conseils

Ces montages sont-ils stables ?

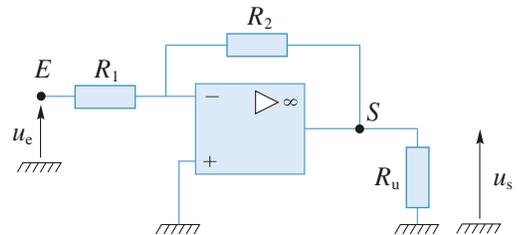
On se souviendra que les courants dans les deux entrées de l'A.O. sont nuls.

En écrivant : $\varepsilon = u_+ - u_- = 0$ et en se souvenant de l'écriture de la loi des nœuds en termes de potentiels (ou de la relation de Millman), on obtient les relations cherchées.

3 Amplificateurs à gain élevé

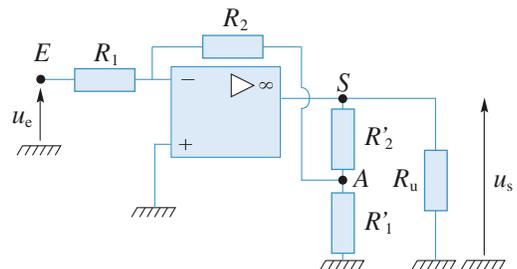
1 • Soit à réaliser, à l'aide d'un seul amplificateur opérationnel, un amplificateur inverseur d'amplification

$$A_u = \frac{u_s}{u_e} = -100 \text{ et de résistance d'entrée } R_e \geq \frac{u_e}{i_e} = 20 \text{ k}\Omega.$$



a. Lors d'un premier essai, on réalise le circuit représenté ci-dessus. Calculer les résistances R_1 et R_2 et expliquer pourquoi cette solution n'est pas satisfaisante.

b. Pour pallier les défauts du circuit précédent, on réalise le circuit ci-dessous en ne prélevant qu'une fraction de la tension de sortie par la boucle de rétroaction.



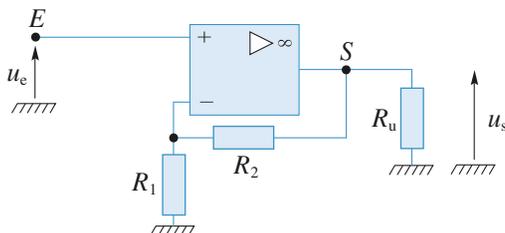
Données : $R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 200 \text{ k}\Omega$ et $R'_2 = 200 \text{ k}\Omega$.

Déterminer R'_1 pour obtenir l'amplification souhaitée. Commenter.

2 • À l'aide d'un seul amplificateur opérationnel, on désire cette fois-ci réaliser un amplificateur non inverseur

d'amplification $A_u = \frac{u_s}{u_e} = 100$, sans que le rapport des résistances utilisées n'excède 20.

a. Le circuit réalisé est représenté ci-dessous. Peut-il satisfaire aux conditions imposées ?



b. Sur le principe du circuit de la question 1) b), donner le schéma d'un amplificateur non inverseur pouvant avoir les performances souhaitées en satisfaisant aux conditions imposées.

3 • Les quatre expressions de l'amplification en tension obtenues sont indépendantes de la résistance de charge R_u . Interpréter cette propriété.

Conseils Appliquer la loi des nœuds à l'entrée inverseuse des A.O. et éventuellement en un autre nœud convenablement choisi.
Se souvenir qu'un générateur idéal de tension possède une résistance interne nulle, ce qui lui permet de délivrer toujours la même tension quelle que soit la charge R_u .

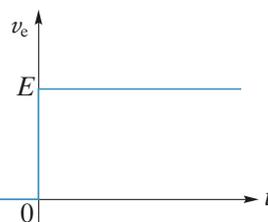
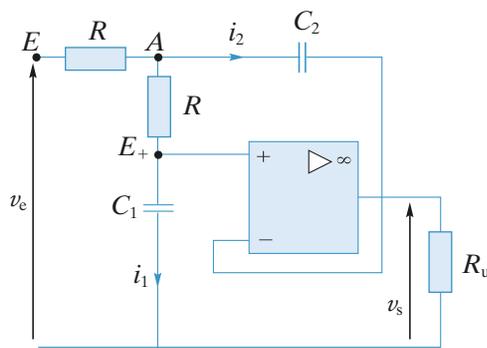
4 Circuit à A.O. soumis à un échelon de tension

On considère le circuit représenté ci-après et réalisé à l'aide d'un A.O. idéal fonctionnant en régime linéaire.

1 • Établir l'équation différentielle liant v_s à v_e . Retrouver indirectement ce résultat en utilisant la notation complexe.

2 • On choisit $C_2 = 2C_1$. On applique au montage un échelon de tension. À l'instant initial, les deux condensateurs sont déchargés. Déterminer l'expression de $v_s(t)$ et représenter son graphe.

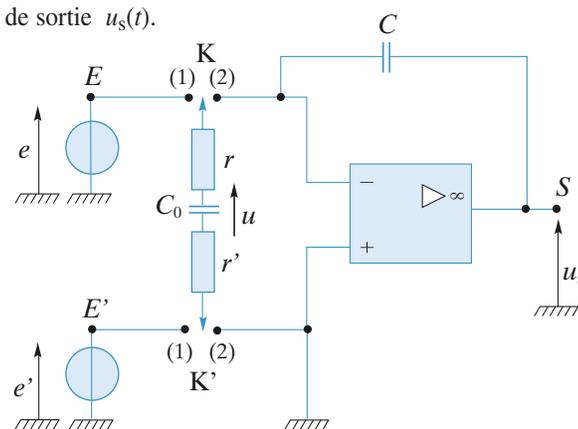
Conseils Utiliser le fait que l'amplificateur opérationnel est parfait et qu'il fonctionne en régime linéaire. Écrire la loi des nœuds en termes de potentiels là où cela est possible, c'est-à-dire ni sur la masse ni sur la sortie de l'amplificateur opérationnel.



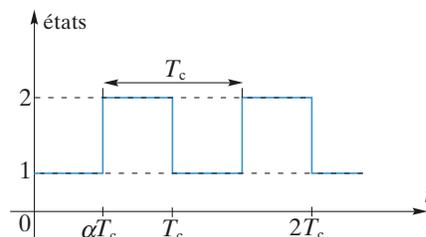
Échelon de tension

5 Intégrateur différentiel à capacité commutée

Le circuit ci-dessous est réalisé avec un amplificateur opérationnel parfait dont on supposera le régime linéaire. Les signaux fournis par les deux sources de f.e.m. e et e' sont appliqués à l'entrée du montage qui délivre la tension de sortie $u_s(t)$.



Les commutateurs K et K' sont synchronisés selon le chronogramme représenté ci-dessous, c'est-à-dire qu'ils sont simultanément dans les états (1) et (2) avec la période T_c .



1 • Le condensateur de capacité C_0 est initialement déchargé ($u(0) = 0$) et on considère d'abord que les f.e.m. e et e' sont constantes.

Dans l'hypothèse $\tau_c = (r + r') C_0 \ll \alpha T_c$, déterminer la valeur moyenne i de l'intensité du courant qui traverse le condensateur C . La période de commutation T_c étant très courte devant le temps de réponse des appareils de mesure, on confondra, pour l'étude de ce circuit, la valeur moyenne i du courant à travers C avec sa valeur instantanée.

En déduire, dans ces conditions, que le circuit est un intégrateur différentiel d'équation :

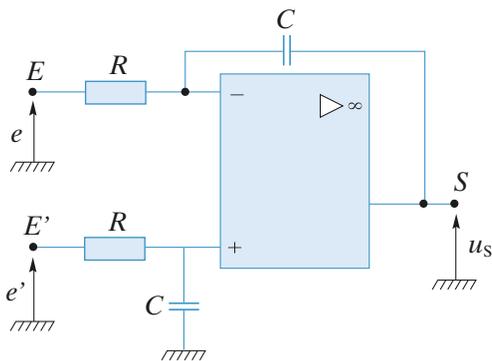
$$\frac{du_s}{dt} = \frac{e' - e}{\tau}$$

dont la constante de temps τ est contrôlable par la fréquence de commutation $f_c = \frac{1}{T_c}$.

Quels types de circuit réalise-t-on respectivement en éteignant d'abord seulement e , puis en éteignant ensuite seulement e' ?

2 • Les f.e.m. $e(t)$ et $e'(t)$ sont maintenant périodiques de période T . À quelle condition sur T les résultats de la question précédente sont-ils conservés ?

3 • On s'intéresse dorénavant au circuit ci-dessous utilisant, lui aussi, un amplificateur opérationnel parfait. Démontrer qu'il réalise un intégrateur différentiel dont on établira l'équation différentielle.



4 • Quel avantage peut-on trouver à utiliser l'intégrateur à capacité commutée ?

Conseils

Le condensateur C_0 acquiert sous $(e - e')$ la charge q , puis se décharge complètement ($u_+ - u_- = 0$) à travers C .

La valeur moyenne du courant i est $\frac{q}{T_c}$.

Quelles sont les grandeurs de commande qui permettent de modifier les constantes de temps des deux intégrations ?

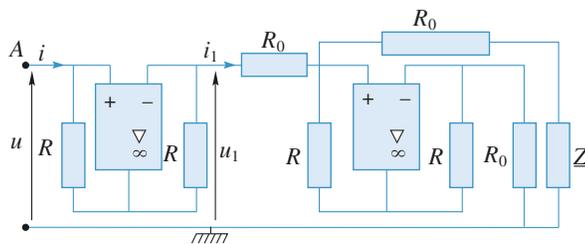
6 Simulation d'une inductance pure

On étudie le montage représenté où les amplificateurs sont idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

1 • Donner la relation entre les courants i et i_1 , puis entre les tensions u et u_1 .

2 • Déterminer l'impédance vue entre la borne A et la masse.

3 • Quelle est la nature du dipôle équivalent si Z est une capacité ?



Conseils

Attention : le courant de sortie d'un A.O. est non nul. On ne peut donc pas écrire $i = i_1$.

L'impédance complexe équivalente est égale au rapport $Z_{\text{éq}} = \frac{u}{i}$.

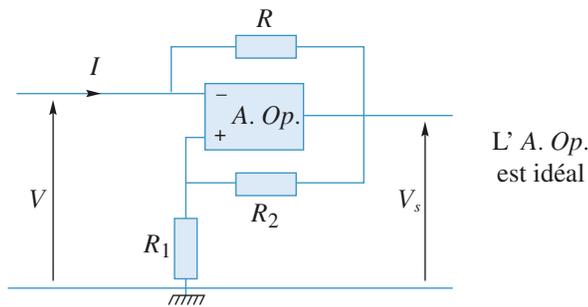
7 Simulation d'une résistance négative (Centrale 2007 extrait)

On utilise le dipôle de la figure 1.

1 • Dans le cas où l'A. Op. fonctionne en régime linéaire, déterminer les relations donnant V en fonction de I , et V_s en fonction de I .

2 • Dans le cas où l'A. Op. fonctionne en régime saturé avec $V_s = +V_{\text{sat}}$, déterminer la relation donnant V en fonction de I . Faire de même si $V_s = -V_{\text{sat}}$.

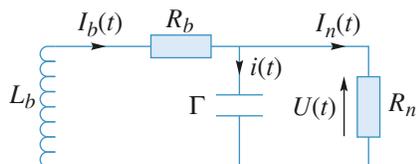
3 • Tracer la caractéristique statique V en fonction de I du dipôle de la figure 1. Montrer que dans un intervalle donné de $V : V \in [-V_0, V_0]$ ce circuit se comporte comme une résistance négative de valeur $-R_n$ (avec $R_n > 0$). Exprimer R_n et V_0 en fonction de R_1, R_2, R et V_{sat} .



L'A. Op. est idéal

Étude de l'oscillateur

4 • Le dipôle à résistance négative est inséré dans le circuit suivant :



a. Montrer que la tension $U(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$a \frac{d^2 U(t)}{dt^2} + b \frac{dU(t)}{dt} + (1 - c) U(t) = 0.$$

On utilisera deux méthodes différentes ; on exprimera a , b et c en fonction de L , Γ , R_b et R_n .

b. Quelles sont les conditions à fixer pour que les solutions soient purement sinusoïdales ?

c. Calculer la fréquence des oscillations en fonction des données ; on veut $f = 50 \text{ kHz}$; Sachant que $R_b = 0,7 \Omega$ et $L_b = 150 \text{ mH}$, calculer L ainsi que le facteur de qualité,

$$Q = \frac{1}{R_b} \sqrt{\frac{L}{\Gamma}},$$

de ce circuit ; vérifier que les conditions du b. sont bien satisfaites en calculant R_n .

Conseils

1) et 2) Se souvenir des différences de propriétés d'un A. Op. idéal en régime linéaire et en régime saturé.

3) Trouver l'intervalle de valeurs de V pour lesquelles le fonctionnement de l'A.O. est linéaire.

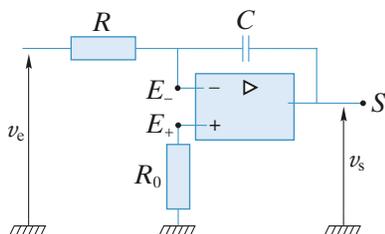
4) a. Faire le calcul direct puis utiliser la notation

complexe avec la correspondance $j\omega \leftrightarrow \frac{d}{dt}$.

4) b. Quelle est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique non amorti ?

8 Dérives d'un intégrateur à amplificateur opérationnel réel

On considère un intégrateur inverseur réalisé avec un amplificateur opérationnel réel dont la modélisation est donnée ci-après (doc. 1 et 2).



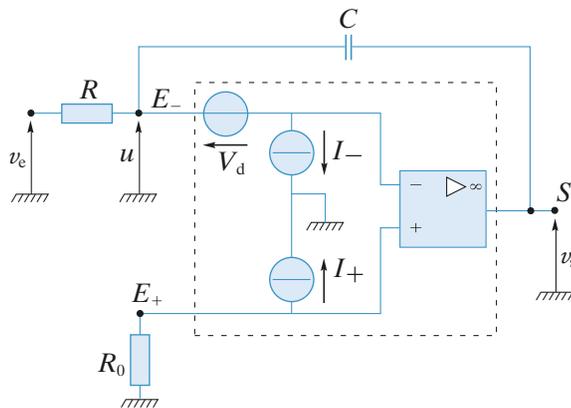
Doc. 1

En fonctionnement linéaire on supposera que $V_+ = V_-$ au niveau de l'A.O. idéal et on admettra que la tension de décalage V_d et les courants d'entrée I_+ et I_- de l'amplificateur opérationnel sont constants.

Par définition, le courant $I_p = \frac{1}{2} (I_+ + I_-)$ est le courant

de polarisation et le courant $I_d = I_+ - I_-$ est le courant de décalage (doc. 2).

Données : $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$ et $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$ et $V_d = 2 \text{ mV}$; $I_p = 80 \text{ nA}$; $I_d = 10 \text{ nA}$.



Doc. 2

1 • Aucun signal n'est appliqué à l'entrée de l'intégrateur ($v_e = 0$) et la tension de sortie $v_s(t)$ est initialement nulle. Montrer qu'en l'absence de R_0 l'amplificateur opérationnel tend vers un état de saturation.

En déduire qu'il est possible, par un choix convenable de la résistance R_0 d'éliminer le terme en I_p , c'est-à-dire de retarder cette saturation sans pour autant l'éviter.

2 • On place maintenant une résistance $R' = R$ en parallèle sur le condensateur C .

Montrer, qu'en l'absence de signal appliqué ($v_e = 0$), la saturation de l'amplificateur opérationnel est évitée mais que la tension de sortie v_s prend, en régime permanent, une valeur v_{slim} faible, mais non nulle.

Déterminer la valeur de R_0 qui annule le terme en I_p dans l'expression de v_{slim} .

Quelle est alors la valeur de v_{slim} ?

3 • En admettant que v_{slim} soit négligeable, on applique à l'entrée de l'intégrateur un signal :

$$v_e(t) = v_{\text{em}} \cos(\omega t).$$

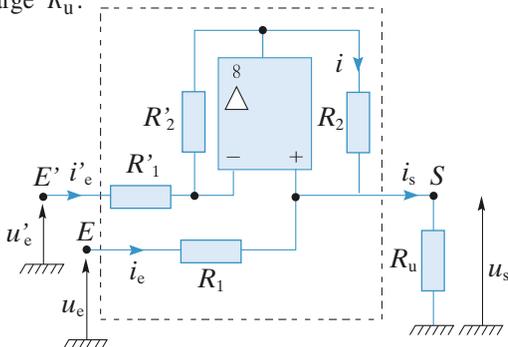
Établir l'expression de la réponse $v_s(t)$ de l'intégrateur. Dans quel domaine de fréquences ce circuit effectue-t-il, en régime établi, une opération d'intégration ?

Conseils

Les résultats demandés s'établissent à l'aide de la loi des nœuds en termes de potentiels.

9 Générateur différentiel de courant

Le circuit ci-dessous, réalisé avec un amplificateur opérationnel idéal, comporte deux entrées E et E' et une sortie S aux bornes de laquelle est placée la résistance de charge R_u .



- 1 • En admettant que l'amplificateur opérationnel fonctionne en régime linéaire, déterminer l'expression du courant i_s en fonction des tensions d'entrées u_e, u_e' et de la tension de sortie u_s .
À quelle condition sur les résistances R_1, R_2, R_1' et R_2' , ce circuit est-il un générateur de courant commandé par la tension différentielle d'entrée ($u_e - u_e'$) ?

- 2 • On note par u_{s0} la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel. Son comportement est décrit par l'équation différentielle $\tau \frac{du_{s0}}{dt} + u_{s0} = \mu_0(u_+ - u_-)$, où τ et μ_0 sont

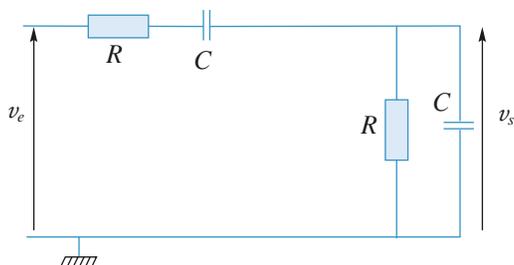
deux constantes caractéristiques. D'autre part, on réalise $R_1 = R_2 = R_1' = R_2' = R$. Démontrer que lorsque les deux générateurs de commande ont des résistances internes de même valeur R_g , ce générateur de courant est stable.

Conseils

Traduire que l'A.O. est idéal et qu'il fonctionne en régime linéaire. Appliquer la loi des nœuds en S de manière à exprimer $i_s = f(u_e, u_e', u_s)$. Le générateur est un générateur de courant si i_s est indépendant du u_s .

10 Oscillateur quasi-sinusoidal

On considère le quadripôle ci-dessous :

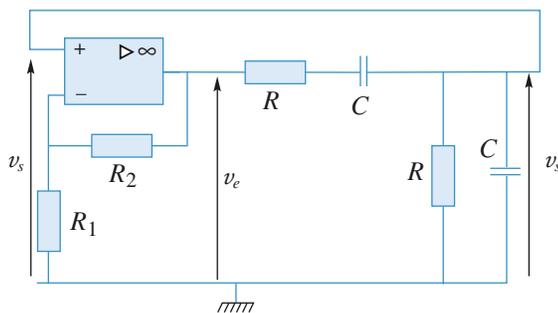


- 1 • Le circuit est attaqué par un signal $v_e(t)$ sinusoïdal. Déterminer en circuit ouvert la fonction $H(jx) = \frac{V_s}{V_e}$ en fonction de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, avec $RC\omega_0 = 1$.

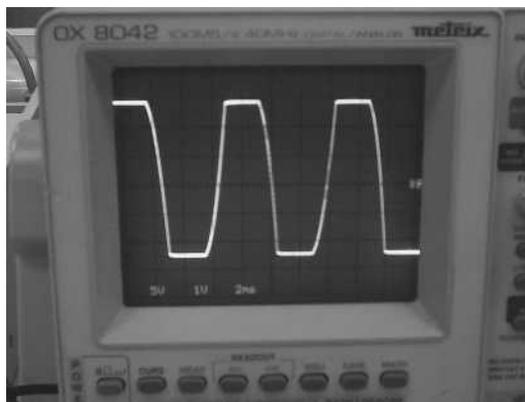
- 2 • Tracer $|H|$ en fonction de x ; vérifier sans calcul les valeurs de $|H|$ lorsque x tend vers 0 et vers l'infini. Quel peut être l'intérêt d'un tel quadripôle ?

- 3 • À partir de l'expression de $H(j\omega)$ déterminer l'équation différentielle reliant $v_s(t)$ et $v_e(t)$.

- 4 • Le quadripôle précédent est maintenant inséré dans le circuit suivant, dans lequel l'A.O. est supposé idéal et fonctionnant en régime linéaire :



- Donner l'équation différentielle d'évolution de $v_s(t)$.
- Montrer que si $R_2 < 2R_1$, $v_s(t)$ tend vers zéro en oscillant.
- Quelle fonction a-t-on réalisée dans le cas $R_2 = 2R_1$? D'où provient l'énergie correspondante ?
- La courbe donnant $v_s(t)$ pour $R_2 = 3R_1$ est donnée ci-dessous ; expliquer qualitativement son allure.

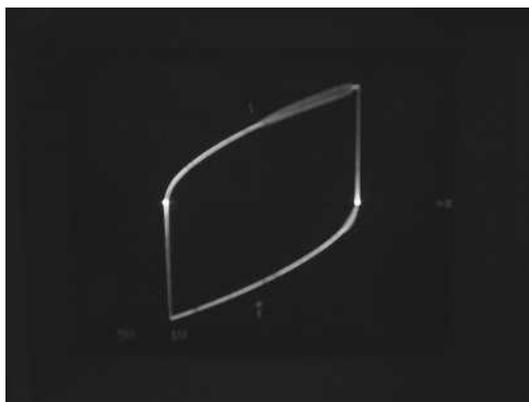


Oscillogramme $v_s(t)$

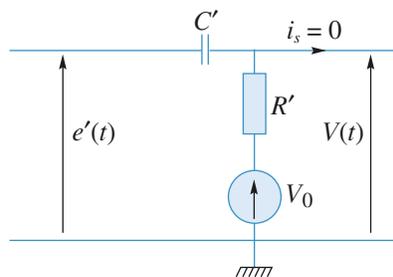
- On souhaite tracer les portraits de phase $\left(v_s(t), \frac{dv_s(t)}{dt}\right)$ dans chacun des cas précédents. Indiquer comment on peut réaliser cette opération expérimentalement. Deux oscillogrammes correspondant aux cas précédemment étudiés sont donnés ci-dessous ; on demande d'identifier ces différents portraits de phase et de les commenter.



Portrait de phase a)



Portrait de phase b)



A.1) Déterminer l'équation différentielle reliant $e'(t)$ et $V(t)$.

On s'intéresse à la réponse à une discontinuité de tension : $e'(t) = +E$ pour $t < 0$, $e'(t) = -E$ pour $t > 0$. On suppose que $E > V_0/2$ et l'on se place en régime permanent pour $t < 0$.

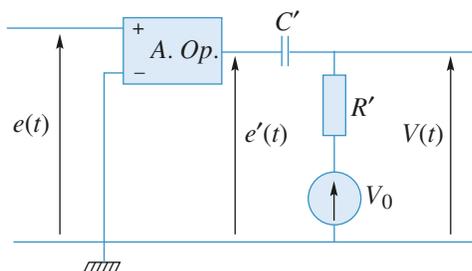
A.2) Que vaut $V(t)$ pour $t > 0$? Que vaut $V(t=0^+)$ (on précisera également son signe)?

A.3) Déterminer pour $t > 0$ l'expression du signal de sortie $V(t)$ de la cellule $R'C'V_0$ attaquée par cette discontinuité de tension.

A.4) Dessiner sur un même graphe les évolutions de $e'(t)$ et $V(t)$.

B – Étude du module d'entrée du fréquencesmètre

On considère le module d'entrée du fréquencesmètre représenté sur la figure. Il est attaqué par un signal sinusoïdal $e(t)$ de fréquence f , avec $f \ll 1/(R'C')$. Par ailleurs, la tension continue du générateur est réglée telle que $0 < V_0 < 2V_{sat}$.



Dessiner sur un même graphe les chronogrammes représentant les évolutions de $e(t)$, $e'(t)$ et $V(t)$ sur une durée supérieure à une période.

C – Étude du module de sortie

On considère le module d'entrée du fréquencesmètre représenté sur la figure.

C.1) L'A. Op. fonctionne-t-il en mode linéaire ou non? Justifier votre réponse.

On suppose qu'à $t = 0$, la charge du condensateur est terminée. On attaque ce module par le signal $U(t)$, représenté sur la figure, de période T , formé d'impulsions rectangulaires alternatives (avec la double inégalité $0 < V_0 < 2V_{sat}$):

Conseils

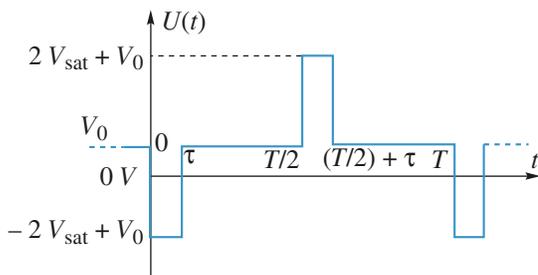
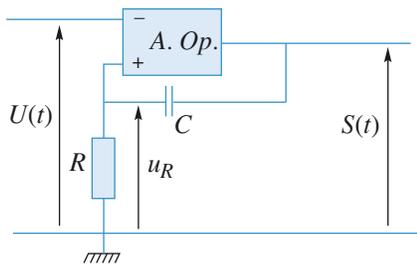
- 1) On peut utiliser la formule des diviseurs de tension ; pourquoi ?
- 2) Comment se comporte un condensateur à très haute fréquence ? à très basse fréquence ?
- 3) À quelle opération mathématique correspond une multiplication par $j\omega$?
- 4) L'équation obtenue est une équation différentielle d'ordre deux ; quels en sont les types de solution ? Les alimentations d'un A.O. ne sont jamais représentées sur un schéma électronique. Comment un A.O. se comporte-t-il lorsque sa sortie évolue de manière monotone ? Que peut-on dire d'un portrait de phase lorsqu'il est fermé ? Lorsqu'il tend vers son attracteur ? Lorsqu'il diverge ?

11 Étude d'un fréquencesmètre (Centrale 2007)

A – Étude d'une cellule $R'C'V_0$

On considère le montage de la figure, où V_0 symbolise un générateur de tension continue. On suppose nul le courant de sortie i_s .

$$\begin{cases} U(t) = -2V_{sat} + V_0 & 0 < t < \tau \\ U(t) = V_0 & \tau < t < T/2 \\ U(t) = 2V_{sat} + V_0 & T/2 < t < T/2 + \tau \\ U(t) = V_0 & T/2 + \tau < t < T \end{cases}$$



On suppose par ailleurs que $\tau \ll RC$.

C.2) Que vaut la tension en sortie $S(t = 0^-)$ juste avant le front descendant de l'entrée $U(t)$?

C.3) Montrer que la sortie de l'A. Op. bascule entre $t = 0^-$ et $t = 0^+$. Que vaut $V^+(t = 0^+)$?

Puisque $\tau \ll RC$, la tension V^+ n'a quasiment pas varié entre les dates $t = 0^+$ et $t = \tau$.

C.4) La sortie de l'A. Op. bascule-t-elle à nouveau entre $t = \tau^-$ et $t = \tau^+$?

C.5) Étape 1 : $0 < t < t_1$ (l'instant t_1 est défini à la question C.5 b)

a. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $V^+(t)$ pour $0 < t < t_1$ et la résoudre.

b. Calculer la date de basculement de la tension $S(t)$, notée t_1 , en fonction de V_{sat} , V_0 , R et C . Préciser la valeur de la tension $V^+(t = t_1^+)$ juste après la date t_1 .

C.6) Étape 2 : $t_1 < t < T$

a. Donner l'expression de $V^+(t)$ dans l'étape 2, définie par $t_1 < t < T/2$.

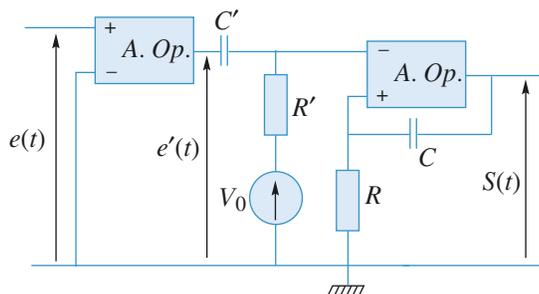
b. L'impulsion rectangulaire positive entre $t = T/2$ et $(T/2) + \tau$ envoyée en entrée fait-elle une nouvelle fois basculer la sortie de l'A. Op. ?

C.7) Établir les trois chronogrammes représentant les trois graphes $V^-(t)$, $V^+(t)$ et $S(t)$ sur une période complète T .

C.8) La forme rectangulaire des impulsions alternatives est-elle déterminante pour le fonctionnement du module de sortie ?

D – Étude du fréquencemètre analogique

On considère le fréquencemètre analogique décrit sur la figure. On envoie en entrée un signal $e(t)$ sinusoïdal de fréquence f : $e(t) = E \cdot \cos(2\pi ft)$.



D.1) À l'aide des résultats de la section B, quelle inégalité doivent vérifier les constantes R, C, R' et C' pour appliquer les résultats de la section C lorsque le module de sortie est relié au module d'entrée du fréquencemètre ?

D.2) Établir sur une période les cinq chronogrammes représentant les signaux $e(t), e'(t), V^-(t), V^+(t)$ (tensions d'entrée du deuxième A. Op.) et $S(t)$ en respectant une même échelle des temps.

On note $\langle S \rangle$ la valeur moyenne de $S(t)$ sur une période.

D.3) Utiliserez-vous, en pratique, un voltmètre AC ou DC pour mesurer $\langle S \rangle$?

D.4) Exprimer simplement $f = 1/T$ en fonction de $\langle S \rangle$,

$$V_{sat} \text{ et } t_1, \text{ défini par } t_1 = RC \ln \left(\frac{2V_{sat}}{V_0} \right).$$

R : En pratique, l'utilisation de ce fréquencemètre nécessite un étalonnage.

Conseils

A. 2) La tension aux bornes de C' est-elle continue ? Que signifie pour C' que le régime est permanent pour $t < 0$?

B. • Quel est le fonctionnement de l'A.O. ?

• Montrer que e' passe par des discontinuités de $+V_{sat}$ à $-V_{sat}$ et de $-V_{sat}$ à $+V_{sat}$ et appliquer la méthode et les résultats de A.

C. • Sur quelle entrée se fait la rétroaction de l'A.O. ?

• Pour étudier les basculements d'un A.O. il faut faire une hypothèse sur son état de sortie et vérifier si le signe de $V_+ - V_-$ est cohérent avec l'hypothèse : par exemple si l'on suppose $S = +V_{sat}$ il faut calculer V_+ et V_- dans cette hypothèse et montrer que $V_+ > V_-$.

D. • Le montage complet résulte de l'association de A, B et C.

• $V(t)$ a la même forme que $U(t)$ et $R'C'$ est donc assimilable à τ .

• Quelle différence y a-t-il entre AC et DC pour un voltmètre ou un oscilloscope ?

1 Intérêt d'un suiveur

Montage a)

Les deux résistances en parallèle sont équivalentes à une

résistance de valeur $\frac{R'R}{R+R'}$.

En appliquant la relation du diviseur de tension, on obtient :

$$U = E \frac{R'}{(R+2R')}$$

Montage b)

Le courant entrant dans l'A.O. étant nul, les deux résistances de gauche sont en série.

En appliquant la relation du diviseur de tension, on obtient :

$$V_+ = E \frac{2}{R+R'}, \text{ soit } V_+ = \frac{E}{2}.$$

La tension ε entre les deux entrées de l'A.O. étant nulle, d'après la loi des mailles :

$$U = V_+ = \frac{E}{2}.$$

Le fait d'intercaler le suiveur entre R et R' permet de rendre U indépendante de R' : quel que soit le circuit d'utilisation, il sera toujours attaqué par $U = \frac{E}{2}$. Dans le cas

du premier circuit, seule la condition $R' \gg R$ garantit $U = \frac{E}{2}$ constant quel que soit le courant dans R' .

2 Additionneur et soustracteur

1 • Pour ces deux montages, les boucles de rétroaction uniques arrivent sur l'entrée inverseuse : ils sont donc stables et on peut effectivement supposer que les A.O. sont en régime linéaire.

a. On reconnaît à droite un montage amplificateur inverseur d'amplification -1 : $u_s = -u'$.

Appliquons la loi des nœuds à l'entrée inverseuse du premier A.O.

• L'amplificateur étant en régime linéaire, on peut écrire :

$$u_- = u_+ = 0.$$

• Comme le courant entrant dans l'A.O. est nul :

$$0 = \frac{u_1 - 0}{R_1} + \frac{u_2 - 0}{R_2} + \frac{u' - 0}{R}.$$

D'où : $u' = -\frac{R}{R_1} u_1 - \frac{R}{R_2} u_2$ et donc : $u_s = \frac{R}{R_1} u_1 + \frac{R}{R_2} u_2$.

On a réalisé un additionneur.

b. Appliquons la loi des nœuds à l'entrée inverseuse :

$$\frac{u_1 - u_-}{R_A} + \frac{u_s - u_-}{R_B} = 0 \text{ d'où : } u_- = \frac{R_B u_1 + R_A u_s}{R_A + R_B}.$$

La relation du diviseur de tension donne :

$$u_+ = \frac{R_D}{R_C + R_D} u_2.$$

Comme l'A.O. est en régime linéaire : $u_+ = u_-$ d'où :

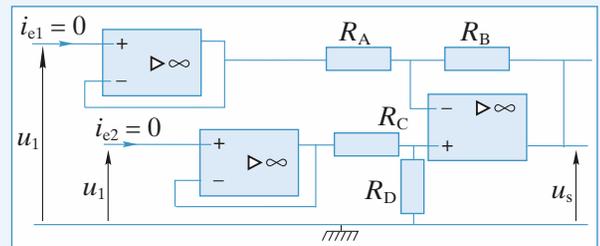
$$u_s = \frac{R_D(R_A + R_B)}{R_A(R_C + R_D)} u_2 - \frac{R_B}{R_A} u_1.$$

On a réalisé un soustracteur.

Remarque : Notons que la tension de sortie est indépendante de la résistance d'utilisation R_u . Cela n'est effectivement vérifié que si la tension de sortie est inférieure à la tension de saturation de l'amplificateur et si le courant sortant de l'A.O. est inférieur au courant maximal que celui-ci peut débiter.

2 • Les courants d'entrée i_{e1} et i_{e2} sont non nuls pour les deux montages.

Pour annuler ces courants tout en gardant les valeurs des tensions u_1 et u_2 il faut placer un suiveur sur chaque entrée. Ainsi, le montage b) devient :



Si les courants d'entrée sont non nuls, les montages étudiés perturbent les sources placées en amont.

Un système idéal avec des entrées en tensions doit donc avoir des courants d'entrée nuls, ou, ce qui est équivalent, des impédances d'entrée infinies.

3 Amplificateurs à gain élevé

1 • a. L'amplification en tension d'un amplificateur inverseur est :

$$A_u = \frac{u_s}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1} = -100.$$

Avec une résistance d'entrée $R_e = R_1 = 20 \text{ k}\Omega$, il vient $R_2 = 2 \text{ M}\Omega$. Une telle valeur, supérieure au mégaohm, est à éviter, car :

- elle accentue les défauts liés aux courants de polarisation (i_b^+ et i_b^-) qui peuvent devenir gênants ;
- elle constitue une source trop importante de bruit, puisqu'une résistance est d'autant plus « bruyante » que sa valeur est plus élevée.

b. La relation de Millman appliquée en A s'écrit :

$$u_A = \frac{\frac{u_s}{R_2'}}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1'} + \frac{1}{R_2'}} = \frac{u_s}{\left(1 + \frac{R_2'}{R_2} + \frac{R_2'}{R_1'}\right)}$$

et la loi des nœuds appliquée à l'entrée inverseuse donne

$\frac{u_e}{R_1} = -\frac{u_A}{R_2}$, ce qui fournit, en éliminant u_A , l'amplification en tension :

$$A_u = \frac{u_s}{u_e} = -\frac{R_2}{R_1} \left(1 + \frac{R_2'}{R_2} + \frac{R_2'}{R_1'}\right).$$

Avec les valeurs imposées, la valeur de R_1' se calcule immédiatement :

$$A_u = -100 = -10 \left(1 + 1 + \frac{200}{R_1'}\right),$$

soit $R_1' = 25 \text{ k}\Omega$.

Le rapport des résistances n'excède pas 10.

Ce circuit fournit une solution correcte du problème, car les résistances ne sont ni trop élevées ($R < 1 \text{ M}\Omega$) ni trop faibles ($R > 100 \Omega$).

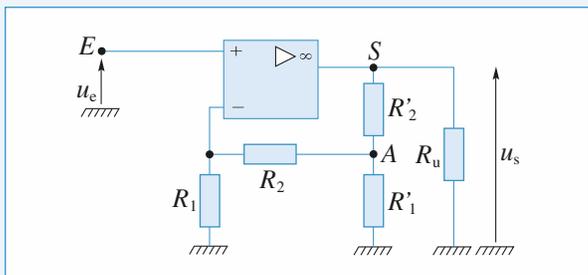
Il est à signaler qu'une résistance R_u de charge de l'amplificateur opérationnel trop faible ($R_u < 750 \Omega$) peut entraîner sa saturation en courant ($I_{\text{sat}} \approx 20 \text{ mA}$).

2 • a. L'amplification en tension d'un amplificateur non inverseur est :

$$A_u = \frac{u_s}{u_e} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = 100.$$

Si le rapport des résistances ne doit pas excéder 20, l'amplification maximale de cet amplificateur est limitée à $A_{u\text{max}} = 21$. Avec les conditions imposées, les performances de ce type d'amplificateur non inverseur sont insuffisantes.

b. Le schéma de l'amplificateur non inverseur demandé est donné ci-dessous.



La loi des nœuds appliquée en A s'écrit :

$$\frac{u_s - u_A}{R_2'} = \frac{u_A}{R_1'} + \frac{u_A}{R_1 + R_2},$$

d'où :

$$u_s = u_A \left(1 + \frac{R_2'}{R_1'} + \frac{R_2'}{R_1 + R_2}\right).$$

Par ailleurs, R_1 et R_2 forment un diviseur de tension, et :

$$u_e = u_- = u_A \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

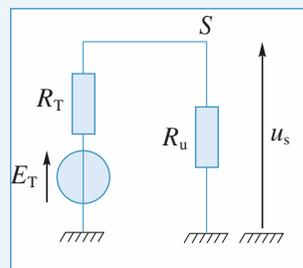
En éliminant u_A entre les deux relations précédentes, il vient :

$$A_u = \frac{u_s}{u_e} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \left(1 + \frac{R_2'}{R_1'} + \frac{R_2'}{R_1 + R_2}\right).$$

On peut, par exemple, choisir $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 90 \text{ k}\Omega$, $R_2' = 100 \text{ k}\Omega$. On calcule alors $R_1' = 12,5 \text{ k}\Omega$.

Le rapport des résistances n'excède pas 10.

3 • Ces quatre amplificateurs sont des sources de tension idéales puisqu'ils délivrent une tension de sortie u_s indépendante de leur charge R_u . Cette propriété est due à leur résistance interne R_s qui est nulle. Pour s'en

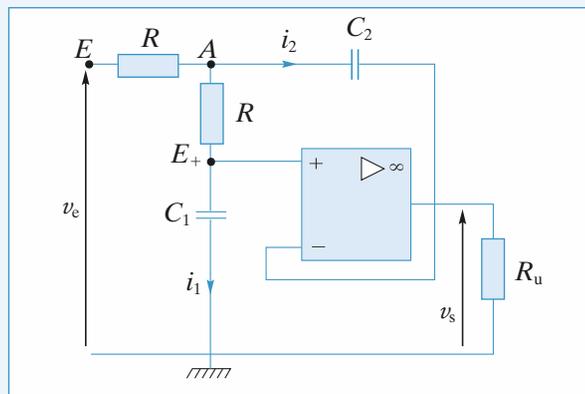


convaincre, il suffit de considérer la modélisation de Thévenin de ces générateurs vus de leurs bornes de sortie. La f.e.m. E_T se trouvant en série avec la résistance de sortie $R_s = R_T$ et avec la résistance de charge R_u , il vient :

$$u_s = \frac{R_u}{R_s + R_u} E_T.$$

Ainsi, la tension de sortie u_s et, par voie de conséquence, l'amplification en tension A_u sont des fonctions de R_u , sauf si $R_s = 0$.

4 Circuit à A.O. soumis à un échelon de tension



1 • L'amplificateur opérationnel est idéal, donc $i_+ = i_- = 0$. Il fonctionne en régime linéaire, donc $v_+ = v_- = v_s$.

$$i_1 = C_1 \frac{dv_s}{dt} \quad \text{et} \quad i_2 = C_2 \frac{d(v_A - v_s)}{dt}.$$

Au nœud A :

$$\frac{v_e - v_A}{R} = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv_s}{dt} + C_2 \frac{d(v_A - v_s)}{dt}. \quad (1)$$

Au nœud E_+ :

$$\frac{v_s - v_A}{R} = -i_1 = -C_1 \frac{dv_s}{dt},$$

d'où :
$$v_A = v_s + RC_1 \frac{dv_s}{dt} \quad (2)$$

En remplaçant dans (1), il vient :

$$v_e - v_s - RC_1 \frac{dv_s}{dt} = RC_1 \frac{dv_s}{dt} + R^2 C_2 C_1 \frac{d^2 v_s}{dt^2}$$

$$R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2RC_1 \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e.$$

Avec la notation complexe :

$$\bullet \frac{v_e - V_A}{R} + jC_2 \omega (v_s - V_A) + \frac{v_+ - v_A}{R} = 0 \quad (1)$$

$$\bullet \frac{V_A - V_+}{R} = \frac{V_+ - 0}{\frac{1}{jC_1 \omega}}, \text{ car } i_+ = 0$$

• $V_+ = V_- = v_s$, A.O. idéal

En éliminant V_A dans (1) grâce à $V_A = v_s(1 + jRC_1 \omega)$

$$\frac{v_e}{R} - \frac{v_s(1 + jRC_1 \omega)}{R} + jC_2 \omega \cdot (-v_s jRC_1 \omega) + jC_1 \omega (-v_s) = 0$$

soit
$$\frac{v_e}{R} = RC_1 C_2 (-\omega^2 v_s) + j\omega v_s (2C_1) + \frac{v_s}{R}$$

et
$$v_e = R^2 C_1 C_2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2RC_1 \frac{dv_s}{dt} + v_s.$$

2 • Avec $C_2 = 2C_1$, l'équation devient :

$$2R^2 C_1^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2RC_1 \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e.$$

On pose $\tau = RC_1$.

$$2\tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_e, \text{ soit, pour } t > 0 :$$

$$2\tau^2 \frac{d^2 v_s}{dt^2} + 2\tau \frac{dv_s}{dt} + v_s = E. \quad (3)$$

L'équation obtenue est du deuxième ordre à coefficients constants.

Remarque : Pour cette équation $\omega_0^2 = \frac{1}{2\tau^2}$ et $Q = \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$; on s'attend donc à trouver une solution oscillante amortie (ou pseudo-périodique).

On cherche des solutions sous la forme e^{rt} . L'équation caractéristique correspondant à l'équation homogène associée est :

$$2\tau^2 r^2 + 2\tau r + 1 = 0$$

$$\Delta' = \tau^2 - 2\tau^2 = -\tau^2.$$

$$r = \frac{-\tau \pm i\tau}{2\tau^2} = \frac{1}{2\tau} (-1 \pm i).$$

L'équation homogène a pour solution :

$$e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A \cos \frac{t}{2\tau} + B \sin \frac{t}{2\tau} \right).$$

Une solution particulière de l'équation complète (3) est $v_s = E$.

La solution générale de l'équation (3) est donc :

$$v_s = E + e^{-\frac{t}{2\tau}} \left(A \cos \frac{t}{2\tau} + B \sin \frac{t}{2\tau} \right). \quad (4)$$

Il reste à déterminer A et B en s'aidant des conditions initiales.

• À $t = 0$, les condensateurs sont déchargés.

La tension aux bornes d'un condensateur est continue.

• À $t = 0^+$, on a :

$$v_s(0^+) = 0 \text{ et } v_A(0^+) = v_s(0^+),$$

donc, d'après (2) $\frac{dv_s}{dt}(0^+) = 0$. De (4), il vient :

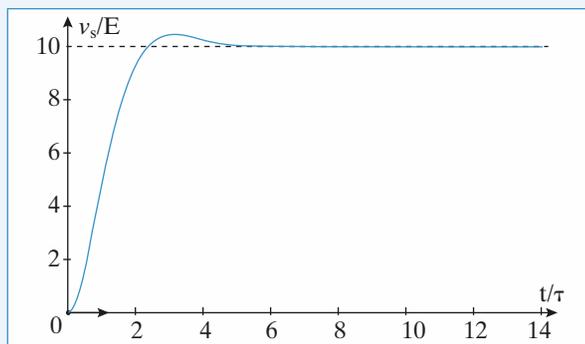
$$v_s(0^+) = 0 \Leftrightarrow E + A = 0$$

$$\frac{dv_s}{dt}(0^+) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\tau} B + \frac{1}{2\tau} A = 0,$$

soit $A = B = -E$.

D'où $v_s = E - Ee^{-\frac{t}{2\tau}} \left(\cos \frac{t}{2\tau} + \sin \frac{t}{2\tau} \right)$, dont l'évolution a

l'allure suivante :



5 Intégrateur différentiel à capacité commutée

1 • Lorsque les commutateurs K et K' sont en position (1), il vient :

$$e - e' = (r + r')C_0 \frac{du}{dt} + u$$

soit encore, en posant $\tau_c = (r + r')C_0$, l'équation différentielle :

$$\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau_c} = \frac{e - e'}{\tau_c}$$

dont la solution est de la forme :

$$u(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau_c}} + (e - e').$$

La constante d'intégration A se détermine à l'aide des conditions initiales $u(0) = 0$, d'où :

$$u(t) = (e - e') \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_c}} \right).$$

À $t = \alpha T_c$, la tension aux bornes de C_0 est :

$$u(\alpha T_c) = (e - e') \left(1 - e^{-\frac{\alpha T_c}{\tau_c}} \right) \approx (e - e'),$$

puisque $\tau_c \ll \alpha T_c$.

Le condensateur C_0 acquiert la charge $q = C_0(e - e')$ à la fin de l'état (1), et restitue cette même charge au cours de l'état (2) pendant lequel l'ensemble (r, r', C_0) est court-circuité ($u_+ - u_- = 0$).

Il en résulte que C est traversé par un courant d'intensité moyenne :

$$i = \frac{q}{T_c} = \frac{C_0}{T_c} (e - e').$$

Ce courant i traverse le condensateur C dont la tension $u_s(t)$ à ses bornes évolue selon la relation :

$$\frac{C_0}{T_c} (e - e') = -C \frac{du_s}{dt},$$

soit encore, en posant $\tau = \frac{C}{C_0} T_c = \frac{C}{C_0} \frac{1}{f_c}$, l'équation différentielle du circuit :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = \frac{e' - e}{\tau}.$$

Le circuit réalisé est un intégrateur différentiel à capacité commutée dont la constante de temps τ est contrôlable par la fréquence de commutation f_c .

• Si on n'éteint que e , il vient :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = \frac{e'}{\tau},$$

le circuit est un intégrateur non inverseur.

• Si maintenant on n'éteint que e' , alors :

$$\frac{du_s(t)}{dt} = -\frac{e}{\tau},$$

le circuit réalise un intégrateur inverseur.

2 • Si les signaux $e(t)$ et $e'(t)$ sont périodiques de période $T \ll T_c$, les calculs précédents restent valables puisque pendant la durée T_c , les variations de $e(t)$ et $e'(t)$ sont négligeables. Ces signaux se comportent vis-à-vis de l'intégrateur, sur une période T_c , comme des signaux constants.

Ainsi, avec des signaux d'entrée périodiques, le circuit se comporte comme un intégrateur différentiel si les deux conditions suivantes :

$$\tau_c \ll \alpha T_c \ll T$$

sont simultanément réalisées. Cette double condition est assez contraignante.

3 • Soit u la tension commune aux deux entrées de l'amplificateur opérationnel. La loi des nœuds appliquée en E_- :

$$\frac{e - u}{R} = C \frac{d(u - u_s)}{dt}$$

et la loi des nœuds appliquée en E_+ :

$$\frac{e' - u}{R} = C \frac{du}{dt}$$

donnent, en soustrayant membre à membre :

$$C \frac{du_s}{dt} = \frac{e' - e}{R},$$

d'où, en posant $\tau' = RC$:

$$\frac{du_s}{dt} = \frac{e - e'}{\tau'}.$$

Ce circuit est aussi un intégrateur différentiel.

4 • La constante de temps τ' de ce dernier intégrateur se règle en modifiant la valeur des deux capacités, alors que pour l'intégrateur à capacité commutée, ce réglage se fait de façon beaucoup plus souple et surtout beaucoup plus précise en modifiant la fréquence de commutation.

6 Simulation d'une inductance pure

1 • Notons u_s le potentiel (par rapport à la masse) de la sortie du premier amplificateur.

L'A.O. étant en régime linéaire : $u_1 = u$.

Les courants entrant dans l'A.O. étant nuls :

$$i = \frac{u - u_s}{R} \quad \text{et} \quad i_1 = \frac{u_s - u_1}{R}.$$

On en déduit : $u = u_1$ et $i = -i_1$.

2 • Notons u_2 le potentiel commun aux deux entrées du second A.O. u_s celui de sa borne de sortie. Écrivons la loi des nœuds en notation complexe aux entrées non inverseuse et inverseuse de cet A.O. :

$$i_1 = \frac{u_2 - u_s}{R} + \frac{u_2}{R_0 + \underline{Z}} \quad \text{et} \quad \frac{u_2 - u_s}{R} + \frac{u_2}{R_0} = 0.$$

On en déduit en éliminant u_s : $u_2 = -\frac{R_0(R_0 + \underline{Z})}{\underline{Z}} i_1$.

De plus : $u = u_1 = u_2 + R_0 i_1 = -\frac{R_0^2}{\underline{Z}} i_1 = \frac{R_0^2}{\underline{Z}} i$.

On en déduit l'impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = \frac{u}{i} = \frac{R_0^2}{\underline{Z}}.$$

3 • Si \underline{Z} est une capacité : $\underline{Z} = \frac{1}{jC\omega}$ et donc :

$$\underline{Z}_{\text{éq}} = jCR_0^2\omega.$$

Ce montage simule donc une inductance pure de valeur $L = CR_0^2$.

Remarque : Il n'est pas possible d'obtenir une inductance pure avec une bobine car celle-ci a nécessairement une résistance. De plus, une bobine est un composant encombrant dont on ne peut négliger les aspects capacitifs à haute fréquence. Il est donc souvent plus intéressant de remplacer une bobine par un circuit actif, peu encombrant et plus proche de l'idéalité.

7 Simulation d'une résistance négative (Centrale 2007 extrait)

1 • Pour un A.O. idéal, $i_+ = i_- = 0$, soit $I = \frac{V - V_s}{R}$.

D'autre part $V_+ = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_s$.

Enfin un régime linéaire $V = V_+$.

D'où $V_s = -RI \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)$ (1)

et $V = -RI \cdot \frac{R_1}{R_2}$ (2)

2 • Si $V_s = +V_{sat}$, $V = RI + V_{sat}$

• Si $V_s = -V_{sat}$, $V = RI - V_{sat}$

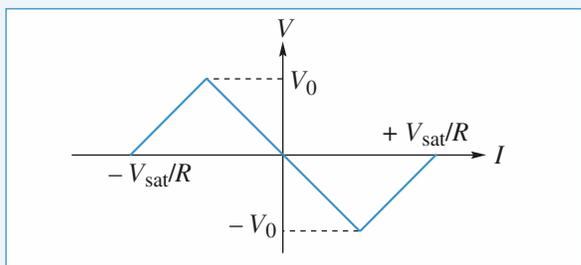
3 • Le fonctionnement est linéaire si

$V_s \in [-V_{sat}, V_{sat}]$, ce qui avec (1) donne

$$I \in \left[\frac{-R_2 V_{sat}}{R(R_1 + R_2)}, \frac{R_2 V_{sat}}{R(R_1 + R_2)} \right]$$

et avec (2) $V \in \left[-\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}, +\frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat} \right]$ (2)

D'où avec $V_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{sat}$:



Dans la partie $V \in [-V_0, V_0]$, $V = -R \frac{R_1}{R_2} I$,

d'où le résultat avec $R_n = R \frac{R_1}{R_2}$.

4 • a. • Méthode directe

$$U(t) = -R_n I_n(t) = -R_b I_b(t) - L_b \frac{dI_b(t)}{dt}$$

et $i(t) = \Gamma \frac{dU(t)}{dt}$. En utilisant $I_b = i + I_n = \Gamma \frac{dU}{dt} - \frac{U}{R_n}$ et

$$U = -R_b I_b - L_b \frac{dI_b}{dt}, \text{ il vient}$$

$$L\Gamma \frac{d^2U}{dt^2} + \left(R_b\Gamma - \frac{L}{R_n} \right) \frac{dU}{dt} + \left(1 - \frac{R_b}{R_n} \right) U = 0$$

soit $a = L\Gamma$

$$b = R_b\Gamma - \frac{L}{R_n}$$

$$c = \frac{R_b}{R_n}$$

• Utilisation de la formulation complexe

$$(jL_b\omega + R_b) I_b + \underline{U} = 0, \quad \underline{U} = \frac{\dot{i}}{j\Gamma\omega},$$

$$\underline{U} = -R_n I_n \text{ et } I_b = \dot{i} + \underline{I}_n, \text{ soit :}$$

$$-\frac{\underline{U}}{R_b + jL_b\omega} = \underline{U}j\Gamma\omega - \frac{\underline{U}}{R_n},$$

$$-\underline{U} = -\omega^2 \underline{U} \Gamma L_b + j\omega \left[R_b\Gamma - \frac{L_b}{R_n} \right] \underline{U} - \underline{U} \frac{R_b}{R_n}.$$

Toute multiplication par $j\omega$ est une dérivation temporelle d'où :

$$-U(t) = \Gamma L_b \frac{d^2U(t)}{dt^2} + \left[R_b\Gamma - \frac{L_b}{R_n} \right] \frac{dU(t)}{dt} - \frac{R_b}{R_n} U(t).$$

On obtient bien sûr la même équation différentielle.

b. Les solutions sont purement sinusoïdales si $b = 0$, soit

$$R_b\Gamma = \frac{L_b}{R_n} \text{ et si } 1 - c > 0; \text{ on a alors une équation différentielle d'oscillateur harmonique :}$$

tielle d'oscillateur harmonique :

$$\frac{d^2U}{dt^2} = \frac{1 - \frac{R_b}{R_n}}{L_b\Gamma} U = 0$$

avec $R_b\Gamma = \frac{L_b}{R_n}$, soit $R_n = \frac{L_b}{\Gamma R_b}$ et donc

$$1 - \frac{R_b}{R_n} = \frac{1 - \frac{\Gamma R_b^2}{L_b}}{L_b\Gamma}, \text{ soit :}$$

$$c. f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \frac{\Gamma R_b^2}{L_b}}{L_b\Gamma}}; \Gamma = \frac{1}{\frac{R_b^2}{L_b} + 4\pi^2 f^2 L_b}$$

A.N. : $\Gamma = 68 \text{ nF}$

$$Q = 67$$

On calcule $R_n = 3,15 \text{ k}\Omega$, on a bien $\frac{R_b}{R_n} < 1$.

8 Dérives d'un intégrateur à amplificateur opérationnel réel

1 • On impose $v_e = 0$; la loi des nœuds appliquée en E_-

s'écrit : $C \frac{d(v_s - u)}{dt} = \frac{u}{R} + I_+$, avec u tension constante

valant $u = V_d - R_0 I_+$.

En éliminant u , il vient :

$$RC \frac{dv_s}{dt} = V_d - R_0 I_+ + R I_+,$$

d'où, par intégration et en posant $\tau = RC$:

$$v_s(t) = \frac{V_d - R_0 I_+ + R I_+}{\tau} t = \frac{1}{\tau} \left[V_d + (R - R_0) I_p - (R + R_0) \frac{I_d}{2} \right] t.$$

• En l'absence de R_0 , la tension $v_s(t)$ est une fonction affine du temps et l'amplificateur opérationnel sature, soit positivement, soit négativement selon les valeurs des défauts et de la résistance R utilisée.

• Avec R_0 on peut annuler le second membre et pour cela prendre R_0 tel que :

$$R_0 = \frac{V_d + RI_-}{I_+}$$

Il n'en est rien. En effet V_d et I_d varient fortement en fonction de l'A.O. et de la température et ce de manière aléatoire ; la correction ne serait valable que pour une température et un A.O. donnés.

En revanche, il est possible d'éliminer l'influence du courant de polarisation I_p en choisissant $R_0 = R$. La saturation est généralement retardée mais elle est inévitable.

2 • La loi des nœuds appliquée en E_- s'écrit :

$$C \frac{d(v_s - u)}{dt} + \frac{v_s - u}{R'} = \frac{u}{R} + I_-,$$

avec $u = V_d - R_0 I_+$. En éliminant u , il vient :

$$R'C \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{R + R'}{R} (V_d - R_0 I_+) + R' I_-.$$

On pose $\tau' = R'C$ et $v_{slim} = \frac{R + R'}{R} (V_d - R_0 I_+) + R' I_-$,

l'équation différentielle précédente s'écrit :

$$\tau' \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_{slim}$$

et sa solution est $v_s(t) = v_{slim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau'}} \right)$.

En régime établi, la tension de sortie vaut v_{slim} ($|v_{slim}| < V_{sat}$) ce qui évite la saturation. Il est possible d'exprimer v_{slim} en fonction de V_d , I_p et de I_d :

$$v_{slim} = \frac{R + R'}{R} V_d + \left(R' - \frac{R_0(R + R')}{R} \right) I_p - \left(R' + \frac{R_0(R + R')}{R} \right) \frac{I_d}{2}.$$

Comme il a été vu dans la question 1), tout ce qu'il est possible d'entreprendre avec certitude est l'élimination du terme en I_p en choisissant la résistance R_0 telle que :

$$R_0 = \frac{RR'}{R + R'} = 5 \text{ k}\Omega.$$

Il vient alors :

$$v_{slim} = \frac{R + R'}{R} V_d - R' I_d \approx 4 \text{ mV},$$

ce qui est une tension très faible par rapport à V_{sat} .

La saturation de l'amplificateur opérationnel est évitée, mais le défaut ($v_s \neq 0$ en l'absence de signal d'entrée) n'est pas totalement corrigé.

3 • L'expression de u restant la même $u = V_d - R_0 I_+$, on applique encore une fois la loi des nœuds en E_- :

$$C \frac{d(v_s - u)}{dt} + \frac{v_s - u}{R'} = \frac{u - v_e}{R} + I_-.$$

L'élimination de u conduit à :

$$R'C \frac{dv_s}{dt} + v_s = \frac{R + R'}{R} (V_d - R_0 I_+) + R' I_- - \frac{R'}{R} v_e$$

soit encore, en introduisant τ' et v_{slim} tels qu'ils ont été définis plus haut :

$$\tau' \frac{dv_s}{dt} + v_s = v_{slim} - \frac{R'}{R} v_e.$$

En prenant $R_0 = \frac{RR'}{R + R'}$, le terme en v_{slim} peut être négligé devant le terme en $v_e(t)$:

$$\tau' \frac{dv_s}{dt} + v_s = -\frac{R'}{R} v_{em} \cos(\omega t).$$

La solution de cette équation différentielle est de la forme :

$$v_s(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau'}} + v_{sm} \cos(\omega t + \varphi)$$

avec, pour la solution particulière, v_{sm} et φ déduits de

$$v_{sm} = -\frac{R'}{R} \frac{v_{em}}{1 + j\omega\tau'}$$
 à savoir :

$$v_{sm} = \frac{R'}{R} \frac{v_{em}}{\sqrt{1 + (\omega\tau')^2}}$$

et :

$$\varphi = \pi - \arctan(\omega\tau').$$

Le terme $Ae^{-\frac{t}{\tau'}}$ est transitoire. En régime établi, le circuit intègre si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire lorsque $\omega\tau' \gg 1$. En pratique, il en sera ainsi dès que $\omega \geq 10 \frac{1}{\tau'}$.

9 Générateur différentiel de courant

L'A.O. est idéal : $i_+ = i_- = 0$.

1 • En régime linéaire $u_+ = u_-$ et par suite $R_2 i = -R_2' i_e'$,

d'où :

$$i = \frac{-R_2'}{R_2} i_e'.$$

La loi des nœuds appliquée en S s'écrit :

$$i_s = i + i_e = -\frac{R_2'}{R_2} i_e' + i_e = -\frac{R_2'}{R_2} \frac{u_e' - u_s}{R_1'} + \frac{u_e - u_s}{R_1}$$

d'où en regroupant les termes en u_s :

$$i_s = \frac{1}{R_1} u_e - \frac{R_2'}{R_1' R_2} u_e' + \left(\frac{R_2'}{R_1' R_2} - \frac{1}{R_1} \right) u_s.$$

Ce circuit se comporte en générateur de courant si i_s est indépendant de u_s , c'est-à-dire, en définitive, si i_s est indé-

pendant de u_s . Ceci entraîne la condition $\frac{R_2'}{R_1' R_2} = \frac{1}{R_1}$ ou

encore, de façon plus symétrique :

$$\frac{R_1}{R_1'} = \frac{R_2}{R_2'}.$$

La condition précédente étant réalisée, l'expression du courant i_s s'écrit :

$$i_s = \frac{u_e - u_e'}{R_1}.$$

Le circuit est alors un générateur de courant commandé par la tension différentielle ($u_c - u'_c$).

2 • Pour étudier la stabilité du circuit, on éteint les f.e.m. des générateurs de commande et on suppose qu'à l'instant initial l'amplificateur opérationnel est en régime linéaire.

Les tensions des entrées inverseuse et non inverseuse (schéma ci-dessous) s'établissent respectivement à :

$$u_- = \frac{R + R_g}{R + R_g + R} u_{s0} = k_- u_{s0}$$

et
$$u_+ = \frac{(R + R_g) // R_u}{(R + R_g) // R_u + R} u_{s0} = k_+ u_{s0}$$

avec :

$$\frac{1}{k_+} = 1 + R \left(\frac{1}{R_u} + \frac{1}{R + R_g} \right) > 1 + R \frac{1}{R + R_g} = \frac{1}{k_-},$$

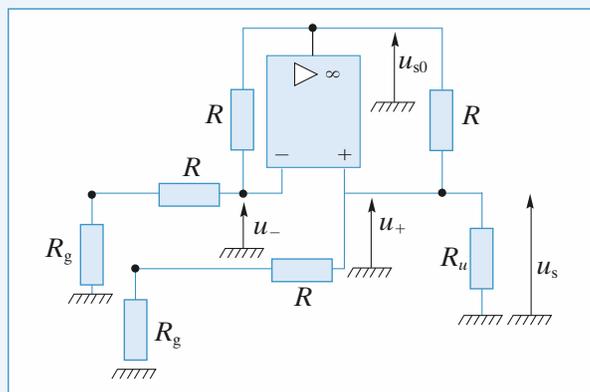
donc $k_+ < k_-$.

L'équation différentielle de la tension de sortie de l'A.O. s'écrit alors :

$$\tau \frac{du_{s0}}{dt} + u_{s0} = \mu_0 (k_+ - k_-) u_{s0},$$

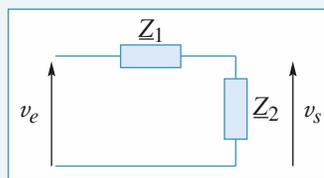
soit encore
$$\tau \frac{du_{s0}}{dt} + [1 + \mu_0 (k_- - k_+)] u_{s0} = 0.$$

Le coefficient de $u_{s0}(t)$ étant positif, la solution de cette équation différentielle est bornée, donc le circuit est stable.



10 Oscillateur quasi-sinusoidal

1 • Le circuit est équivalent en circuit ouvert à :



avec
$$\begin{cases} Z_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \\ Z_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} \end{cases}$$

Donc
$$v_s = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} v_e$$

et
$$H = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega}}$$

$$H = \frac{1}{3 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

ou encore
$$H = \frac{jx}{1 + 3jx - x^2}$$

2 • $|H| = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 + x^4}}$; le tracé est en Figure 1.

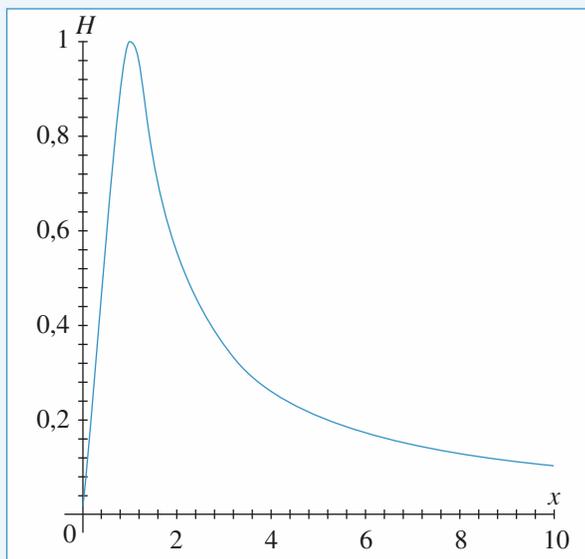


Figure 1

• Lorsque $x \rightarrow 0$, la fréquence tend vers zéro et les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts ; il n'y a donc pas de courants dans les résistances et $v_s = 0$.

Lorsque $x \rightarrow \infty$, la fréquence tend vers l'infini et les condensateurs se comportent comme des fils, $v_s = 0$.

• Lorsque $x \rightarrow 1$, soit $\omega \rightarrow \omega_0$, $v_s = v_e$, sinon v_s décroît rapidement ; ce filtre est donc passe-bande.

3 •
$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + 3j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$
, soit

$$v_s \left(1 + 3j \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) = j \frac{\omega}{\omega_0} v_e.$$

Toute multiplication par $j\omega$ correspond à une dérivée temporelle, soit :

$$v_s(t) + \frac{3}{\omega_0} \frac{dv_s}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 v_s(t)}{dt^2} = \frac{1}{\omega_0} \frac{dv_e}{dt}$$

ou encore

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = \omega_0 \frac{dv_e}{dt} \quad (1)$$

4 • • L'A.O. est idéal : $i_+ = i_- = 0$ et il fonctionne un régime linéaire : $v_+ = v_-$.

Ainsi $v_s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_e$, d'où en utilisant (1) :

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \omega_0 \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0$$

• Si $R_2 < 2R_1$, $\omega_0 \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right) > 0$; le discriminant de

l'équation caractéristique vaut $\omega_0^2 \left(2 - \frac{R_2}{R_1} \right)^2 - 4\omega_0^2$, soit

$$\Delta = \omega_0^2 \frac{R_2}{R_1} \left(\frac{R_2}{R_1} - 4 \right). \Delta < 0 \text{ car } \frac{R_2}{R_1} < 2 ; \text{ les solutions}$$

sont de la forme $v_s(t) = [A \cos \Omega t + B \sin \Omega t] e^{-\alpha t}$

avec $\alpha = \omega_0 \left(1 - \frac{R_2}{2R_1} \right) > 0$; l'exponentielle est décroissante et $v_s(t) \rightarrow 0$ en oscillant.

• Si $R_2 = 2R_1$,

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + \omega_0^2 v_s = 0 : \text{ il s'agit de l'équation différentielle}$$

d'un oscillateur harmonique ; le circuit réalise donc un oscillateur électrique sinusoïdal de fréquence $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$.

L'énergie nécessaire à son fonctionnement provient des alimentations (± 15 V en général) continues de l'A.O.

• Si $R_2 > 2R_1$, le coefficient du terme $\frac{dv_s}{dt}$ est négatif

donc l'exponentielle sera croissante et la sortie de l'A.O. atteindra la valeur $+V_{\text{sat}}$ (ou $-V_{\text{sat}}$) rapidement, soit $v_e = \pm V_{\text{sat}}$, donc $v_s(t)$ vérifiera (1) avec $\frac{dv_e}{dt} = 0$:

$$\frac{d^2 v_s}{dt^2} + 3\omega_0 \frac{dv_s}{dt} + \omega_0^2 v_s = 0. |v_s| \text{ sera donc décrois-}$$

sante : l'A.O. repassera de nouveau en régime linéaire, puis saturera de nouveau et ainsi de suite. C'est ce que l'on observe sur l'oscillogramme.

• Tracer un portrait de phase revient à tracer $\frac{dv_s(t)}{dt}$ en

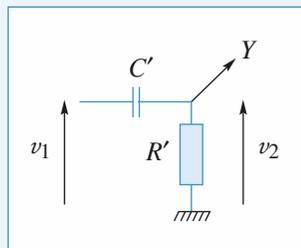
fonction de $v_s(t)$.

Il faut donc réaliser une dérivation de $v_s(t)$, puis « amener »

$\frac{dv_s}{dt}$ et v_s sur chaque voie d'un oscilloscope et observer

en XY.

Soit le circuit :



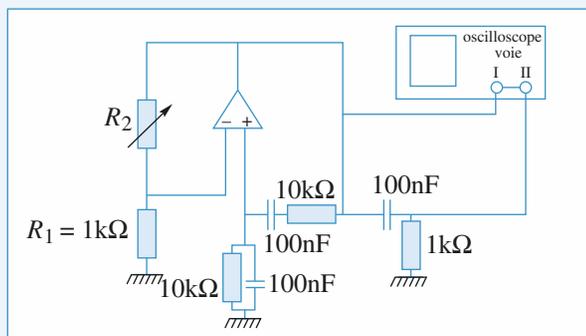
Le courant entrant en Y est très faible puisque l'impédance d'entrée d'un oscilloscope est très grande : ainsi,

$$v_2 = \frac{R'}{R' + \frac{1}{jC'\omega}} v_1$$

$$\text{soit } v_2 = \frac{jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega} v_1 ; \text{ si } R'C'\omega \ll 1,$$

$$v_2 \approx jR'C'\omega v_1 \text{ et } v_2(t) = R'C' \frac{dv_1}{dt}$$

La figure ci-dessous donne le schéma du montage réalisable expérimentalement : on visualise $\left(\frac{dv_e}{dt}, v_e \right)$ mais v_e et v_s sont proportionnels donc l'allure est la même.



• Les deux photos correspondent au montage de la figure.

→ En a on voit une ellipse correspondant au cas $R_2 = 2R_1$.

→ En b la trajectoire de phase est fermée, le fonctionnement est cyclique. Les segments de droite correspondent aux passages par les saturations $+V_{\text{sat}}$ et $-V_{\text{sat}}$; $R_2 > 2R_1$.

R : Le cas $R_2 < 2R_1$ peut être filmé : on voit l'ellipse diminuer lorsque t augmente jusqu'à ce qu'elle soit réduite à un point ; la trajectoire de phase tend vers son attracteur $(0, 0)$.

11 Étude d'un fréquencemètre (Centrale 2007)

A 1 • $i_s = 0$: le même courant i circule dans C' et R' :

$$R'C' \frac{d(e' - V)}{dt} + V_0 = V, \text{ soit}$$

$$\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R'C'} = \frac{de'}{dt} + \frac{V_0}{R'C'} \quad (1)$$

2 • Pour $t < 0$, $e' = +E$ est constant et V_0 est constant, donc C' se charge et lorsqu'il est chargé il n'y a plus de courant dans la branche donc $V(t) = V_0$ car $U_R' = 0$ (l'énoncé précise bien que l'on suppose le régime permanent pour $t < 0$).

• La tension aux bornes de C' est continue pour $t = 0$ notamment donc $V_c'(0^+) = V_c'(0^-)$.

Or $V_c'(0^-) = +E V_0$,

donc pour $t = 0^+ - E - V(0^+) = -V_0 + E$

d'où $V(0^+) = V_0 - 2E$; enfin $E > \frac{V_0}{2}$

donc $V(0^+) < 0$.

3 • Pour $t > 0$, $e' = -E$, $\frac{de'}{dt} = 0$; en tenant compte de **2**,

l'équation (1) s'intègre en :

$$V(t) = V_0 - 2E e^{-t/\tau'}, \text{ avec } \tau' = R'C'.$$

B • L'A.O. fonctionne en comparateur simple avec :

$V_- = 0$, donc si :

• $e(t) = V_+ > 0$, $e'(t) = +E = V_{\text{sat}}$

• $e(t) = V_+ < 0$, $e'(t) = -E = -V_{\text{sat}}$

Donc le module de la question **A** est attaqué par une discontinuité $V_{\text{sat}} \rightarrow -V_{\text{sat}}$ ou $-V_{\text{sat}} \rightarrow +V_{\text{sat}}$

• Comme $f \ll \frac{1}{R'C'}$, le signal $e(t)$ a une période grande

devant les temps de charge du condensateur : entre chaque basculement on atteint le régime permanent de charge complète du condensateur.

• Pour une bascule $+V_{\text{sat}} \rightarrow -V_{\text{sat}}$, avec **A 3** nous pouvons affirmer :

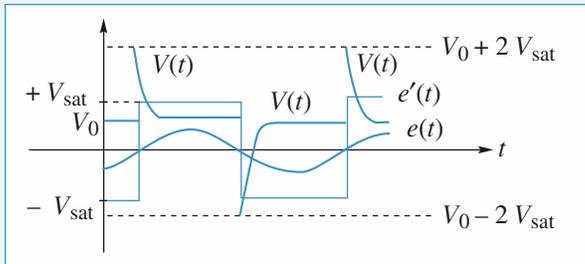
$$V(t) = V_0 - 2V_{\text{sat}} e^{-t/\tau'}$$

• Pour une bascule $-V_{\text{sat}} \rightarrow +V_{\text{sat}}$

V_c' est continu lors de la bascule et vaut

V_c' (bascule) $= -V_{\text{sat}} - V_0$, d'où $V(t)$ juste après la bascule : $V = 2V_{\text{sat}} + V_0$. Donc $V(t) = V_0 + 2V_{\text{sat}} e^{-t/\tau'}$.

On obtient finalement les chronogrammes :



C 1 • La rétroaction se fait sur l'entrée + de l'A.O., il ne fonctionne donc pas en régime linéaire. Par contre l'A.O. étant idéal on a $i_+ = i_- = 0$ et le même courant circule dans R et dans C .

2 • D'après l'énoncé la charge de C est terminée à $t = 0$ donc $i_R = 0$ et $V_+ = u_R = 0$.

De plus la fonction $U(t)$ est périodique donc elle vaut V_0 en $t = 0^-$; ainsi :

$V_+(0^-) = 0$, $V_-(0^-) = V_0 > 0$ et donc $S(0^-) = -V_{\text{sat}}$.

3 • À $t = 0$, U bascule de V_0 à $-2V_{\text{sat}} + V_0$, donc $V_-(0^+) = -2V_{\text{sat}} + V_0 < 0$.

D'autre part, $u_c = u_R - S$ est continue donc comme

$u_c(0^-) = 0 - (-V_{\text{sat}})$, $u_c(0^+) = V_{\text{sat}}$.

Supposons que l'A.O. bascule, alors $S(0^+) = +V_{\text{sat}}$ et $u_R(0^+) = V_+(0^+) = 2V_{\text{sat}} > V_-(0^+)$ ce qui est cohérent.

Supposons que l'A.O. ne bascule pas : $S(0^+) = -V_{\text{sat}}$, $u_R(0^+) = V_+(0^+) = 0 > V(0^+)$, ce qui est incohérent avec $S = -V_{\text{sat}}$.

Ainsi l'A.O. bascule et $V_+(t = 0^+) = 2V_{\text{sat}}$.

4 • Si $\tau \ll RC$, $V^+(\tau^-) \approx V_+(0^+) = 2V_{\text{sat}}$.

Ainsi comme u_c est continue,

$u_c(\tau^+) = u_c(\tau^-) = 2V_{\text{sat}} - V_{\text{sat}} = V_{\text{sat}}$.

Si l'A.O. ne bascule pas $S(\tau^+) = V_{\text{sat}}$

et $V^+(\tau^+) = 2V_{\text{sat}} > V^-(\tau^+) = V_0$ ce qui est cohérent : l'A.O. reste à saturation haute.

5 • a. $i_+ = 0$, donc $C \frac{d(V_+ - S)}{dt} = \frac{V_+}{R}$

soit $\frac{dV^+}{dt} + \frac{1}{RC} V_+ = \frac{dS}{dt}$. D'après la définition de t_1 ,

$S(t)$ est constant sur $[0, t_1]$.

Ainsi $\frac{dV^+}{dt} + \frac{V_+}{RC} = 0$ s'intègre en $V_+ = 2V_{\text{sat}} e^{-t/RC}$

car $V_+(0^+) = 2V_{\text{sat}}$.

b. L'A.O. bascule lorsque V_+ atteint la valeur $V_- = V_0$

soit $t_1 = RC \ln\left(\frac{2V_{\text{sat}}}{V_0}\right)$.

• $S(t_1^+) = -V_{\text{sat}}$ et la tension aux bornes de C est continue, soit :

$$V_0 - V_{\text{sat}} = V_+(t_1^+) - (-V_{\text{sat}})$$

$$V_+(t_1^+) = V_0 - 2V_{\text{sat}}$$

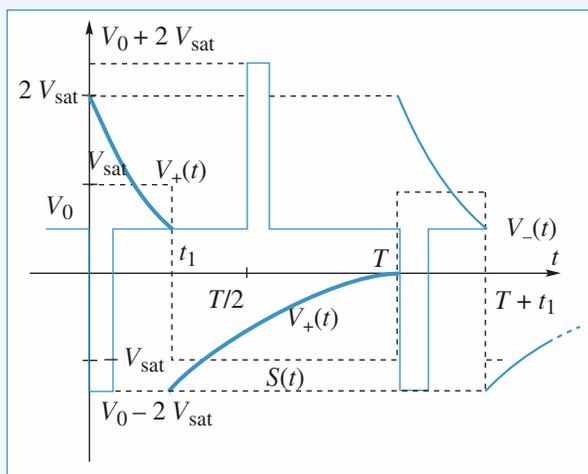
6 • a. C'est la même équation différentielle ; avec un décalage d'origine des temps et compte tenu de **5 b** :

$$V_+(t) = (V_0 - 2V_{\text{sat}}) e^{-\frac{(t-t_1)}{RC}}$$

b. Non car $V_+ < 0$ d'après **a** (et $V_0 - 2V_{\text{sat}} < 0$) et

$V_- = 2V_{\text{sat}} + V_0 > 0$ donc l'A.O. reste en sortie à $-V_{\text{sat}}$.

7 • .



D 1 • La deuxième A.O. est attaquée par $V(t)$ de la question **B 3** dont la forme est la même que celle de $U(t)$ à condition que $R'C' \approx \tau$. Il faut donc $R'C' \ll CR$.

D'autre part il faut que la charge du condensateur C soit terminée en 0 , T , $2T$, etc. ; donc on doit avoir $T \gg RC$; finalement

$$R'C' \ll RC \ll \frac{1}{f}.$$

2 • Il faut utiliser un voltmètre *DC* puisque $\langle S \rangle$ est la composante continue de $S(t)$ et que la fonction *AC* « coupe » les parties continues des signaux.

3 • $S(t)$ vaut $-V_{\text{sat}}$ sur $[t_1, T]$
 $+V_{\text{sat}}$ sur $[0, t_1]$

$$\text{donc } \langle S \rangle = \frac{1}{T} (V_{\text{sat}} t_1 + (-V_{\text{sat}}) (T - t_1))$$

$$\text{d'où } f = \frac{1}{2t_1} \left(1 + \frac{\langle S \rangle}{V_{\text{sat}}} \right).$$

Après étalonnage ce dispositif peut être utilisé comme fréquencemètre.

LES OBJECTIFS

- Notion de filtrage.
- Tracés de diagramme de Bode en gain et en phase.
- Réponse d'un filtre à un signal périodique non sinusoïdal.
- Caractère dérivateur ou intégrateur d'un filtre.

LES PRÉREQUIS

- Notion d'impédance complexe.
- Théorèmes généraux en régime sinusoïdal forcé.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Équations algébriques complexes.
- Utilisation d'échelles logarithmiques pour les tracés.
- Principe de la décomposition d'un signal périodique en série de Fourier.

ESSENTIEL

- La fonction de transfert d'un système linéaire en régime sinusoïdal forcé est la fraction rationnelle :

$$H(j\omega) = \frac{s_m}{e_m} = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)},$$

où e_m et s_m sont respectivement les amplitudes complexes de l'excitation $e(t)$ et de la réponse $s(t)$ du système dans les conditions de son utilisation.

- La connaissance de la fonction de transfert permet de retrouver l'équation différentielle liant $s(t)$ à $e(t)$. Il suffit pour cela d'écrire : $D(j\omega)s = N(j\omega)e$ puis d'effectuer la transformation :

$$\times j\omega \rightarrow \frac{d}{dt}.$$

- Le système étudié a un régime libre stable si les solutions libres convergent vers 0. Pratiquement, un système d'ordre 1 ou 2 est stable lorsque le polynôme $D(j\omega)$ a tous ses coefficients de même signe.

• Un filtre est un circuit conçu pour transmettre, sélectivement et avec des caractéristiques bien définies, les diverses composantes fréquentielles de son excitation $e(t)$.

- Notons par ω_0 la pulsation propre du filtre et par $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite. Les expressions générales des fonctions de transfert des filtres fondamentaux d'ordres 1 et 2 sont (avec K

réel et $Q = \frac{1}{2\sigma} > 0$ facteur de qualité) :

– passe-bas d'ordre 1 :

$$\underline{H}(jx) = \frac{K}{1 + jx} ;$$

– passe-haut d'ordre 1 :

$$\underline{H}(jx) = \frac{Kjx}{1 + jx} ;$$

– passe-bas d'ordre 2 :

$$\underline{H}(jx) = \frac{K}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2} ;$$

– passe-haut d'ordre 2 :

$$\underline{H}(jx) = \frac{K(jx)^2}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2} ;$$

– passe-bande d'ordre 2 :

$$\underline{H}(jx) = \frac{K2\sigma jx}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2} = \frac{K}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} ;$$

– coupe-bande d'ordre 2 :

$$\underline{H}(jx) = \frac{K[1 + (jx)^2]}{1 + 2\sigma jx + (jx)^2} .$$

- La bande passante (à -3 dB) d'un filtre est la bande de fréquences à l'intérieur de laquelle :

$$|\underline{H}(jx)| \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} ,$$

où H_{\max} est la valeur maximale de $|\underline{H}(jx)|$.

- Le diagramme de Bode d'un filtre est l'ensemble constitué par sa courbe de réponse en gain G_{dB} et de sa courbe de réponse en phase φ , toutes deux tracées en axes semi-logarithmiques en fonction de la fréquence.

- Dans un domaine de fréquences où la fonction de transfert peut se mettre sous la forme approchée : $\underline{H}(j\omega) \approx \frac{K}{j\omega}$ où K est une constante réelle, le filtre se comporte comme un *intégrateur* :

$$u_s(t) \approx u_s(0) + K \int_0^t u_e(x) dx .$$

- Dans un domaine de fréquences où la fonction de transfert peut se mettre sous la forme approchée : $\underline{H}(j\omega) \approx Kj\omega$ où K est une constante réelle, le filtre se comporte comme un *dérivateur* :

$$u_s(t) \approx K \frac{du_e}{dt} .$$

- Toute fonction périodique non sinusoïdale peut être décomposée sous la forme d'une série de sinus et de cosinus ; soit $s(t)$ cette fonction et T sa période :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n \cos\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi}{T} t\right) \right], \text{ où } a_n \text{ et } b_n \text{ sont des coefficients – dits de Fourier}$$

– du développement. Ils seront donnés dans les exercices.

- La réponse d'un filtre linéaire à son attaque par $s(t)$ est donnée par la somme des réponses à l'attaque du filtre par les $s_n(t) = a_n \cos\left(n \frac{2\pi t}{T}\right) + b_n \sin\left(n \frac{2\pi t}{T}\right)$, prises séparément.

L'utilisation du diagramme de Bode permet l'étude de chaque composante individuellement.

Dans de très nombreux cas, l'étude des premières composantes ($n < 10$), suffit à donner une bonne forme approchée du signal de sortie.

Il peut être utile de consulter les fonctions de transfert élémentaires stables, placées en *Annexe*, en fin de partie.

Conseils et pièges à éviter

- Les fonctions de transfert se trouvent souvent simplement en écrivant la loi des nœuds en termes de potentiels.
- Le diagramme de Bode n'existe que si les solutions de l'équation différentielle associée à la fonction de transfert sont stables (sinon l'étude expérimentale est impossible) : il faut pour cela que (par exemple) la fonction de transfert d'un mystère d'ordre 2 soit telle que :

$$H(jx) = \frac{s}{e} = \frac{f(jx)}{A + jBx - Cx^2}$$

avec A, B et C de même signe, car l'équation différentielle associée est :

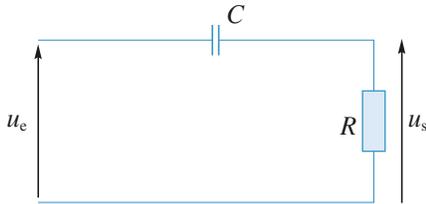
$$C \frac{d^2s}{dt^2} + B\omega_0 \frac{ds}{dt} + A\omega_0^2 s = \omega_0^2 f(e, \frac{de}{dt}, \dots)$$

dont les solutions sont stables si $C, B\omega_0$ et $A\omega_0^2$ sont de même signe.

1 Action d'un filtre passe-haut

On étudie l'action du filtre représenté ci-dessous sur différents signaux, en régime forcé.

$R = 2 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.



1 • Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre. Tracer le diagramme de Bode.

2 • u_e est une tension constante. Déterminer $u_s(t)$ en régime établi.

3 • $u_e(t) = U_0[1 + \cos(2\pi ft)]$. U_0 est une constante homogène à une tension et $f = 20 \text{ kHz}$.

Déterminer $u_s(t)$.

Commenter le résultat.

4 • $u_e(t) = U_0 \cos^3(2\pi ft)$ avec $2\pi f = 250 \text{ s}^{-1}$.

Sachant que :

$$\cos^3 x = \frac{1}{4} [\cos(3x) + 3 \cos(x)],$$

écrire l'expression de $u_s(t)$ en régime établi.

Quelle est la sortie si du bruit se superpose au signal d'entrée ?

5 • $u_e(t)$ est une fonction créneau de fréquence f telle que $2\pi f = 250 \text{ s}^{-1}$.

On ne cherchera que l'allure de la tension de sortie u_s .

Conseils

Pour tracer rapidement l'allure du diagramme de gain d'un filtre d'ordre 1, il suffit de tracer les deux asymptotes et de repérer la valeur du gain pour $\omega = \omega_0$. Un signal constant peut être considéré comme la limite d'un signal périodique dont la fréquence serait nulle.

Pour les questions 3) et 4), penser à la superposition des réponses.

Pour la question 5), penser au régime transitoire.

2 Réponse d'un filtre (R, C) à un signal sinusoïdal avec un oscilloscope

On réalise le montage ci-contre :

1 • Déterminer directement l'équation différentielle reliant v_s à v_e .

2 • Déterminer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s(j\omega)}{v_e(j\omega)}.$$

3 • La mesure de v_s se fait à l'aide d'un oscilloscope dont l'entrée est représentée par le circuit (C' , R') suivant.

Ceci correspond à la position « AC » de l'entrée de l'oscilloscope.

a. Déterminer la fonction de transfert :

$$\underline{H}'(j\omega) = \frac{v'_s(j\omega)}{v_e(j\omega)}.$$

b. Tracer sur un même graphique les diagrammes de Bode (gain) correspondant à H et H' pour $R' = 1 \text{ M}\Omega$, $C' = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$, $R = 47 \text{ k}\Omega$, $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$, puis $R = 470 \text{ k}\Omega$, $C = 10 \text{ nF}$.

Conclure.

Conseils

L'intensité dans la maille est liée à la tension aux bornes du condensateur par $i = C \frac{dv}{dt}$.

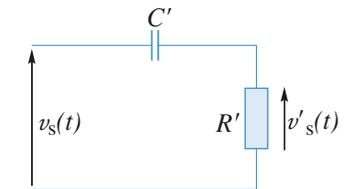
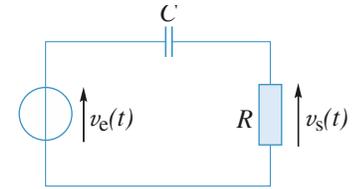
La relation entre v_e et v_s s'obtient en éliminant ensuite v et i .

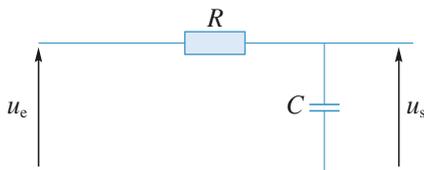
2) et 3) Le plus simple est d'utiliser la formule du pont diviseur de tension et les associations de dipôles.

3 Action d'un filtre passe-bas

On étudie l'action du filtre représenté sur différents signaux, en régime forcé.

$R = 2 \text{ k}\Omega$ et $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$.



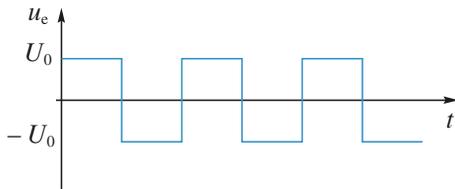


1 • Déterminer la fonction de transfert $H(j\omega)$ de ce filtre. Tracer le diagramme de Bode.

2 • u_e est une tension constante. Déterminer $u_s(t)$ en régime établi.

3 • $u_e(t) = U_0[1 + \cos(2\pi ft)]$. U_0 est une constante homogène à une tension et $f = 20$ kHz. Déterminer $u_s(t)$. Commenter le résultat.

4 • u_e est une tension en créneaux de fréquence 10 kHz.
 • Écrire la forme approchée de $H(j\omega)$ pour des fréquences supérieures à 10 kHz. En déduire l'opération mathématique réalisée par le filtre.
 • Tracer le graphe de $u_s(t)$ et calculer sa valeur maximale.



5 • Examiner le cas d'un créneau de fréquence très inférieure à la fréquence de coupure du filtre f_0 ; donner l'allure de u_s . Que se passe-t-il si le signal est bruité ?

Conseils

Quelle valeur attribuer à H pour un signal constant ?

3) Penser à la superposition des réponses.

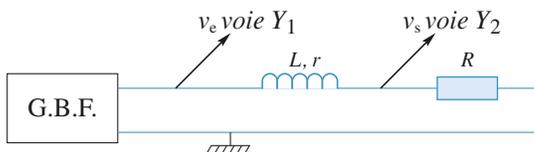
4) Il faut se souvenir que la tension u_e peut s'exprimer sous la forme d'une somme de signaux de fréquences multiples de f . La condition $f \gg f_0$ est donc vérifiée pour toutes les composantes. Quelle est la valeur de la dérivée de $u_s(t)$?

5) Penser au régime transitoire.

4 Réponse d'un circuit (R, L) à un signal sinusoïdal

On réalise le montage suivant où $R = 100 \Omega$ et la résistance mesurée en continu de la bobine est $r = 10 \Omega$.

On mesure pour différentes fréquences les tensions efficaces V_e et V_s ainsi que le déphasage φ entre v_s et v_e .



fréquence (Hz)	10	20	50	100	200
V_e (V)	7,9	7,9	8,0	8,3	8,9
V_s (V)	7,2	7,1	7,0	6,4	5,2
φ (°)	-3	-7	-15	-30	-47

fréquence (Hz)	500	1 000	2 000	5 000	10 000
V_e (V)	9,6	9,8	9,9	10,0	10,0
V_s (V)	2,7	1,4	0,64	0,17	0,05
φ (°)	-63	-63	-55	-30	-17

1 • Pour quelle raison V_e augmente-t-il quand la fréquence augmente alors que le réglage d'amplitude du générateur reste inchangé ?

2 • Tracer les diagrammes de Bode (gain et phase) correspondant aux mesures et à la courbe théorique donnant la même bande passante à -3 dB. On donne $L = 0,1$ H, valeur que l'on confirmera grâce à la détermination de la fréquence de coupure du filtre.

Les courbes expérimentales et théoriques sont très différentes l'une de l'autre à partir de 2 kHz. Proposer une explication sachant que la bobine contient un noyau ferromagnétique.

Conseils

Le générateur basse fréquence est-il un générateur de tension idéal ?

L'étude théorique se fait simplement en utilisant la formule du pont diviseur de tension. Il ne faut pas oublier que la bande passante à -3 dB prend comme référence la valeur maximale du gain.

5 Détermination des grandeurs caractéristiques d'un filtre

D'après CCP PSI.

On s'intéresse à un filtre dont la fonction de transfert est :

$$F(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} = \frac{F_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

On se propose de déterminer les caractéristiques F_0 , Q et ω_0 du filtre à partir des oscillogrammes obtenus en régime périodique pour une tension d'entrée v_e rectangulaire pour deux valeurs de fréquences.

On rappelle la décomposition en série de Fourier de $v_e(t)$ dans le cas où $v_e(t)$ est périodique de période T avec :

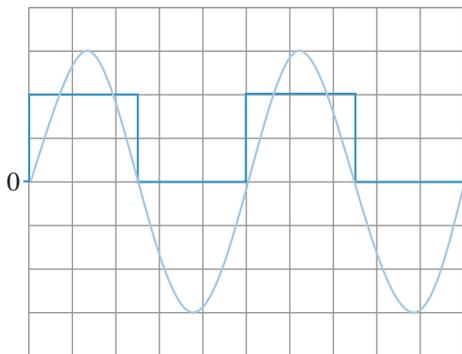
$$- \text{pour } 0 \leq t < \frac{T}{2} : v_e(t) = V_0 ;$$

– pour $\frac{T}{2} \leq t < T : v_e(t) = 0 :$

$$v_e(t) = V_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)\omega_1 t) \right)$$

avec $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

Première expérience (oscillogramme 1)

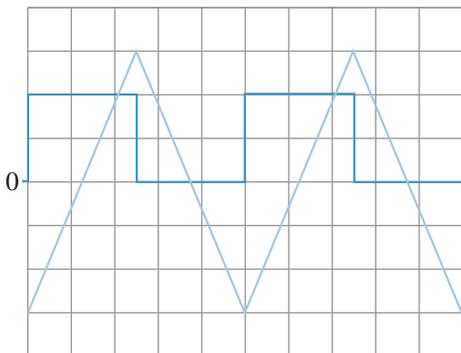


- voies 1 et 2 en position DC ;
- base de temps : 50 μs par carreau ;
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : 0,5 V par carreau ;
 - voie 2 : 2 V par carreau.

Dans cette expérience :

- la tension v_s obtenue est quasi-sinusoïdale ;
- si on augmente la fréquence de v_e par rapport à la valeur correspondant à cet oscillogramme, on constate que l’amplitude de v_s diminue ;
- si, par rapport à cette même fréquence, on diminue légèrement la fréquence de v_e , on constate que l’amplitude de v_s diminue également.

Deuxième expérience (oscillogramme 2)



- voies 1 et 2 en position DC ;
- base de temps : 5 μs par carreau ;
- sensibilités :
 - voie 1 (en gras) : 2V par carreau ;
 - voie 2 : 0,2 V par carreau.

Quel est le type de filtre étudié ?

1 • Que peut-on dire de la composante continue de $v_e(t)$ et de $v_s(t)$ dans chaque expérience. Donner leurs valeurs et commenter.

2 • Première expérience : Interpréter physiquement le commentaire de l’expérience et l’oscillogramme de la tension de sortie puis déterminer les valeurs de f_0 , ω_0 et celle de F_0 .

3 • Deuxième expérience

a. Déterminer la fréquence de la tension d’entrée ; comment se comporte le filtre pour les différents harmoniques de ce signal ? Justifier alors l’allure de l’oscillogramme de la tension de sortie.

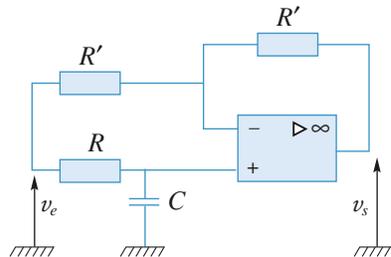
b. Déterminer la valeur de Q .

Conseils

- 1) L’oscilloscope est en mode DC, qu’est-ce que cela signifie ? Relier valeur moyenne et composante continue d’un signal.
- 2) Quels résultats amènent à penser que la fréquence centrale du filtre est celle de $v_e(t)$? Quelle est alors la seule composante de $v_e(t)$ transmise par le filtre s’il est assez sélectif ? Utiliser alors la fonction de transfert et le développement donné dans l’énoncé.
- 3) Quel est le comportement d’un passe-bande dans son asymptote HF ? Quel est alors le devenir de toutes les composantes variables de $v_e(t)$ compte tenu des valeurs de f_0 et de $f(v_e)$? Vérifier avec l’oscillogramme.

6 Déphaseur pur d’ordre 1

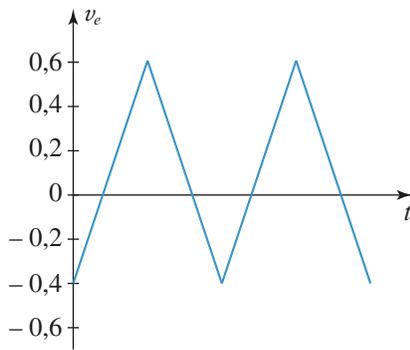
On s’intéresse au circuit ci-dessous pour lequel l’AO est idéal et fonctionne en régime linéaire :



1 • Déterminer la fonction de transfert de ce filtre et tracer le diagramme de Bode correspondant en amplitude et en phase sous la forme $G_{dB} \log(x)$ et $\phi(\log(x))$, où

$$x = \frac{f}{f_0} \text{ et } f_0 = \frac{1}{2\pi RC}.$$

2 • Le filtre est attaqué par un signal triangulaire de fréquence f , d’amplitude crête à crête de 1 V et de valeur moyenne égale à 0,1 V, dont le graphe et la décomposition en série de Fourier sont donnés ci-dessous :



$$v_e(t) = 0,1 - \frac{4}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\cos[(2p+1)2\pi ft]}{(2p+1)^2}.$$

On cherche à déterminer la réponse de ce filtre pour trois fréquences du signal d'entrée :

$$f = f_0 ; f = \frac{f_0}{20} ; f = 20 f_0.$$

On cherche pour cela la réponse du fondamental et des premiers harmoniques afin de déterminer une reconstitution approchée du signal de sortie.

a. Indiquer le principe de cette reconstitution.

b. Donner dans un tableau les coefficients en amplitude et les phases du fondamental et des 5 premiers harmoniques non nuls des signaux de sortie en fonction de $\frac{f}{f_0}$ pour

chacun des trois cas.

Construire un diagramme à trois dimensions (rang de l'harmonique en x , phase en y et amplitude en z) regroupant les résultats ci-dessus. Quel est l'intérêt d'un tel tracé ?

c. Dédire de ces résultats l'expression et le tracé des trois fonctions $v_s(t)$ pour les trois fréquences, sachant que $f_0 = 2$ kHz. Pouvait-on prévoir les résultats pour $f = \frac{f_0}{20}$

et $f = 20 f_0$?

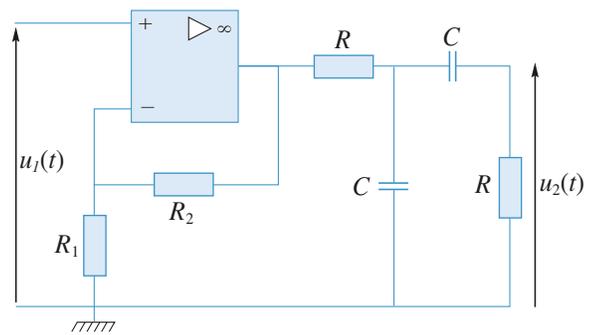
Conseils

1) Il suffit de tracer $\phi(\log(x))$ puisque le gain en dB est égal à 0 pour toute fréquence. Bien préciser le domaine de variations de la phase.

2) La méthode consiste à prendre chaque composante du signal d'entrée et de la « passer » par le filtre, donc ici de déterminer son déphasage, puis de les sommer pour composer le signal de sortie. Prendre une machine graphique pour tracer les différents signaux de sortie.

7 Étude d'un filtre passe-bande

D'après ENSI P.



- 1 • Calculer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{u_1}$ du montage et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(jx) = \frac{jKx}{1 + 2jKx + (jx)^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

- 2 • Tracer le diagramme de Bode du filtre en fonction de $\log x$.

Conseils

Pour un amplificateur opérationnel idéal, les courants d'entrée i_+ et i_- sont nuls.

De plus, en régime linéaire : $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$.

On écrira, lorsque cela sera possible, la loi des nœuds en termes de potentiels ; ne pas oublier que l'A.O. débite un courant dépendant de l'extérieur, et que des courants vont à la masse.

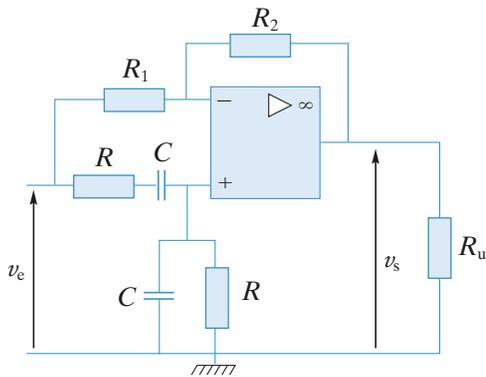
8 Filtre réjecteur de fréquence

On considère le filtre page suivante, où $R_1 = 2R_2$ et où l'amplificateur opérationnel est considéré comme parfait ; il fonctionne, de plus, en régime linéaire.

Calculer la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{v_s}{v_e} \text{ du montage.}$$

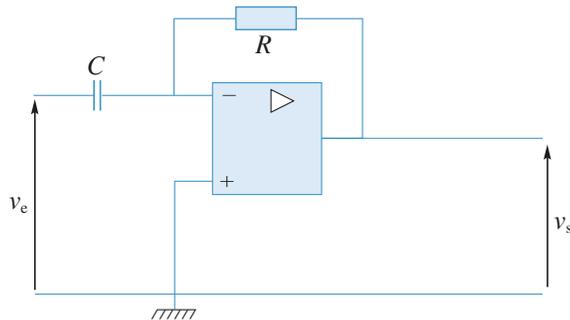
Donner l'allure de $H(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$ en fonction de ω en échelles logarithmiques.



Conseils

Pour un amplificateur opérationnel idéal, les courants d'entrée i_+ et i_- sont nuls. De plus, en régime linéaire, $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$.
On écrira, lorsque cela est possible, la loi des nœuds, c'est-à-dire ni sur la sortie de l'A.O. ni sur la masse.
On posera $x = RC\omega$, grandeur sans dimension.

10 Dérivateur à amplificateur opérationnel réel

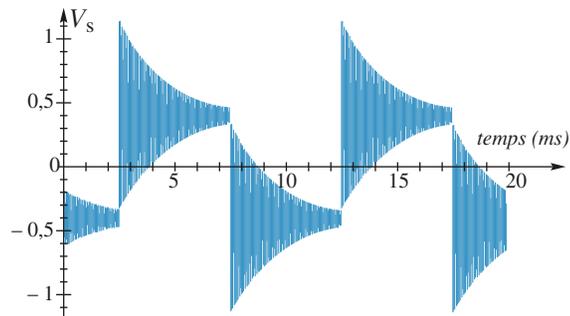


Doc. 1

1 • Calculer la fonction de transfert du document 1 si l'amplificateur opérationnel est réel de gain en boucle ouverte μ_0 et de fréquence de coupure à gain nul f_0 . Dans ce cas, la relation entre les tensions d'entrée et de sortie s'écrit :

$$\left(1 + \frac{j\omega\mu_0}{2\pi f_0}\right)v_s = \mu_0(v_+ - v_-)$$

pour un signal sinusoïdal de pulsation ω .
On fera les approximations liées aux valeurs numériques $R = 10 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ nF}$, $\mu_0 = 10^5$ et $f_0 = 1 \text{ MHz}$.
Déterminer les grandeurs caractéristiques de la fonction de transfert du montage.
Cette étude permet-elle d'interpréter la réponse ci-dessous (doc. 2) ?

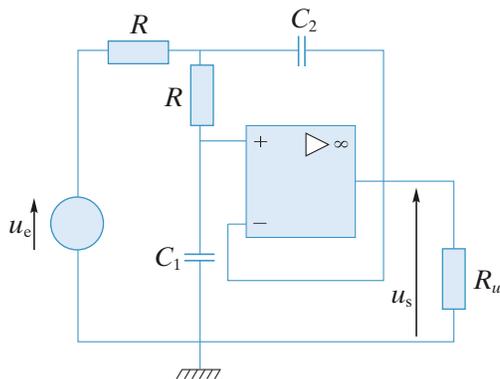


Doc. 2. Réponse du montage dérivateur à un signal triangulaire de fréquence 100 Hz.

2 • On réalise le montage 2 (doc. 3).
Quelle valeur donner à R' pour que le coefficient de qualité du montage soit de $\frac{1}{2}$ (valeur correspondant au régime critique).

9 Filtre de Butterworth

On considère le montage ci-dessous dans lequel l'amplificateur opérationnel utilisé est supposé parfait.

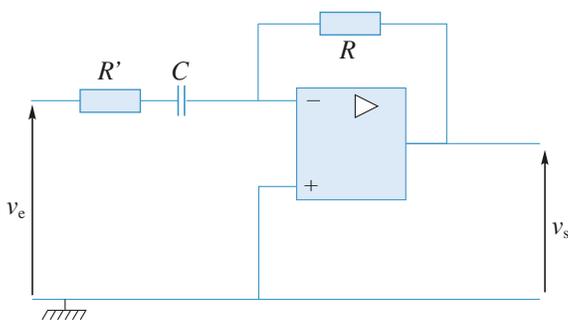


- 1 • Calculer la fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$ du montage.
- 2 • Comment choisir C_2 pour que $H(j\omega)$ ait un module égal à $|H(j\omega)| = \left(1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)^{-\frac{1}{2}}$?

Quelle est alors la valeur de ω_0 en fonction de R et C_1 ?
Quelle est la pulsation de coupure ω_c du montage ?

Conseils

Relire les indications données pour l'exercice 8.
Poser $x = RC\omega$ et $k = \frac{C_2}{C_1}$.



Doc. 3

Quelle est l'allure de la réponse à un signal triangulaire de fréquence 100 Hz ?

Conseils

Écrire la loi des nœuds au niveau de l'entrée inverseuse et utiliser la relation entre la tension différentielle d'entrée et la tension de sortie. Effectuer ensuite les simplifications en comparant les valeurs numériques des termes de même degré en $j\omega$.

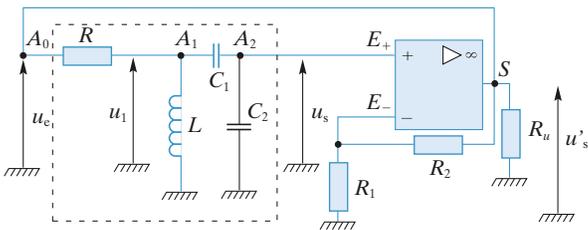
Le montage est un passe-bande. Ses grandeurs caractéristiques doivent être connues. Ne pas hésiter à les revoir le cas échéant.

Pour le deuxième montage, il n'y a pas de calcul à faire : par quoi suffit-il de remplacer les termes en $jC\omega$ dans la fonction de transfert du premier montage ?

11 Oscillateur quasi sinusoïdal de Colpitts

Le montage étudié ci-dessous comprend un amplificateur opérationnel idéal monté en amplificateur non inverseur et un filtre de Colpitts constitué d'une inductance L , de deux capacités C_1 et C_2 et d'une résistance R . On pose

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \quad \omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{R}{L\omega_C}.$$



1 • Examiner le comportement asymptotique du filtre.

Établir sa fonction de transfert $H(j\omega) = \frac{u_{sm}}{u_{em}}$.

En déduire son ordre, son type et ses principales caractéristiques. Tracer le diagramme de Bode du filtre (courbe

de réponse en gain et courbe de réponse en phase) dans l'hypothèse d'un facteur de qualité $Q > 1$.

2 • Identifier le montage réalisé avec l'amplificateur opérationnel. En déduire la relation entre u'_s et u_s .

3 • De la fonction de transfert du filtre et de la relation précédente, déduire l'équation différentielle vérifiée par $u'_s(t)$.

À quelle condition le régime libre est-il stable ?

4 • u'_s n'est jamais rigoureusement nulle en raison de l'agitation thermique des électrons, des ondes électromagnétiques captées par le circuit et les dérives de l'A.O.

Posons $R_2 = \frac{R_1 C_2}{C_1} (1 + x)$ avec $|x| \ll 1$.

À partir d'une valeur très faible de u'_s à $t = 0$, décrire l'évolution de $u'_s(t)$ si :

a. $x < 0$;

b. $x > 0$. Dans ce cas, quel est le phénomène (non pris en compte dans le modèle de l'amplificateur idéal) qui limite l'amplitude des oscillations ?

Conseils

Noter par Z l'impédance formée par L en parallèle sur C , capacité du condensateur équivalent à C_1 en série avec C_2 . La résistance R et l'impédance Z forment un diviseur de tension et les deux capacités C_1 et C_2 en forment un second.

Appliquer deux fois la formule du diviseur de tension

$$\text{pour obtenir } H(j\omega) = \frac{u_{sm}}{u_{em}}.$$

12 Modulation d'amplitude et démodulation

En radio AM, le signal audio $u_a(t)$ module un signal de plus haute fréquence appelé « porteuse ».

La porteuse est un signal sinusoïdal $u_p(t)$ de fréquence f_p : $u_p = U_p \cos(\omega_p t)$ avec $\omega_p = 2\pi f_p$.

Un système combine ces deux signaux et fournit le signal modulé : $u(t) = U[1 + \alpha u_a(t)] \cos(2\pi f_p t)$.

1 • Tracer l'allure du graphe de $u(t)$ si $u_a(t)$ est un signal en créneaux de fréquence $f_a = \frac{1}{10} f_p$ avec $\alpha u_{a \max} < 1$.

2 • On suppose ici que le signal audio est sinusoïdal, d'amplitude U_a telle que $\alpha U_a < 1$ et de fréquence $f_a < f_p$. Exprimer le signal modulé sous la forme d'une somme de trois fonctions sinusoïdales.

3 • Le récepteur capte deux émetteurs (1) et (2) de même amplitude et de fréquences de porteuses $f_{p1} = 200 \text{ kHz}$ et

$f_{p2} = 400$ kHz. Le signal audio est dans les deux cas un signal sinusoïdal de fréquence 10 kHz.

On utilise pour sélectionner l'émetteur (1) un filtre passe-bande du second ordre, de fréquence de résonance f_{p1} et de largeur de bande passante à -3 dB égale à 20 kHz.

Déterminer le gain du filtre pour la fréquence :

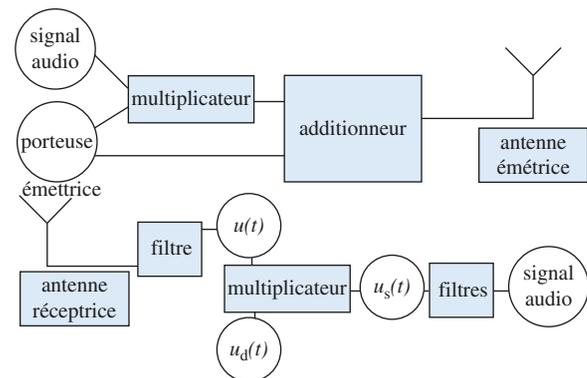
$f_{p2} = 400$ kHz. Conclure.

Que se passerait-il avec $f_{p2} = 220$ kHz ?

4 • Le signal modulé $u_1(t)$ émis par (1) est ensuite traité pour en extraire le signal audio. Une méthode consiste à le multiplier par un signal sinusoïdal $u_d(t)$ de même fréquence que la porteuse :

$$u_d = U_d \cos(2\pi f_p t + \varphi) ; \text{ soit } u_s = k u_1(t) u_d(t).$$

Exprimer le signal $u_s = k u_1(t) u_d(t)$ issu du multiplieur. Avec quel(s) filtre(s) peut-on enfin isoler le signal audio de façon à le rendre audible ?



Conseils

La largeur de la bande passante est directement liée au facteur de qualité Q .

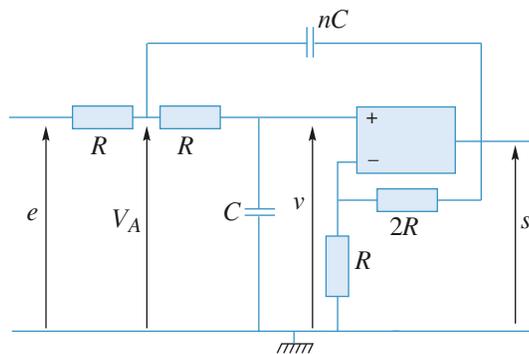
4) On exprimera $u_s(t)$ sous la forme d'une somme de six fonctions sinusoïdales.

Pour extraire une composante d'un signal complexe, on peut utiliser des filtres qui coupent les fréquences des signaux indésirables.

13 Étude d'un filtre grâce à un logiciel de calcul formel

On étudie à l'aide du logiciel de calcul MAPLE le circuit ci-dessous dans lequel l'A.O. est supposé idéal et fonctionne en régime linéaire.

Tous les calculs et tracés seront réalisés grâce au logiciel. Tout autre logiciel que MAPLE ou toute calculatrice programmable suffisamment puissante permet de résoudre cet exercice. L'objectif est ici de se focaliser sur l'interprétation des résultats expérimentaux que simule le logiciel. Tout filtre peut aussi être traité avec cette méthode.



On pose $\omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{n}}$; n est un réel positif.

1 • Fonction de transfert. Diagramme de BODE. Résonance

1.1 – Expression de la fonction de transfert

Justifier les trois équations ci-dessous :

- $v = \frac{s}{3}$;
- $v_A = v(1 + jRC\omega)$;
- $v_A = \frac{e + v + jnRC\omega s}{2 + jRC\omega}$.

Dans la feuille de travail MAPLE :

- Déclarer les trois équations (attention : dans le langage MAPLE le complexe j s'écrit I) et résoudre le système en utilisant la commande **solve** ; on exprimera v , v_A et e en fonction de s . Pour accéder à la solution, il faut ensuite utiliser la commande **assign** :

```
> sol := solve({Eq} ; {vars}) ;
```

```
> assign(sol) ;
```

- Exprimer et simplifier la fonction de transfert du montage, H , en fonction de n , R , C , ω , puis de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

utiliser la commande **subs** pour substituer $x\omega_0$ à ω .

- Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme canonique

$$H = \frac{H_0}{1 + \frac{j}{Q}x - x^2} \text{ et identifier } H_0 \text{ et } Q ; \text{ quel est le}$$

type de filtre étudié ? À quelle condition sur Q présentera-t-il une résonance ? Pour vérifier la forme canonique de la fonction de transfert, utiliser la commande **match**.

1.2 – Tracé du diagramme de Bode

On se limite dans cette question au cas où n est compris entre 0 et 1.

Dans la feuille de travail MAPLE :

- Définir G_{dB} .
- Tracer, sur un même graphe, le diagramme de BODE $G_{dB} = f(\log_{10}(x))$ pour différentes valeurs de n inférieures à 1 : on pourra pour cela utiliser la commande **seq**. Commenter ces courbes.

1.3 – Résonance

Effectuer un restart. Dans la feuille de travail MAPLE :

- Redéfinir la fonction de transfert sous la forme $\underline{H}(x, n)$.
- Montrer en étudiant $|\underline{H}|$ en fonction de x l'existence d'une valeur limite n_1 de n telle que pour $n_1 < n < 1$, la tension s admet une résonance.
- Déterminer la valeur de x à la résonance en fonction de n (quand elle existe). Attention, lors de l'utilisation de variables quelconques, MAPLE considère qu'elles sont complexes ; pour les rendre réelles, il faut utiliser la commande **assume** (pour rendre x réel : `assume(x, real)`).
- Tracer alors le gain et les asymptotes associées à la valeur $n = n_1$.

2 • Réponse à un échelon de tension

n est maintenant un réel positif quelconque.

Déduire de la fonction de transfert l'équation différentielle qui relie $s(t)$ à $e(t)$ en régime quelconque. Choisir $e(t) = 1 \text{ V}$ pour $t > 0$, $R = 1\,000 \, \Omega$ et $C = 1 \, \mu\text{F}$.

Dans la feuille MAPLE :

- Déclarer et résoudre l'équation différentielle obtenue en supposant que les deux condensateurs sont déchargés à l'instant initial. Pour accéder à la solution, utiliser la fonction **assign** selon l'exemple suivant :
`> sol := dsolve({EqDiff, conditions_initiales}, {s(t)});`
`> assign(sol);`
- Tracer $s(t)$ pour différentes valeurs de n . Caractériser le comportement de $s(t)$ pour $n < n_1$, pour $1 > n > n_1$, pour $n = 1$ et pour $n > 1$. Commenter les différentes courbes.

Conseils

- 1) Pour les trois premières équations, utiliser les diviseurs de tensions et la loi des nœuds en termes de potentiels.
- 2) Pour passer à l'équation différentielle, ne pas oublier de repasser en variable de pulsation, ω ; attention, ici ω_0 est fonction de n .
Pour les conseils d'utilisation de Maple, voir l'énoncé au fur et à mesure.

1 Action d'un filtre passe-haut

1 • La relation entre u_{em} et u_{sm} s'obtient par la division de tension :

$$u_{sm} = u_{em} \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \text{ d'où :}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\omega_0}{j\omega}} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} = 500 \text{ s}^{-1}.$$

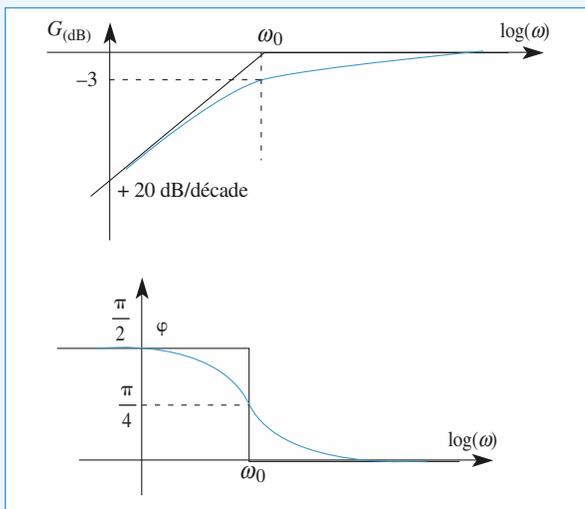
Recherchons les comportements asymptotiques.

- Pour $\omega \rightarrow \infty$: $\underline{H} \approx 1$ donc : $G_{(dB)} \approx 0$ et $\varphi \approx 0$.
- Pour $\omega \rightarrow 0$: $\underline{H} = j\frac{\omega}{\omega_0}$ donc : $G_{(dB)} \approx 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$.
- Pour $\omega = \omega_0$: $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $G_{(dB)} = -3 \text{ dB}$ et $\varphi = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit l'allure des courbes de gain et de phase (doc. 1).

Le filtre est bien un passe-haut :

- à très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), le condensateur se comporte comme un court-circuit, d'où $u_s \rightarrow u_e$;
- à très basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $u_s \rightarrow 0$.



Doc. 1

2 • Une tension constante peut être vue comme le cas limite d'une tension périodique de fréquence nulle. Dans ce cas $\underline{H} = 0$: le signal d'entrée est éliminé en sortie.

En continu, la capacité se comporte comme une impédance infinie.

Il n'y a aucun courant dans la résistance, donc la d.d.p. à ses bornes est nulle.

Remarque : La fonction de transfert représente le rapport entre u_{em} et u_{sm} en régime forcé. Il est clair que pendant le régime transitoire, u_s est non nulle.

3 • $u_e(t) = u_{e1}(t) + u_{e2}(t)$, avec :

$$u_1(t) = U_0 \text{ et } u_2(t) = U_0 \cos \omega t, \text{ avec } \frac{\omega}{\omega_0} = 80\pi.$$

L'équation différentielle qui relie u_s à u_e étant linéaire, la réponse en régime forcé à $u(t)$ est égale à la somme des réponses à $u_{e1}(t)$ et $u_{e2}(t)$.

- $u_{e1} \rightarrow u_{s1} = 0$
- Pour u_{e2} :

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(80\pi)^2}}} = 1,00 \text{ et } \varphi = \arctan \frac{1}{80\pi} = 0,23 \text{ degré}$$

$$\text{donc : } u_{s2}(t) = 1,00 U_0 \cos(\omega t + \varphi) \approx U_0 \cos \omega t.$$

Conclusion : Le filtre laisse pratiquement intacte la composante alternative du signal d'entrée, de fréquence très supérieure à f_0 et coupe totalement la composante continue.

Remarque : Un filtre passe-haut coupe la composante continue du signal d'entrée.

4 • Comme $\cos^3 x = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3 \cos x)$, le signal donné

$$\text{comporte deux pulsations } \omega = 2\pi f = \frac{\omega_0}{2} \text{ et } 3\omega = \frac{3\omega_0}{2}.$$

On superpose les réponses forcées aux deux composantes sinusoïdales du signal d'entrée :

• Pour $\omega = \frac{\omega_0}{2}$:

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2^2}} = 0,45 \text{ et } \varphi_1 = \arctan(2) = 1,1 \text{ rad.}$$

• Pour $\omega = \frac{3\omega_0}{2}$:

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}} = 0,83 \text{ et } \varphi_2 = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 0,59 \text{ rad.}$$

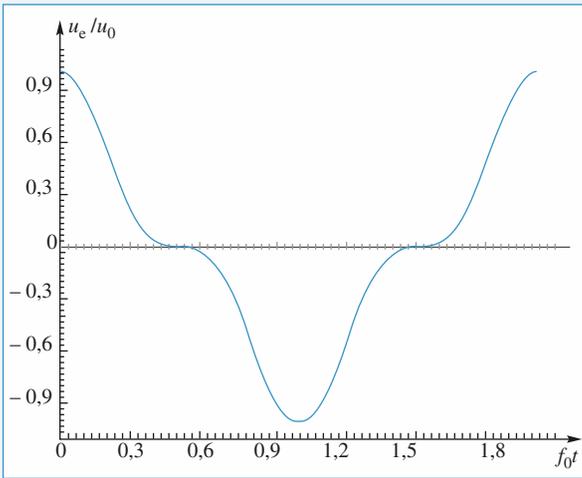
D'où :

$$u_{e1} = \frac{3U_0}{4} \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right) \rightarrow u_{s1} = 0,34 U_0 \cos\left(\frac{\omega_0 t}{2} + \varphi_1\right);$$

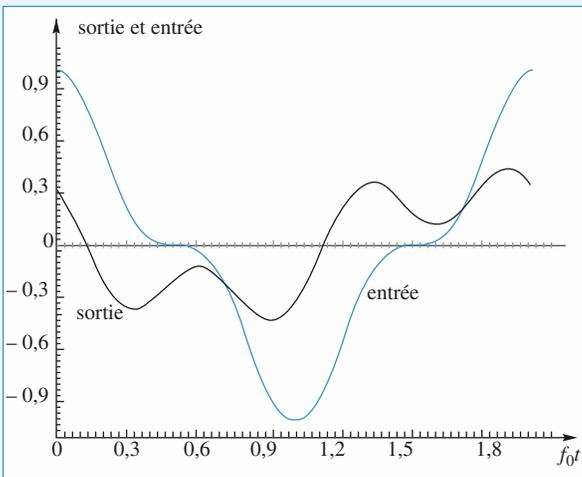
$$u_{e2} = \frac{U_0}{4} \cos\left(\frac{3\omega_0 t}{2}\right) \rightarrow u_{s2} = 0,21 U_0 \cos\left(\frac{3\omega_0 t}{2} + \varphi_2\right).$$

Donc :

$$u_s(t) = U_0 \left(0,34 \cos \left(\frac{\omega_0 t}{2} + \varphi_1 \right) + 0,21 \cos \left(\frac{3\omega_0 t}{2} + \varphi_2 \right) \right).$$



Doc. 2. $u_e(t)$.

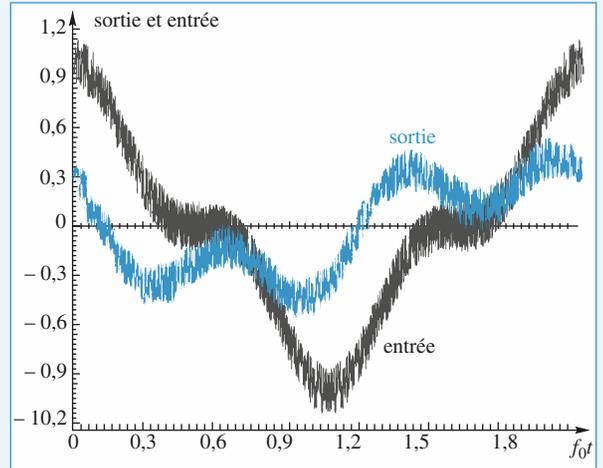


Doc. 3. $u_s(t)$ en régime forcé

La composante de fréquence inférieure à f_0 a donc été plus atténuée que la composante de fréquence supérieure.

Sur les graphes (doc. 2 et 3), on constate une atténuation de l'amplitude globale du signal, ainsi qu'une déformation de celui-ci. Il ne faudrait pas en conclure que le filtre a un effet non linéaire, ce qui est en contradiction avec notre étude. En fait, le signal d'entrée n'est pas sinusoïdal, et les amplitudes de ses deux harmoniques sont traitées de façons différentes par le filtre passe-haut.

Si le signal d'entrée est bruité, le signal de sortie sera aussi bruité. En effet le bruit étant constitué de hautes fréquences sera intégralement transmis avec un gain égal à 1, ce qui se vérifie sur le document 4.



Doc. 4

5 • Soit $u_e(t)$ une fonction créneau symétrique d'amplitude égale à 1, et de pulsation $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$\begin{cases} 0 \leq ft < 0,5 \Rightarrow u_e = U_0 \\ 0,5 \leq ft < 1 \Rightarrow u_e = -U_0 \end{cases}$$

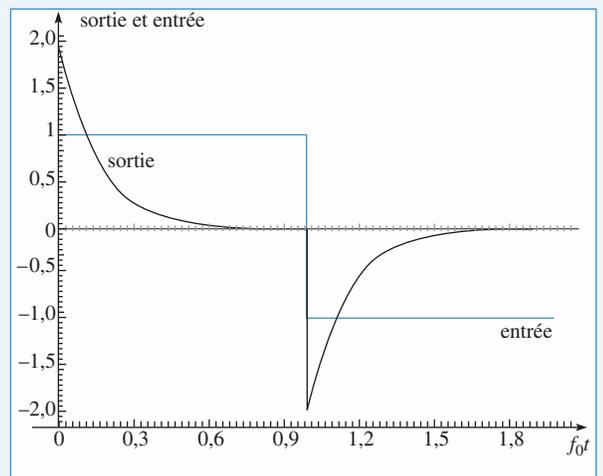
Les divers harmoniques du signal qui compose le créneau sont soit atténués, soit conservés : il est impossible de prévoir simplement la sortie.

La tension de sortie peut, en revanche, s'obtenir en étudiant le régime transitoire de l'équation différentielle associée à la fonction de transfert :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{du_s}{dt} + u_s = \frac{1}{\omega_0} \frac{du_e}{dt}.$$

La tension aux bornes de la capacité C étant continue, toute discontinuité de u_e est intégralement transmise à u_s .

À ces discontinuités se superposent des évolutions en $e^{-\frac{t}{\tau}}$, avec $\tau = \frac{1}{\omega_0}$, ce que l'on observe sur le document 5.

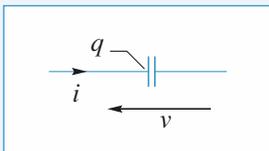


Doc. 5

2 Réponse d'un filtre (R, C) à un signal sinusoïdal avec un oscilloscope

1 • La relation entre la charge et l'intensité dans un condensateur est $i = \frac{dq}{dt}$ ou encore $i = C \frac{dv}{dt}$.

Attention à bien respecter le sens des flèches.



Ici, $v = v_e - v_s$ et $v_s = Ri$ donc $v_s = RC \frac{d(v_e - v_s)}{dt}$.

D'où la relation :

$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{RC} = \frac{dv_e}{dt}$$

2 • Aucune intensité ne sort du pont diviseur (C, R). On peut donc appliquer la formule du pont diviseur, soit :

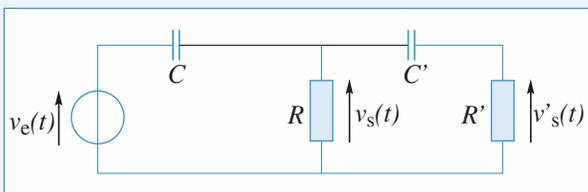
$$\frac{v_s}{v_e} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega}$$

On aurait pu aussi utiliser l'équation différentielle obtenue au 1).

En notation complexe $\frac{d}{dt} \leftrightarrow j\omega$, d'où :

$$\frac{dv_s}{dt} + \frac{v_s}{RC} = \frac{dv_e}{dt} \leftrightarrow (1 + jRC\omega)v_s = jRC\omega v_e$$

3 • On a maintenant le montage suivant :



Attention : v_s n'est plus donné par le résultat de la 2). Le pont (C, R) est en effet « chargé » par (C', R'). On peut, en revanche, appliquer la formule du pont diviseur entre v_s et v'_s soit :

$$\frac{v'_s}{v_s} = \frac{jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega}$$

a) Pour passer de v_e à v_s en utilisant la formule du pont diviseur, il faut tenir compte de l'impédance totale $R//C'R'$:

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R' + \frac{1}{jC'\omega}} = \frac{1 + jC'\omega(R + R')}{R(1 + jR'C'\omega)}$$

$$\text{D'où : } \frac{v_s}{v_e} = \frac{Z_e}{Z_e + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\begin{aligned} \frac{v_s}{v_e} &= \frac{jRC\omega(1 + jR'C'\omega)}{jRC\omega(1 + jR'C'\omega) + 1 + jC'\omega(R + R')} \\ &= \frac{jRC\omega(1 + jR'C'\omega)}{1 + j\omega(R(C + C') + R'C') - RR'CC'\omega^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et : } \frac{v'_s}{v_e} &= \frac{v'_s}{v_s} \frac{v_s}{v_e} \\ &= \left(\frac{jR'C'\omega}{1 + jR'C'\omega} \right) \left(\frac{jRC\omega(1 + jR'C'\omega)}{1 + j\omega(R(C + C') + R'C') - RR'CC'\omega^2} \right) \\ &= \frac{-RR'CC'\omega^2}{1 + j\omega(R(C + C') + R'C') - RR'CC'\omega^2} \end{aligned}$$

b)

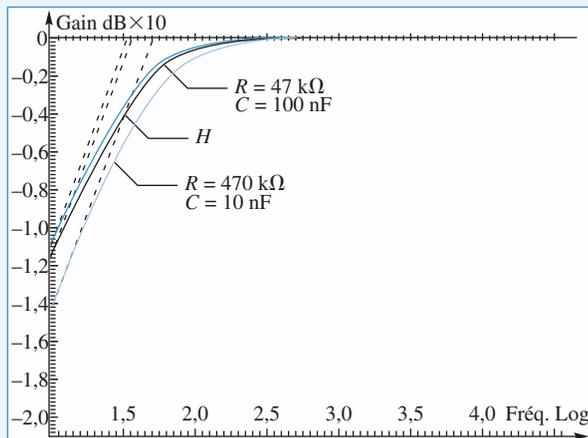


Diagramme de Bode : Gain en dB.

On remarque que si la résistance R est petite devant R' (cas où $R = 47 \text{ k}\Omega$), les diagrammes de Bode de \underline{H} et de \underline{H}' sont proches alors que ce n'est pas vrai dans le cas contraire.

Conclusion : Il faut toujours vérifier que l'impédance de l'oscilloscope est grande devant l'impédance de sortie du montage étudié.

3 Action d'un filtre passe-bas

1 • La relation entre u_{em} et u_{sm} s'obtient par division de tension :

$$u_{sm} = u_{em} \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

d'où : $\underline{H} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$, avec $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 500 \text{ s}^{-1}$,

soit une fréquence $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} \approx 80 \text{ Hz}$.

• Pour $\omega \gg \omega_0$: $\underline{H} \approx \frac{\omega_0}{j\omega}$

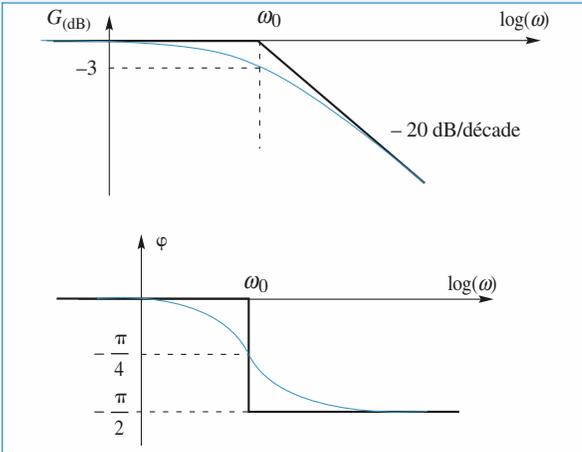
donc : $G_{(dB)} \approx -20 \log \frac{\omega_0}{j\omega}$ et $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$.

- Pour $\omega \ll \omega_0$: $\underline{H} \approx 1$ donc : $G_{(\text{dB})} \approx 0$ et $\varphi \approx 0$.
- Pour $\omega = \omega_0$: $|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $G_{(\text{dB})} = -3$ dB et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

On en déduit l'allure des courbes (*doc. 1*) de gain et de phase.

Le filtre est bien un passe-bas :

- à très haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), le condensateur se comporte comme un court-circuit, d'où $u_s \rightarrow 0$;
- à très basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, d'où $u_s \approx u_e$.



Doc. 1

- 2 •** Une tension constante peut être vue comme le cas limite d'une tension périodique de fréquence nulle. Dans ce cas $\underline{H} = 1$: le signal d'entrée est transmis sans déformation : $u_s = u_e$.

Remarque : La fonction de transfert représente le rapport entre u_e et u_s en régime forcé. Il est clair que pendant le régime transitoire, u_s est différent de u_e .

- 3 •** $u_e(t) = u_{e1}(t) + u_{e2}(t)$, avec :

$$u_1(t) = U_0 \text{ et } u_2(t) = U_0 \cos \omega t, \text{ avec } \omega = 80 \pi \omega_0.$$

L'équation différentielle qui relie u_s à u_e étant linéaire, la réponse en régime forcé à $u(t)$ est égale à la somme des réponses établies à $u_{e1}(t)$ et $u_{e2}(t)$.

$$\bullet u_{e1} \rightarrow u_{s1} = U_0.$$

$$\bullet \text{ Pour } u_{e2} : |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + (80\pi)^2}} = 0,0040$$

$$\text{et : } \varphi = -\arctan(80\pi) = -89,8 \text{ degrés ;}$$

donc :

$$u_{s2}(t) \approx U_0[1 + 0,0040 \cos(\omega t + \varphi) \approx U_0[1 - 0,0040 \sin \omega t]$$

Retenons qu'un filtre passe-bas transmet sans déformation la composante continue du signal d'entrée.

Conclusion : Le filtre laisse pratiquement intacte la composante continue du signal d'entrée et coupe presque totalement la composante alternative, de fréquence très supérieure à f_0 .

- 4 •** La fréquence de la tension d'entrée est très supérieure à f_0 . Tous les termes de la décomposition de $u_e(t)$ en série de

Fourier ont une fréquence largement supérieure à f_0 . Ainsi, pour toutes les composantes sinusoïdales du signal d'entrée :

$$\underline{H}(j\omega) \approx \frac{\omega_0}{j\omega}.$$

La division par $j\omega$ étant équivalente à une intégration $u_s(t)$ est une fonction continue du temps, constituée d'une succession de fonctions affines de pentes $\pm \omega_0 U_0$.

Comme la valeur moyenne de $u_s(t)$ est nulle, on a aussi :

$$u_{s \text{ max}} = -u_{s \text{ min}}.$$

On en déduit :

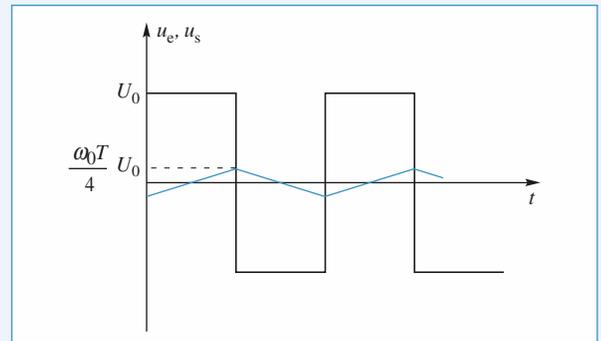
$$\omega_0 U_0 = \frac{u_{s \text{ max}} - u_{s \text{ min}}}{\frac{T}{2}} = \frac{4u_{s \text{ max}}}{T}$$

$$\text{soit : } u_{s \text{ max}} = \frac{1}{4} \omega_0 T U_0 = 1,25 \cdot 10^{-2} U_0.$$

- 5 •** Comme dans l'exercice 1, on retrouve la réponse transitoire d'un circuit (R, C), le signal étant continu (*doc. 3*).

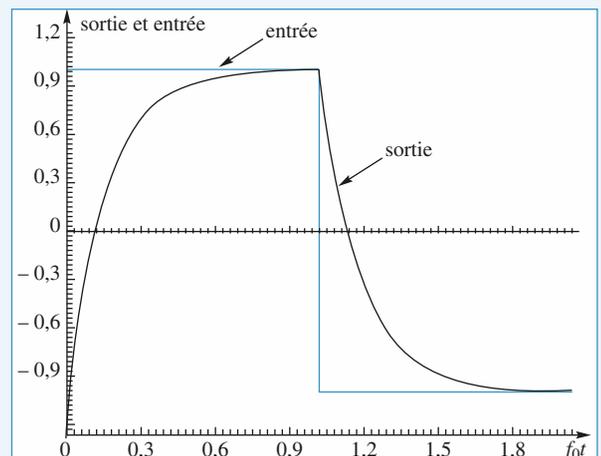
Plus la fréquence du signal d'entrée sera faible devant f_0 , plus le signal de sortie sera proche de u_e : en effet le fondamental et les premiers harmoniques qui constituent l'essentiel du signal ne sont pas affectés par le filtre passe-bas.

Le bruit constitué de hautes fréquences, sera filtré en sortie, ce que l'on voit sur le document 4 : on a filtré les parasites.

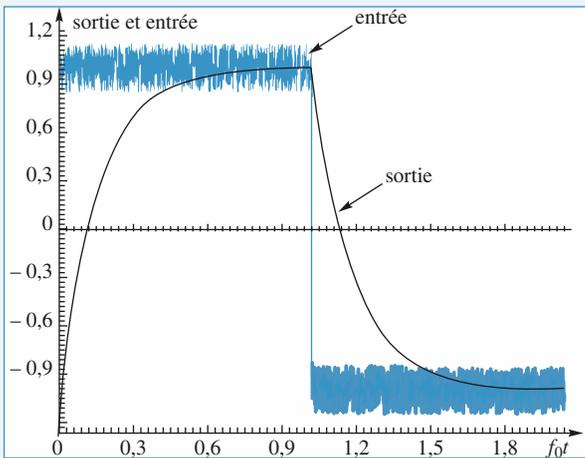


Doc. 2

Remarque : Sur ce graphe, l'amplitude de u_s est surévaluée pour des raisons de lisibilité.



Doc. 3



Doc. 4

4 Réponse d'un circuit (R, L) à un signal sinusoïdal

1 • Le générateur basse fréquence a une résistance de sortie non nulle (en général de l'ordre 50Ω). Le réglage d'amplitude permet de fixer l'amplitude de sa f.e.m. $e(t)$ et non celle de sa tension de sortie $v_e(t) = e(t) - R_s i(t)$.

L'impédance du circuit (R, L) augmente avec la fréquence. Donc l'intensité dans le circuit est plus faible quand la fréquence augmente et la chute de tension due à la résistance de sortie du G.B.F. diminue.

2 • La formule du pont diviseur de tension peut être appliquée pour calculer la relation entre v_e et v_s car le courant allant vers l'oscilloscope est négligeable.

$$\text{D'où : } \frac{v_s}{v_e} = \frac{R}{R + r + jL\omega}$$

Ceci correspond à un filtre passe-bas du premier ordre. Son gain est donné par :

$$\begin{aligned} G_{\text{dB}} &= 20 \log \left(\left| \frac{R}{R + r + jL\omega} \right| \right) \\ &= -10 \log \left(1 + \left(\frac{L\omega}{R+r} \right)^2 \right) - 20 \log \left(1 + \frac{r}{R} \right), \end{aligned}$$

et le déphasage entre v_s et v_e par :

$$\varphi = -\arctan \left(\frac{L\omega}{R+r} \right).$$

L'étude expérimentale donne le tableau suivant :

fréquence (Hz)	10	20	50	100	200
φ (°)	-3	-7	-15	-30	-47
G_{dB}	-0,8	-0,9	-1,2	-2,2	-4,7
fréquence (Hz)	500	1 000	2 000	5 000	10 000
φ (°)	-63	-63	-55	-30	-17
G_{dB}	-11	-17	-24	-36	-46

La valeur théorique du gain à fréquence nulle :

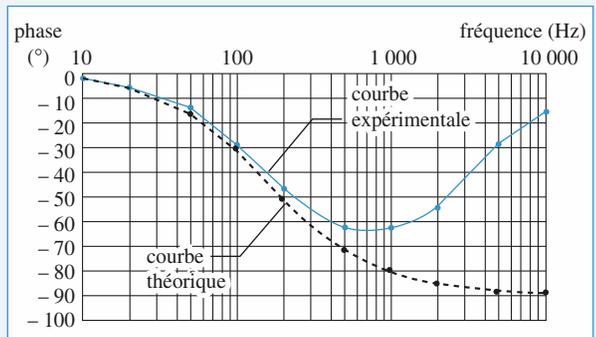
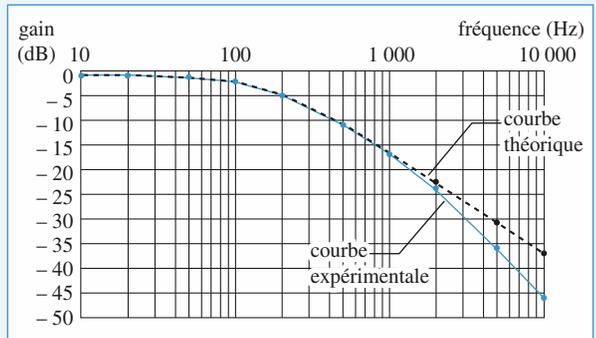
$$-20 \log \left(1 + \frac{r}{R} \right) = -0,8 \text{ dB}$$

correspond effectivement à la valeur expérimentale.

D'après la courbe expérimentale de gain, la fréquence de coupure haute est de 160 Hz environ. Cette valeur permet de calculer la valeur de L . En effet, la valeur théorique de la fréquence de coupure haute à -3 dB correspond à $\frac{L\omega}{R+r} = 1$,

$$\text{d'où : } L = \frac{R+r}{2\pi f_0} \approx 0,11 \text{ H.}$$

On en déduit les tracés des courbes suivantes.



On remarque que les deux courbes de gain sont proches l'une de l'autre jusqu'à 2 000 Hz, puis le gain expérimental devient nettement plus petit que le gain théorique.

Les courbes de phase sont voisines jusqu'à 200 Hz alors qu'ensuite la phase mesurée s'écarte nettement de la courbe théorique et semble tendre vers 0.

La différence entre l'expérience et la théorie provient des propriétés de la bobine.

Une bobine d'inductance 0,1 H contient un noyau ferromagnétique. Lorsque la fréquence augmente, il apparaît des courants (appelés *courants de Foucault*) à l'intérieur de ce noyau conducteur. Ces courants dissipent de la puissance par effet Joule, ce qui a pour effet d'augmenter la résistance r de la bobine, que l'on peut définir par :

$$\mathcal{P}_{\text{dissipée}} = rI^2$$

On considère en général que, pour tenir compte de cet effet, la partie réelle de cette impédance augmente avec la fréquence :

$$\underline{Z} = r(\omega) + jL\omega.$$

5 Détermination des grandeurs caractéristiques d'un filtre

D'après CCP PSI.

On reconnaît la forme canonique d'un filtre passe-bande.

1 • Dans chaque expérience l'oscilloscope est utilisé en mode DC. On observe que le signal $V_e(t)$ a une composante continue – qui est aussi sa valeur moyenne, donc $\frac{V_0}{2}$ – non nulle.

Pour la première expérience $\frac{V_0}{2} = 0,5$ donc $V_0 = 1$ V.

Pour la deuxième $\frac{V_0}{2} = 2$ V donc $V_0 = 4$ V.

Par contre $v_s(t)$ est à valeur moyenne nulle, donc sans composante continue, dans chaque cas : le filtre coupe les composantes de basses fréquences et notamment le continu.

2 • D'après l'oscillogramme et le commentaire : $v_s(t)$ est en « phase » avec $v_e(t)$, elle correspond à la valeur maximale, $v_{s_{\max}}(\omega)$, de l'amplitude et elle est quasisinusoidale.

Nous sommes donc à la fréquence centrale du filtre : $f_0 = f(v_e)$; ce filtre est suffisamment sélectif pour ne laisser passer qu'une fréquence qui est ici celle du fondamental v_{e1} de $v_e(t)$, amplifiée de F_0 :

$$\frac{v_{s_{\max}}}{v_{e1_{\max}}} = F_0 \text{ pour } \omega = \omega_0.$$

On lit sur l'oscillogramme $T = 250 \mu\text{s}$ soit $f(v_e) = 4$ kHz donc $f_0 = 4$ kHz et $\omega_0 = 25,10^3 \text{ rads}^{-1}$.

Enfin $v_{s_{\max}} = 6$ V et la composante du fondamental a une amplitude $v_{e1_{\max}} = \frac{2}{\pi} \cdot V_0$, avec $V_0 = 1$ V (cf. 1)

d'où $F_0 = 9,4$.

3 • a. La tension d'entrée a une période $T = 25 \mu\text{s}$ soit $f(v_e) = 40$ kHz = $10 f_0$; donc le fondamental et les harmoniques de v_e vont se trouver dans l'asymptote HF du filtre.

On aura alors $\underline{E} \approx \frac{1}{j\omega} \frac{F_0 \omega_0}{Q}$ et le filtre est pseudo-intégrateur pour ces fréquences.

C'est bien ce que l'on observe, $v_s(t)$ est triangulaire.

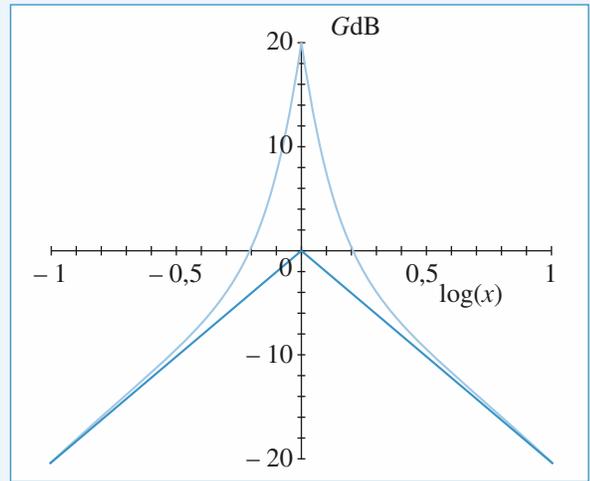
b. Sur une demi-période $|\Delta v_s| = 1,2$ V pour $\Delta v_e = 4$ V.

$$\text{Or } \frac{\Delta v_s}{\Delta v_e} = \frac{F_0 \omega_0}{Q} \cdot \frac{T}{2}, \text{ soit } Q = 9,8.$$

Le tracé ci-après donne $G_{\text{dB}} = f(\log x)$ pour $x \in [-1, +1]$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et les valeurs trouvées ci-dessus ; on voit

que le filtre est très sélectif. Pour $\log x = 1$ donc $f = 10 f_0$ GdB et l'asymptote HF sont bien confondus ce qui justifie *a posteriori* l'intégration de toutes les composantes de v_e dans la deuxième expérience.



6 Déphaseur pur d'ordre 1

1 • L'A.O. étant idéal et fonctionnant en régime linéaire :

$$\frac{v_- - v_e}{R'} = \frac{v_s - v_-}{R'} \text{ d'où } v_- = \frac{v_e + v_s}{2}$$

$$\text{et } v_+ = v_- = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} v_e = \frac{1}{1 + jRC\omega} v_e$$

$$\text{D'où } v_s = \frac{1 - jRC\omega}{1 + jRC\omega} v_e, \text{ soit avec}$$

$$x = \frac{f}{f_0} \text{ et } f_0 = \frac{1}{2\pi RC},$$

$$v_s = \frac{1 - jx}{1 + jx} v_e$$

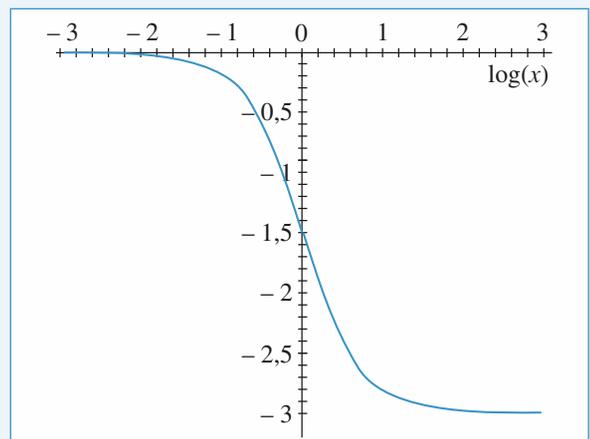
• $G_{\text{dB}} = 0, \forall x$ puisque $|\underline{H}(j\omega)| = 1, \forall x$.

• Si $v_s = V_s e^{j(\omega t + \varphi)}$, alors

$\varphi = -2 \arctan x$ avec φ variant de 0 à $-\pi$ quand x varie de 0 à l'infini, puisque $\sin \varphi$ est négatif.

On trace uniquement $\varphi(\log x)$

Document 1 : Diagramme de BODE en phase du filtre



2 • a. Chaque composante prise indépendamment est transformée par le filtre en une composante de même rang du signal de sortie. Lorsque l'on somme ces composantes de sortie on construit le signal $v_s(t)$.

b. Prenons un exemple pour chaque cas :

• $f = \frac{f_0}{20}$. Considérons l'harmonique de rang 3 :

$$f_3 = 3f = \frac{3f_0}{20}, \text{ soit } \frac{f_3}{f_0} = 0,15 ;$$

$$v_{e3} = -\frac{4}{\pi^2} \frac{\cos(3 \cdot 2\pi ft)}{9} = -0,045 \cos(2\pi \cdot 3ft).$$

En passant dans le filtre, cette composante conserve

son amplitude et est déphasée de $\phi_3 = -0,298 \text{ rad}$ et $v_{s3} = -0,045 \cos[2\pi \cdot 3ft - 0,298]$.

• $f = f_0$. Pour l'harmonique de rang 5 : $f_5 = 5f = 5f_0$ et $\frac{f_5}{f_0} = 1$; $v_{s5} = -0,016 \cos[2\pi 5ft - 2,75]$.

• $f = 20f_0$. Pour le fondamental $f = 20f_0$ soit $x = 20$.
 $v_{s\text{fondamental}} = -0,405 \cos[2\pi ft - 3,04]$.

Les résultats sont rassemblés dans les tableaux ci-dessous et visualisés par les tracés des spectres en fréquence (C_n , rang, $-\phi_n$) qui permettent de voir directement le devenir de chaque composante du signal d'entrée. Les C_n sont les modules des amplitudes de chaque composante.

Documents 2 : Spectres en phase et en fréquence

• Amplitude et déphasage des premiers harmoniques du signal de sortie.

$\frac{f}{f_0}$	Φ_n	C_n
0.05	-0.09	0.405
0.15	-0.29	0.045
0.25	-0.49	0.016
0.35	-0.67	0.008
0.45	-0.84	0.005
0.55	-1.01	0.003

Signal d'entrée triangulaire
de fréquence $f = \frac{f_0}{20}$

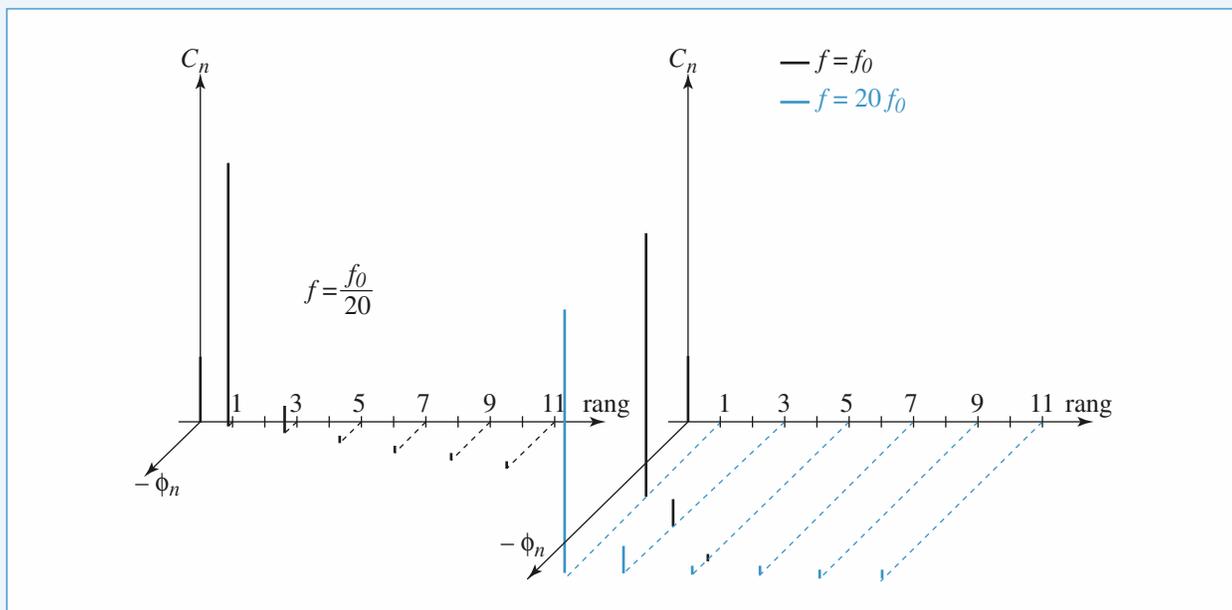
$\frac{f}{f_0}$	Φ_n	C_n
1	-1.57	0.405
3	-2.50	0.045
5	-2.75	0.016
7	-2.86	0.008
9	-2.92	0.005
11	-2.96	0.003

Signal d'entrée triangulaire
de fréquence $f = f_0$

$\frac{f}{f_0}$	Φ_n	C_n
20	-3.04	0.405
60	-3.11	0.045
100	-3.122	0.016
140	-3.127	0.008
180	-3.130	0.005
220	-3.132	0.003

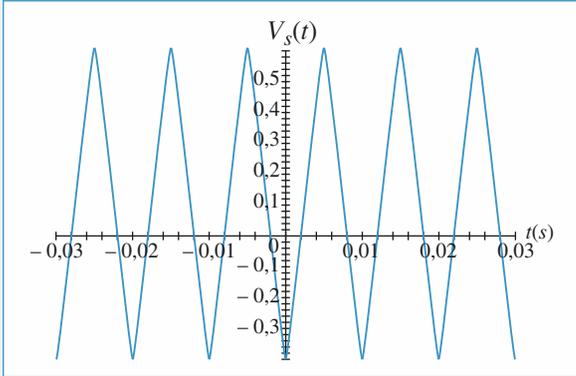
Signal d'entrée triangulaire
de fréquence $f = 20f_0$

• Diagrammes 3D

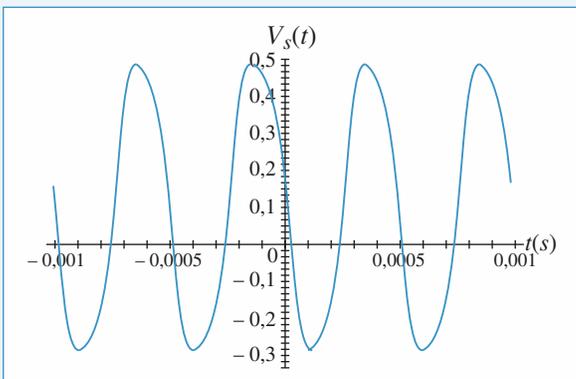


c. Pour reconstruire totalement les signaux, il suffit de calculer et de tracer $v_s(t) = \sum_{p=0}^5 v_{sp}(t) + 0,1$. En effet la composante continue $V_0 = +0,1 \text{ V}$ est transmise sans modification. Les graphes sont données ci-dessous :

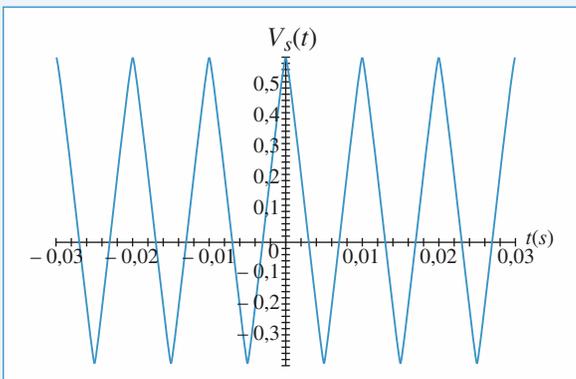
Documents 3



Tracé de $v_s(t)$ pour $f = \frac{f_0}{20}$



Tracé de $v_s(t)$ en fonction de t pour $f = f_0$



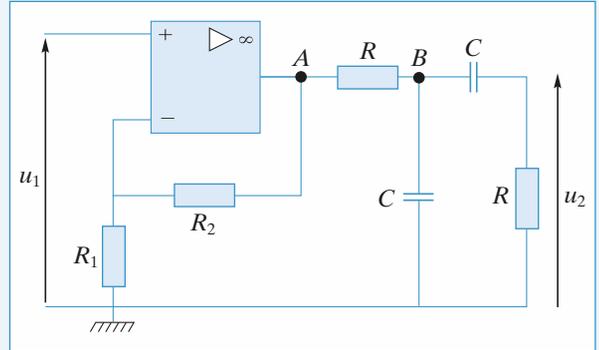
Tracé de $v_s(t)$ en fonction de t pour $f = 20 f_0$

On remarque que :

– 1 Pour $f = \frac{f_0}{20}$ le signal n'est pas modifié par rapport à $v_e(t)$: les principes harmoniques sont peu ou pas déphasés par le filtre.

– Pour $f = 20 f_0$ le signal est déphasé de $-\pi$ par rapport à $v_e(t)$, c'est-à-dire inversé, ce que nous voyons dans le tableau ou le diagramme de phase : les harmoniques sont tous déphasés d'environ $-\pi$.

7 Étude d'un filtre passe-bande



1 • L'amplificateur opérationnel est parfait :

$$i_+ = i_- = 0.$$

Il est supposé fonctionner en régime linéaire : $v_+ = v_-$. Les résistances R_1 et R_2 forment un diviseur de tension, donc :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} u_A.$$

Au nœud B :

$$\frac{u_B - u_A}{R} + jC\omega u_B + jC\omega(u_B - u_2) = 0. \quad (1)$$

Dans la dernière branche, se trouve un autre diviseur de tension :

$$u_2 = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} u_B = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} u_B = \frac{jx}{1 + jx} u_B,$$

$$\text{où } x = RC\omega = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

Dans l'équation (1), on remplace alors u_A et u_B par leurs expressions en fonction de u_1 et u_2 :

$$\frac{1 + jx}{jx} (1 + 2jx)u_2 - jxu_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u_1$$

$$\left(\frac{1}{jx} + 3 + jx\right) u_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1} u_1,$$

$$\text{d'où : } \underline{H}(jx) = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{1}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)},$$

qui s'écrit bien sous la forme demandée :

$$\underline{H}(jx) = \frac{jKx}{1 + 2jkx + (jx)^2}$$

$$\text{avec } K = \frac{R_1 + R_2}{R_1} \text{ et } k = \frac{3}{2}.$$

2 • On considère la première expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{K}{3 + j\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

On a $H(x) = K \left[9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$.

$H(x)$ est maximum pour $x = 1$, c'est-à-dire pour :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

Si $\omega \rightarrow 0$, $H(\omega) \rightarrow 0$.

Si $\omega \rightarrow \infty$, $H(\omega) \rightarrow 0$.

Le montage constitue un filtre passe-bande.

On détermine les bornes de la bande passante qui lui est associée :

Comme $H_{\max} = \frac{K}{3}$ pour $\omega = \omega_0$, les fréquences de

coupure vérifient : $\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = H(x)$, soit

$$\frac{K}{3\sqrt{2}} = K \left[9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{et } 9 \times 2 = 9 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2,$$

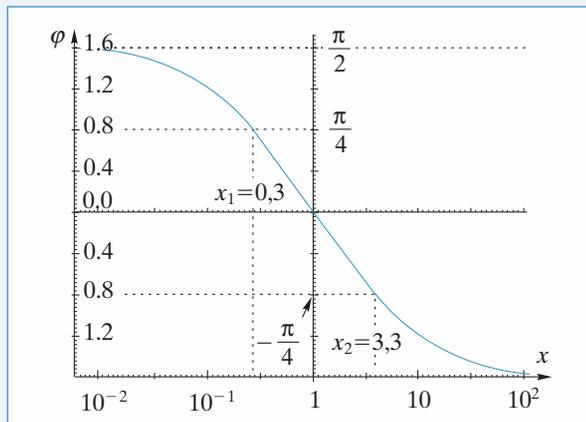
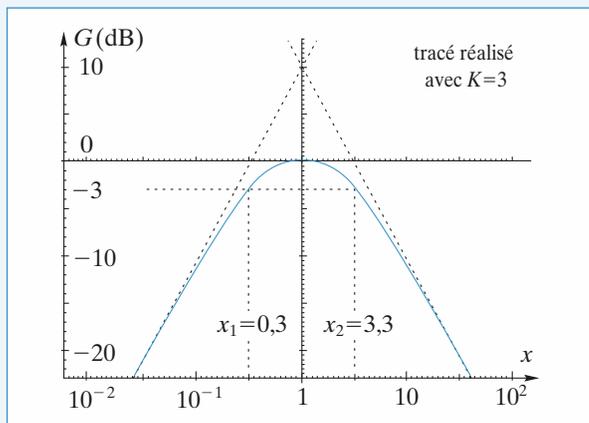
c'est-à-dire $x^2 \pm 3x - 1 = 0$.

Des quatre racines $x = \frac{\pm 3 \pm \sqrt{13}}{2}$, on ne conserve que les

racines positives :

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \text{ soit } x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = 0,3.$$

$$x_2 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \text{ soit } x_2 = \frac{\omega_2}{\omega_0} = 3,3.$$



Soit φ l'argument de $\underline{H}(j\omega)$, il vient :

$$\varphi = -\arctan \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right) \right].$$

Si $x \rightarrow 0$, $\varphi \rightarrow +\frac{\pi}{2}$.

Si $x \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Si $x = 1$, $\varphi = 0$.

Si $x = x_1$, $x - \frac{1}{x} = -3$ et $\varphi = +\frac{\pi}{4}$.

Si $x = x_2$, $x - \frac{1}{x} = 3$ et $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

Le passe-bande obtenu est un filtre à large bande puisque son facteur de qualité est :

$$Q = \frac{1}{2k} = \frac{1}{3} < 1.$$

8 Filtre réjecteur de fréquence

Pour calculer $\underline{H}(j\omega)$, on se place aux nœuds \oplus et \ominus formés des entrées de l'amplificateur opérationnel. L'amplificateur étant parfait, $i_+ = i_- = 0$.

• Au nœud \oplus :

$$\frac{v_+ - v_e}{R + \frac{1}{jC\omega}} + \frac{v_+ - 0}{\frac{R}{1 + jRC\omega}} = 0$$

$$\Rightarrow jRC\omega(v_+ - v_e) + (1 + jRC\omega)^2 v_+ = 0.$$

$$\Rightarrow (1 - x^2 + 3jx)v_+ = jxv_e, \text{ avec } x = RC\omega.$$

• Au nœud \ominus :

$$\frac{v_- - v_e}{R_1} + \frac{v_- - v_s}{R_2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)v_- - \frac{R_2}{R_1}v_e = v_s.$$

Soit, avec $R_1 = 2R_2$: $3v_- - v_e = 2v_s$.

L'amplificateur fonctionne en régime linéaire, c'est-à-dire $u_+ = u_-$. Donc :

$$\frac{3jx}{1-x^2+3jx} u_e - u_e = 2u_s$$

$$(x^2-1)u_e = 2(1-x^2+3jx)u_s$$

d'où :

$$\underline{H}(jx) = \frac{x^2-1}{2(1-x^2+3jx)}$$

et :

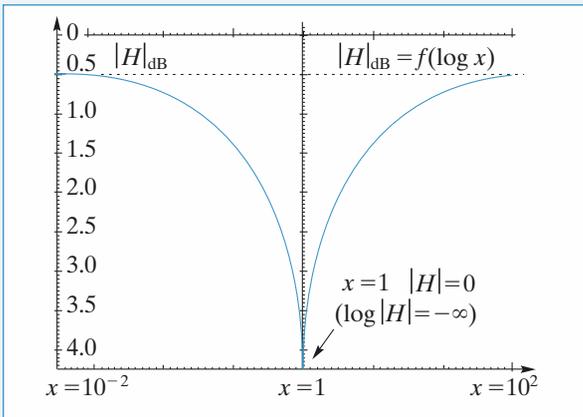
$$H(x) = \frac{|x^2-1|}{2[(1-x^2)^2+9x^2]^{\frac{1}{2}}}$$

Si $x \rightarrow 0$, $H(x) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Si $x \rightarrow \infty$, $H(x) \rightarrow \frac{1}{2}$.

Si $x = 1$, $H(x) = 0$.

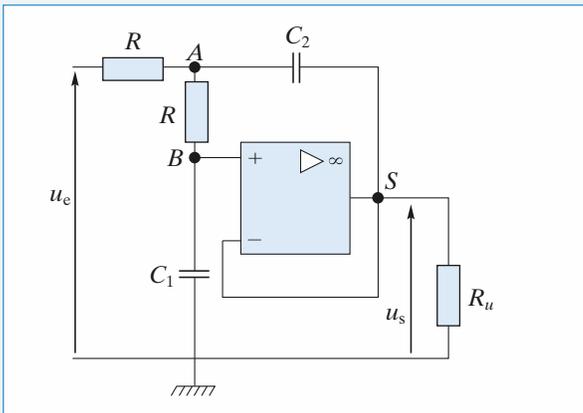
L'allure de $H(x)$ est donnée par la courbe suivante.



La pulsation $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ est totalement éliminée par le filtre.

On a un filtre réjecteur de la fréquence $f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

9 Filtre de Butterworth



1 • On écrit la loi des nœuds en notation complexe aux nœuds A et B.

• Au nœud A :

$$\frac{u_A - u_e}{R} + \frac{u_A - u_B}{R} + (u_A - u_s)jC_2\omega = 0.$$

• Au nœud B :

$$\frac{u_B - u_A}{R} + u_B jC_1\omega = 0.$$

De plus, le régime étant supposé linéaire, on a :

$$u_B = u_- = u_s,$$

soit
$$\begin{cases} u_A(2 + jRC_2\omega) = u_e + u_s(1 + jRC_2\omega) \\ u_s(1 + jRC_1\omega) = u_A \end{cases}$$

ou encore, en posant $x = RC_1\omega$ et $k = \frac{C_2}{C_1}$:

$$u_A(2 + jkx) = u_e + u_s(1 + jkx)$$

$$u_s(1 + jx) = u_A.$$

$$u_s(1 + jx)(2 + jkx) - (1 + jkx)u_s = u_e.$$

$$\underline{H}(jx) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 - kx^2 + 2jx}.$$

Le filtre étudié est un passe-bas d'ordre 2.

2 • $|\underline{H}(jx)| = ((1 - kx^2)^2 + 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$.

$$|\underline{H}(jx)| = (1 + k^2x^4 + 4x^2 - 2kx^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Pour obtenir le résultat demandé, il faut annuler le terme en x^2 , ce qui revient à choisir $k = 2$, c'est-à-dire $C_2 = 2C_1$.

Alors : $|\underline{H}(jx)| = (1 + k^2x^4)^{-\frac{1}{2}} = (1 + 4x^4)^{-\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow |\underline{H}(j\omega)| = \left(1 + \frac{\omega^4}{\omega_0^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{RC_1\sqrt{2}}.$$

Au maximum, $|\underline{H}(j\omega)| = 1$, cette valeur étant obtenue pour $\omega = 0$.

La pulsation de coupure du montage ω_c est telle que :

$$|\underline{H}(j\omega_c)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

soit :
$$(1 + 4R^4 C_1^4 \omega_c^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

D'où $4R^4 C_1^4 \omega_c^4 = 1$ et $\omega_c = \omega_0$.

Un filtre passe-bas de Butterworth est un filtre passe-bas dont la propriété caractéristique est d'avoir une courbe de réponse en gain la plus proche possible (pour un ordre donné) de son asymptote horizontale en basse fréquence.

10 Dérivateur à amplificateur opérationnel réel

1 • La loi des nœuds à l'entrée « - » donne :

$$jC\omega(u_e - u_-) + \frac{u_s - u_-}{R} = 0.$$

Donc, avec $v_+ = 0$:

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= - \frac{jRC\omega}{1 + \frac{1}{\mu_0} + \left(\frac{RC}{\mu_0} + \frac{1}{2\pi f_0}\right)j\omega - \frac{RC\omega^2}{2\pi f_0}} \\ &\approx - \frac{jRC\omega}{1 + \frac{j\omega}{2\pi f_0} - \frac{RC\omega^2}{2\pi f_0}} \end{aligned}$$

Ceci correspond à un filtre passe-bande de deuxième ordre dont les éléments caractéristiques sont le gain maximal, la fréquence de résonance et le coefficient de qualité.

La pulsation de résonance est donnée par :

$$1 - \frac{RC}{2\pi f_0} \omega_r^2 = 0,$$

$$\text{soit } \omega_r = \sqrt{\frac{2\pi f_0}{RC}}, \quad f_r = \sqrt{\frac{f_0}{2\pi RC}} \quad \text{et } Q = \sqrt{2\pi f_0 RC}.$$

A.N. : $f_r = 12,6$ kHz et $Q = 25$.

Le gain maximal est obtenu à la fréquence de résonance :

$$G_{\max} = 20 \log(2\pi RC f_0) \approx 76 \text{ dB}.$$

Ce montage présente une résonance aiguë à environ 13 kHz. Ceci explique la réponse du montage à un signal triangulaire. Il y a en effet une trop grande amplification des harmoniques de fréquence voisine de 13 kHz.

Cette réponse peut être aussi interprétée à l'aide du régime transitoire pseudo-périodique amorti du filtre résonnant :

Pour un filtre résonnant, le temps caractéristique de décroissance est lié à la fréquence de résonance et au facteur de qualité par $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{Q}{\pi f_0}$. Le coefficient de qualité du filtre est

de 25, la fréquence de résonance de 13 kHz. Le temps caractéristique est de 0,6 ms, non négligeable devant la période du signal : le régime transitoire est bien visible.

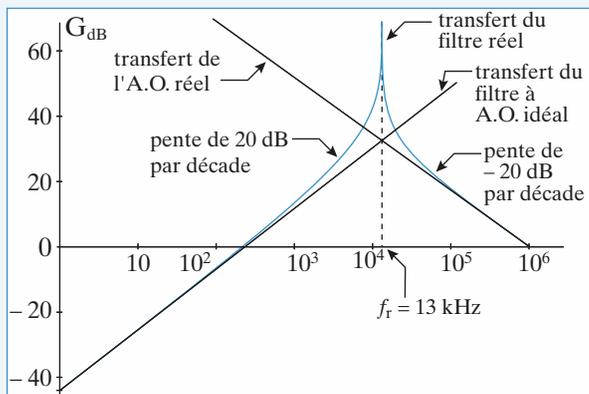


Diagramme de Bode du montage dérivateur.

2 • On remplace le condensateur C par R' en série avec C .

Il suffit donc de remplacer $\frac{1}{jC\omega}$ par :

$$R' + \frac{1}{jC\omega} = \frac{1 + jR'C\omega}{jC\omega}, \text{ dans l'expression de la}$$

fonction de transfert du montage :

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= - \frac{jRC\omega}{1 + \frac{1}{\mu_0} + \left(\frac{(R+R')C}{\mu_0} + R'C + \frac{1}{2\pi f_0}\right)j\omega - \frac{(R+R')C\omega^2}{2\pi f_0}} \end{aligned}$$

Cette expression se simplifie si $R \gg R'$, $\mu_0 \gg 1$ et

$$f_0 \gg \frac{RC}{\mu_0} :$$

$$\underline{H}(j\omega) \approx - \frac{jRC\omega}{1 + \left(R'C + \frac{1}{2\pi f_0}\right)j\omega - \frac{RC\omega^2}{2\pi f_0}}$$

La fréquence de résonance du filtre n'est pas modifiée. Son facteur de qualité est :

$$Q' = \frac{1}{R'C + \frac{1}{2\pi f_0}} \sqrt{\frac{RC}{2\pi f_0}}$$

$$Q' = \frac{1}{2} \text{ donne } R' = \frac{1}{C} \left(2\sqrt{\frac{RC}{2\pi f_0}} - \frac{1}{2\pi f_0} \right) \approx 250 \Omega.$$

Dans ce cas, le régime transitoire est réduit au maximum, le temps caractéristique est de l'ordre de $\frac{1}{\omega_0} \approx 10 \mu\text{s}$, négligeable pour un signal de fréquence 100 Hz. Le signal de sortie est alors pratiquement la dérivée du signal d'entrée, soit un signal créneau.

En effet le fondamental et les premiers harmoniques ont une fréquence inférieure à 1 kHz, faible devant 13 kHz. Donc toutes les composantes « importantes » du signal d'entrée sont dans l'asymptote basse fréquence du filtre où

$\underline{H}(j\omega) \approx -jRC\omega$, ce qui correspond à une dérivation de toutes les composantes.

11 Oscillateur quasi sinusoïdal de Colpitts

1 • Entre le nœud A_1 et la masse se trouve une impédance \underline{Z} résultant de la mise en parallèle de l'inductance L et de la

capacité $C \left(\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$, donc $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$. La

résistance R et l'impédance \underline{Z} forment un diviseur de tension :

$$\frac{u_{1m}}{u_{em}} = \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\underline{Z}}} = \frac{1}{1 + R \left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega \right)}$$

De même, les deux condensateurs forment un diviseur de tension :

$$\frac{u_{sm}}{u_{1m}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega}} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{C}{C_2}.$$

En multipliant membre à membre les deux relations précédentes, on obtient la fonction de transfert du filtre :

$$\begin{aligned} H(j\omega) = \frac{u_{sm}}{u_{em}} &= \frac{\frac{C}{C_2}}{1 + R\left(\frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right)} \\ &= \frac{K}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_C} - \frac{\omega_C}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

en notant $K = \frac{C}{C_2} < 1$, $\omega_C = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

et $Q = RC\omega_C = \frac{R}{L\omega_C} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

Le filtre est un *passé-bande* d'ordre deux, dont la pulsation centrale est ω_C , l'amplification maximale K et le facteur de qualité Q .

• On note que :

– la résistance R permet de contrôler le facteur de qualité Q sans modification de la pulsation centrale ω_C et de l'amplification maximale K ;

– les tensions u_e et u_s sont en phase pour $\omega = \omega_C$.

• On détermine les valeurs asymptotiques du gain G et du déphasage φ en basse fréquence :

$$G_{BF} = 20 \log\left(\frac{K}{Q}\right) + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

et $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$,

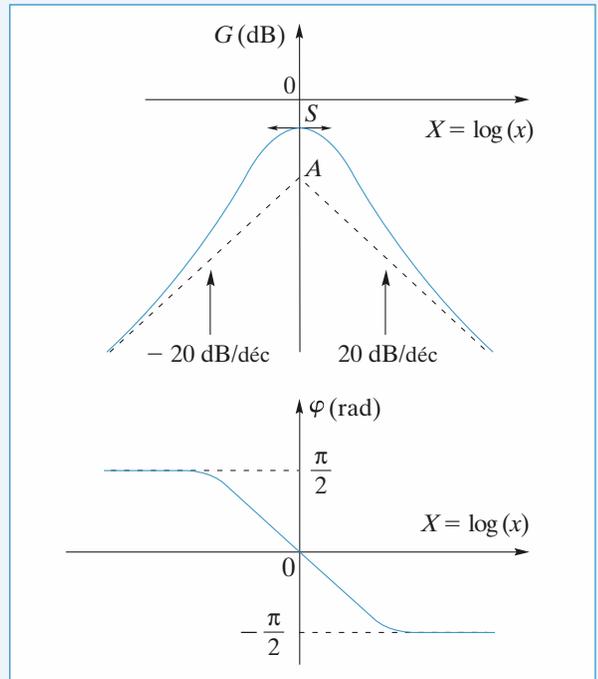
puis en haute fréquence :

$$G_{HF} = 20 \log\left(\frac{K}{Q}\right) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)$$

et $\varphi_{HF} = -\frac{\pi}{2}$.

On pose $x = \frac{\omega}{\omega_C}$ et $X = \log(x)$. Le point de concours des asymptotes de gain, dans les axes de Bode, est en $A(X=0, G = 20 \log \frac{K}{Q})$ et le maximum de la courbe de gain est en $S(X=0, G = 20 \log K)$.

Le diagramme de Bode est donné ci-après, dans l'hypothèse $Q > 1$.



2 • L'amplificateur non inverseur établit entre les tensions $u_s(t)$ et $u'_s(t) = u_c(t)$ la relation :

$$\frac{u'_sm}{u_{sm}} = \frac{u_{em}}{u_{sm}} = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$$

obtenue en utilisant le diviseur de tension réalisé avec R_1 et R_2 .

3 • La relation entre u'_s et u_e s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{u'_sm}{u_{em}} = \frac{u'_sm}{u_{sm}} \frac{u_{sm}}{u_{em}} &= \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{K}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_C} - \frac{\omega_C}{\omega}\right)} \\ &= \frac{R_1 + R_2}{R_1} \frac{K \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_C}\right)}{1 + \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_C}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_C}\right)^2}, \end{aligned}$$

d'où, en remarquant que $u'_sm = u_{em}$:

$$\begin{aligned} u'_sm + \frac{1}{Q} \left(\frac{j\omega}{\omega_C}\right) u'_sm + \left(\frac{j\omega}{\omega_C}\right)^2 u'_sm \\ = K \frac{1}{Q} \frac{R_1 + R_2}{R_1} \left(\frac{j\omega}{\omega_C}\right) u'_sm \end{aligned}$$

ce qui donne, en notation réelle et après multiplication par ω_C^2 :

$$\frac{d^2 u'_s}{dt^2} + \frac{\omega_C}{Q} \left(1 - K \frac{R_1 + R_2}{R_1}\right) \frac{du'_s}{dt} + \omega_C^2 u'_s = 0.$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 2, linéaire, à coefficients constants et avec un second membre nul.

Le régime libre est stable s'il converge vers 0, soit si le coefficient du second terme est positif.

- 4 • La condition de stabilité s'écrit encore $R_2 < R_1 \frac{C_2}{C_1}$.

Avec la notation proposée, nous obtenons une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2 u'_s}{dt^2} - x \frac{\omega_c C}{QC_1} \frac{du'_s}{dt} + \omega_c^2 u'_s = 0.$$

a) On est dans la situation d'un régime juste stable. $|x|$ étant très petit devant 1, il vient :

$$u'_s(t) \approx \frac{u'_s(0)}{\cos \varphi} \exp \frac{-t}{\tau} \cos (\omega_c t + \varphi) \text{ avec } \tau = \frac{2QC_1}{C\omega_c|x|}.$$

La valeur initiale étant elle-même très petite, u'_s reste quasi nulle : on n'observe rien.

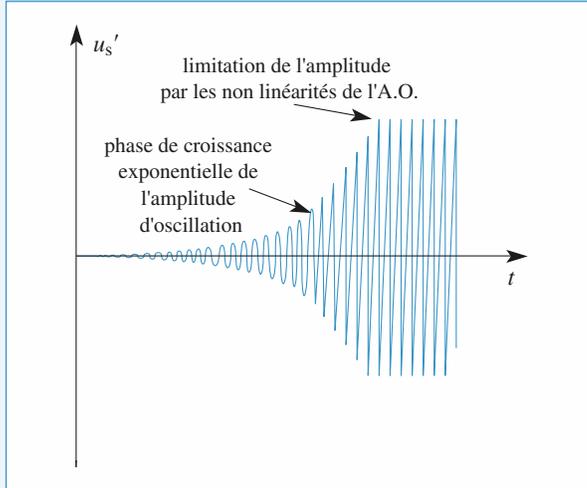
b) On est dans la situation d'un régime juste instable.

x étant très petit devant 1, il vient :

$$u'_s(t) \approx \frac{u'_s(0)}{\cos \varphi} \exp \frac{t}{\tau} \cos (\omega_c t + \varphi) \text{ avec } \tau = \frac{2QC_1}{C\omega_c x}.$$

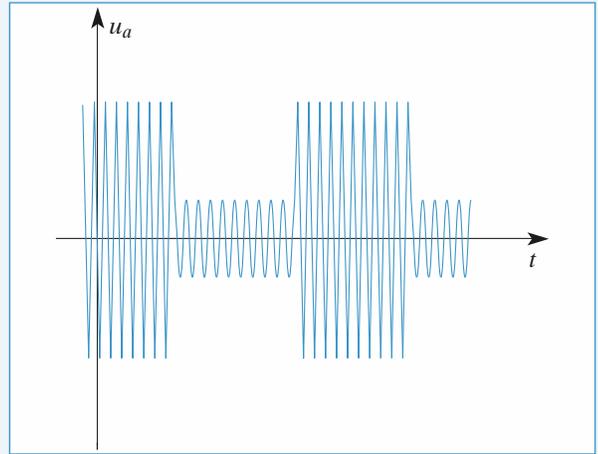
On observe donc des oscillations quasi sinusoïdales de pulsation ω_0 , dont l'amplitude croît exponentiellement.

En fait, dès que u'_s atteint la tension de saturation de l'A.O., le montage retrouve un comportement stable : de façon non linéaire, l'amplitude reste limitée. On a alors réalisé un générateur d'oscillations quasi sinusoïdales d'amplitude voisine de V_{sat} et de pulsation proche de ω_0 .



13 Modulation d'amplitude et démodulation

1 • $u_a(t)$ représente « l'amplitude variable » d'une sinusoïde de pulsation ω_p .



- 2 • $u(t) = U[1 + \alpha U_a \cos (\omega_a t)] \cos (\omega_p t)$.

Soit :

$$u(t) = U \cos (\omega_p t) + \frac{\alpha U U_a}{2} \cos [(\omega_p + \omega_a)t] + \frac{\alpha U U_a}{2} \cos [(\omega_p - \omega_a)t].$$

3 • Pour un filtre passe-bande d'ordre 2, la largeur Δf de la bande passante à -3 dB est :

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}.$$

On en déduit $Q = 10$.

Remarque : On ne peut pas accroître la sélectivité du filtre, car celui-ci doit laisser passer de façon satisfaisante les trois composantes de u_1 dont les fréquences sont : 190 kHz, 200 kHz et 210 kHz.

• Pour $f_{p2} = 400 \text{ kHz} = 2 f_{p1}$:

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + 100 \left(2 - \frac{1}{2}\right)^2}} = 0,067 \text{ ou } G_{(\text{dB})} = -24 \text{ dB}.$$

Les signaux correspondant au signal u_2 sont assez fortement atténués par rapport au signal u_1 : la détection est donc convenablement sélective, un seul canal est conservé.

• Pour $f_{p2} = 220 \text{ kHz} = 1,1 f_{p1}$:

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{1 + 100 \left(2 - \frac{1}{1,1}\right)^2}} = 0,46 \text{ ou } G_{(\text{dB})} = -7 \text{ dB}.$$

Les composantes du signal u_2 sont faiblement atténuées par rapport au signal u_1 . Le récepteur ne peut sélectionner le signal u_1 : dans la bande des fréquences utilisables, on ne peut placer qu'un nombre limité de fréquences porteuses.

- 4 • $u_s = k \left\{ U \cos (\omega_p t) + \frac{\alpha U U_a}{2} [(\omega_p + \omega_a)t] + \frac{\alpha U U_a}{2} \cos [(\omega_p - \omega_a)t] \right\} \cos (\omega_p t + \varphi)$

Pour étudier l'action d'un filtre sur u_s , il faut le décomposer en fonctions sinusoïdales :

$$u_s(t) = \frac{kU}{2} \cos(2\omega_p t + \varphi) + \frac{kU}{2} \cos(\varphi) + \frac{k\alpha U U_a}{4} \cos[(2\omega_p + \omega_a)t + \varphi] + \frac{k\alpha U U_a}{4} \cos[\omega_a t - \varphi] + \frac{k\alpha U U_a}{4} \cos[(2\omega_p - \omega_a)t + \varphi] + \frac{k\alpha U U_a}{4} \cos[\omega_a t + \varphi]$$

Avec un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure est supérieure à f_a et très inférieure à f_p on ne garde que le terme constant et les deux termes de pulsation ω_a .

Par exemple, avec un passe-bas d'ordre 1 de fréquence de coupure égale à 20 kHz, on obtient à la sortie de ce filtre :

$$u'_s(t) \approx \frac{kU}{2} \cos(\varphi) + \frac{k\alpha U U_a}{4} \cos[\omega_a t - \varphi] + \frac{k\alpha U U_a}{4} \cos[\omega_a t + \varphi].$$

Soit :

$$u'_s(t) \approx \frac{kU}{2} \cos(\varphi) [1 + \alpha U_a \cos(\omega_a t)].$$

On élimine enfin la composante constante avec un filtre passe-haut de très faible fréquence de coupure (quelques hertz). À la sortie de ce filtre, on obtient finalement :

$$u''_s(t) \approx \frac{kU}{2} \cos(\varphi) \alpha U_a \cos(\omega_a t).$$

On retrouve bien un signal de sortie proportionnel au signal audio, en $U_a \cos(\omega_a t)$: la démodulation de l'amplitude du signal radio a été réalisée.

Remarque : En fait, ce dispositif simple fonctionne mal car il n'est pas possible d'obtenir directement un signal $u_d(t)$ rigoureusement synchrone de $u_p(t)$. La phase φ évolue lentement, ce qui fait varier aléatoirement le niveau du signal issu des filtres (phénomène de fading).

On y remédie en asservissant la fréquence de $u_d(t)$ par une boucle à verrouillage de phase. Mais ceci est une autre histoire.

13 Étude d'un filtre grâce à un logiciel de calcul formel

1 • 1. Fonction de transfert ; diagramme de Bode ; résonance.

> restart;

Entrons et résolvons le système d'équations algébriques complexes :

> Eq1:=s/3-v=0;

> Eq2:=va-v*(1+I*R*C*omega)=0;

> Eq3:=-va*(2+n*I*R*C*omega)+e+v+n*I*R*C*omega*s=0;

> Eq:={Eq1,Eq2,Eq3};

> sol:=solve(Eq,{v, va,e});

> assign(sol);

Les solutions sont maintenant explicitées et utilisables directement par leur assignation ; on peut calculer la fonction de transfert :

> H1:=simplify(s/e);

Faisons apparaître la variable réduite x :

> H:=subs(omega=x/(sqrt(n)*R*C),H1);

$$H := - \frac{3}{-1 - 2 \frac{Ix}{\sqrt{n}} + 2 I\sqrt{nx} + x^2}$$

match(H=H0/(1+(I/Q)*x-x^2),x,'S');S;

$$\left\{ Q = - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{n-1}, H_0 = 3 \right\}$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un passe-bas d'ordre 2. Le facteur de qualité peut être d'une part positif ou négatif suivant que n est plus grand ou plus petit que 1 et d'autre part supérieur ou inférieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et donc présenter

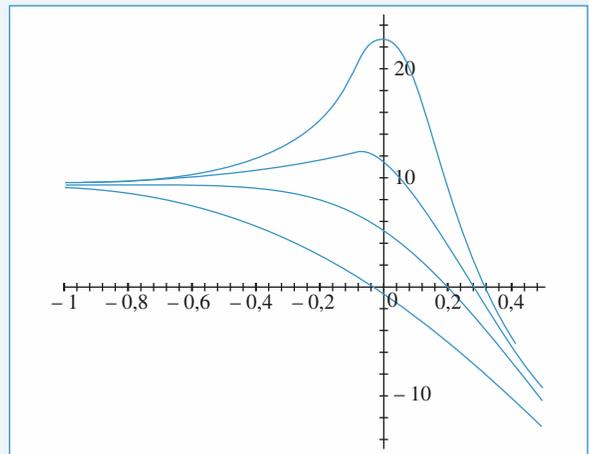
ou non une résonance. C'est ce dernier point que nous allons étudier d'abord en considérant $n < 1$, donc Q positif.

2. Diagramme de Bode :

> GdB:=20*log10(abs(H));

> graph:=seq(subs(n=0.225*i,x=10^y,GdB),i=1..4);

> plot({graph},y=-1..0.5,-15..25,color=blue);



Les courbes présentent une résonance pour $n = 0.675$ et $n = 0.9$ (ce qui correspond bien à des valeurs de Q supérieures à 0.707, voir ci-dessous). Attention les courbes ci-dessus sont toutes tracées en fonction de x , mais il ne faut pas oublier, s'il l'on rétablit la pulsation, que ω_0 est fonction de n .

3. Détermination de la pulsation de résonance :

> restart;assume(x>0);assume(n>0);

> H:=(x,n)->abs(3/(1+(I/(-1/2*n^(1/2)/(-1+n)))*x-x^2));

Après avoir redéfini la fonction de transfert on cherche à quelle condition il existe un maximum en x (donc en fréquence) de cette fonction :

> racines:=solve(diff(H(x,n),x)=0,x);

$$\text{racines} := 0, \frac{\sqrt{-(-5n\sim + 2 + 2n\sim^2)n\sim}}{n\sim},$$

$$- \frac{\sqrt{-(-5n\sim + 2 + 2n\sim^2)n\sim}}{n\sim}$$

Seule la valeur strictement positive de x est acceptable, puisqu'elle seule peut définir une fréquence positive associée à un maximum de GdB. Il faut cependant que le terme sous la racine soit positif :

> valeursn:=evalf([solve(-n*(-5*n+2+2*n^2)>0,n)]);

$$\text{valeursn} := \left[\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(0)), \right.$$

$$\left. \text{RealRange}\left(\text{Open}\left(\frac{1}{2}\right), \text{Open}(2)\right) \right]$$

On ne garde que les valeurs de n comprises entre zéro et un donc l'intervalle ouvert $]0.5; 1[$. On a donc résonance pour tout n compris entre 0 et 1 donc pour tout Q supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La pulsation de résonance vaut : $(1/n)*(-n*(-5*n+2+2*n^2))^{(1/2)}$. Ainsi pour $n = 0.9$, $x = 0.99$ et pour $n = 0.675$, $x = 0.83$.

Traçons alors le gain et les asymptotes pour la valeur critique $n = 0.5$:

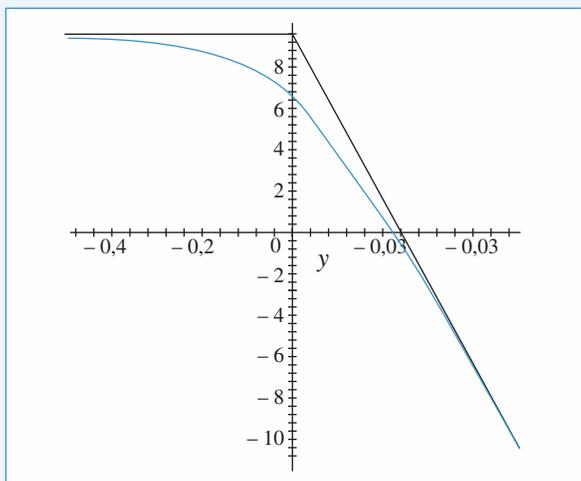
> Asympt:=40*log10(x)+20*log10(3);

> plot1:=plot(subs(n=0.5,x=10^y,Asympt),y=0..0.5,color=black);

> plot2:=plot(subs(n=0.5,x=10^y,20*log10(3/abs(-1-2*I*x/0.5^(1/2)+2*I*0.5^(1/2)*x+x^2))),y=-0.5..0.5,color=blue);

> plot3:=plot(20*log10(3),y=-0.5..0,color=black);

> with(plots):display([plot1,plot2,plot3]);



La courbe est ici très proche de ces asymptotes.

2 • Réponse à un échelon de tension

> restart:Q:=n->-1/2*n^(1/2)/(-1+n);omega0:=n->1/(R*C*sqrt(n));

$$Q := n \rightarrow -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{n}}{-1+n}$$

$$\omega_0 := n \rightarrow \frac{1}{RC\sqrt{n}}$$

Une fois définies les deux fonctions de n présentes dans la fonction de transfert, on écrit l'équation différentielle associée :

> Eq:=s(t)+1/(omega0(n)*Q(n))*diff(s(t),t)+1/(omega0(n)^2)*diff(s(t),t\$2)=3*c(t);

$$Eq := s(t) - 2RC(-1+n) \left(\frac{\partial}{\partial t} s(t) \right) + R^2 C^2 n \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} s(t) \right) = 3e(t)$$

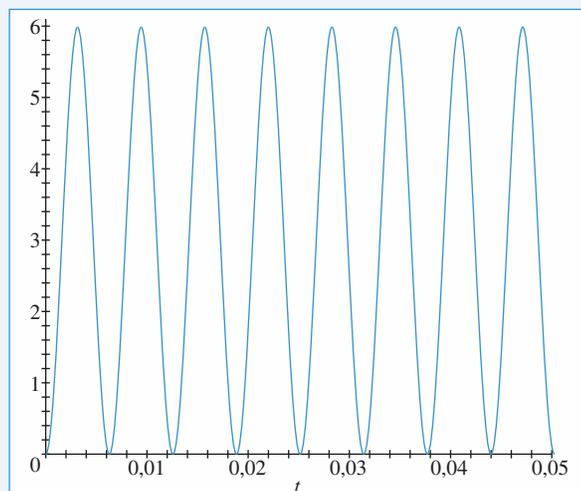
On assigne à R, C leurs valeurs et on résout l'équation différentielle :

> R:=1000:C:=1e-6:e:=t->1;

> sol:=dsolve({Eq,s(0)=0,D(s)(0)=0},{s(t)});

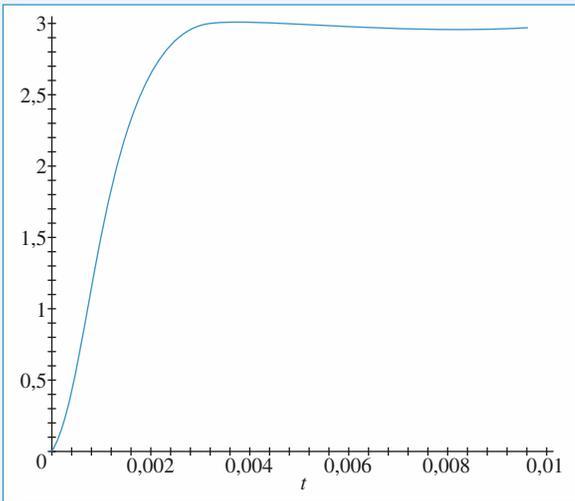
> assign(sol);

> n:=1:plot(s(t),t=0..0.05,thickness=1,color=blue);



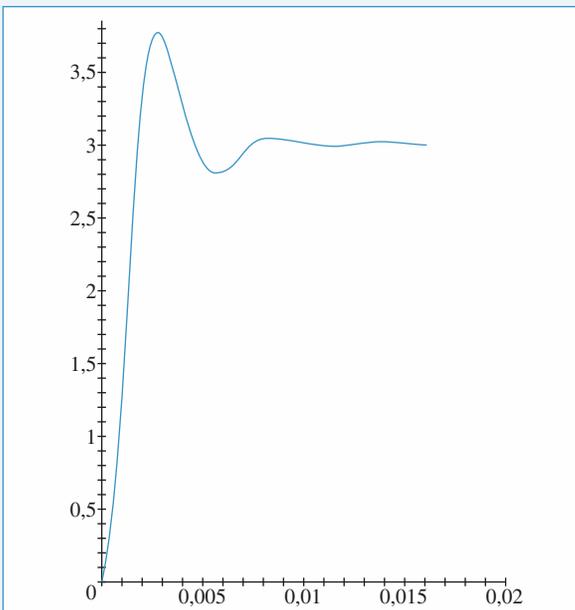
n est égal à 1, le régime est quasisinusoïdal : en effet le terme en $\frac{d(s)}{dt}$ est nul et l'équation différentielle est celle d'un oscillateur harmonique non amorti.

> n:=0.45:plot(s(t),t=0..0.01,thickness=1,color=blue);



n est inférieur à 0.5. Le régime est stable, apériodique et tend vers le régime permanent $s(t) = 3$ V quel que soit t .
Pour des valeurs de n comprises entre 0.5 et 1 :

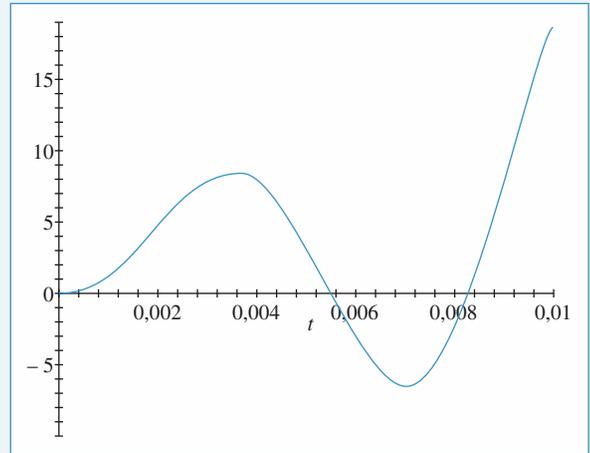
> `n:=0.675;plot(s(t),t=0..0.02,thickness=1,color=blue);`



Le régime est toujours stable, mais le régime permanent est cette fois atteint de manière pseudo périodique, ce qui est à mettre en parallèle avec l'existence d'un résonance (voir première partie).

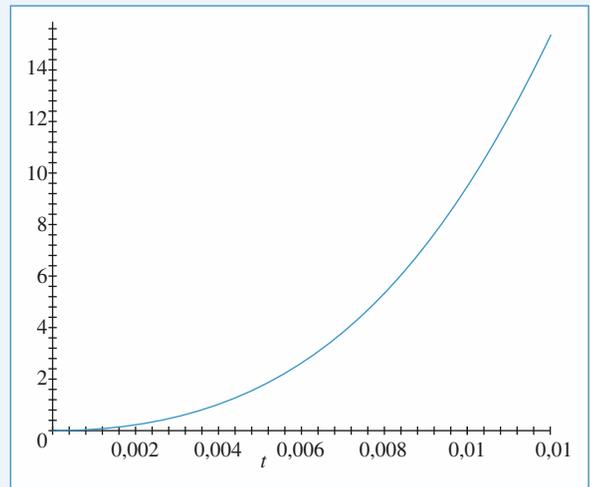
Pour une valeur de n supérieure à 1 :

> `n:=1.2;plot(s(t),t=0..0.01,thickness=1,color=blue);`



Lorsque $n > 1$, la solution diverge et le montage est instable : l'A.O. finira donc toujours par saturer, d'autant plus vite que n est différent de 1 :

> `n:=2;plot(s(t),t=0..0.003,thickness=1,color=blue);`



Électromagnétisme

1 ■ Distributions, champ et potentiel électrostatiques	413
2 ■ Le champ magnétique permanent	438
3 ■ Dipôles électrique et magnétique	462
4 ■ Force de Lorentz	485

1

Distributions, champ et potentiel électrostatiques

LES OBJECTIFS

- Choisir un modèle de description des distributions de charges.
- Maîtriser l'étude des symétries et invariances d'une distribution de charges.
- Calcul de \vec{E} , V .

LES PRÉREQUIS

- Notions d'électricité vues dans le cycle secondaire.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Construction du symétrique d'un vecteur.
- Opérations de symétrie.
- Dérivation – Intégration.

ESSENTIEL

Charge électrique

- La *charge* d'une particule est une grandeur réelle, positive ou négative, qui caractérise son comportement vis-à-vis de l'interaction électromagnétique.
- L'unité de charge du Système International est le coulomb (*symbole* : C).
- Les charges observées sont toujours des multiples entiers de la charge élémentaire e , égale à $1,6 \cdot 10^{-19}$ C. La charge d'un électron est $-e$ et celle d'un proton est $+e$.
- Pour un système fermé, c'est-à-dire qui n'échange pas de matière avec l'extérieur, la charge électrique reste constante.

Champ électrostatique

- L'électrostatique étudie les interactions électriques entre des distributions de charges immobiles (ou en mouvement infiniment lent).
- Une particule de charge q et de position M en présence d'une distribution \mathcal{D} est soumise à une force \vec{F} telle que :

$$\vec{F} = q \vec{E}(M),$$

$\vec{E}(M)$ est le *champ électrostatique* (ou champ électrique) créé par \mathcal{D} au point M .

- En un point, les champs électrostatiques créés par plusieurs distributions se superposent. Cette propriété, appelée *principe de superposition*, est à la base des calculs de champ.

Champ créé par une distribution de charges

Loi de Coulomb

- Le champ électrostatique créé en M par une particule de charge q , située en P , a pour expression :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

avec \vec{e}_{PM} vecteur unitaire orienté de P vers M .

- La constante ϵ_0 est appelée *permittivité électrique* du vide.

$$\epsilon_0 \approx 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \text{ (farad par mètre) et } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9 \cdot 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1} \text{ (valeur à retenir).}$$

• Principe du calcul

On décompose le système en particules ponctuelles, ou en éléments infinitésimaux de position donnée. On somme ensuite les **vecteurs** champs électrostatiques créés par chacun de ces éléments.

• Ensemble de charges ponctuelles

N charges q_i situées aux points P_i créent en M un champ :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i \vec{e}_{P_i M}}{P_i M^2}.$$

• Distribution volumique

Lorsque la charge électrique est répartie de façon continue dans un volume, on définit une *densité volumique de charge électrique* ρ .

- La charge dq contenue dans un élément de volume $d\tau_p$, situé au voisinage du point P , est :

$$dq = \rho(P) d\tau_p.$$

- Le champ créé par une distribution \mathcal{D} chargée en volume est, par superposition :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\mathcal{D}} \frac{\rho(P) \vec{e}_{PM}}{PM^2} d\tau_p.$$

• Distribution surfacique

Lorsque la charge électrique est répartie de façon continue sur une surface, on définit une *densité surfacique de charge électrique* σ .

- La charge dq contenue sur une surface élémentaire d'aire dS_p , située au voisinage du point P , est $dq = \sigma(P) dS_p$.

- Le champ créé par une distribution \mathcal{D} chargée en surface est, par superposition :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_{\mathcal{D}} \frac{\sigma(P) \vec{e}_{PM}}{PM^2} dS_p.$$

• Distribution linéique

Lorsque la charge électrique est répartie de façon continue sur un fil, on définit une *densité linéique de charge électrique* λ .

- La charge dq contenue sur un tronçon élémentaire de longueur $d\ell_p$, situé au voisinage du point P , est $dq = \lambda(P) d\ell_p$.

- Le champ créé par un fil chargé est, par superposition :

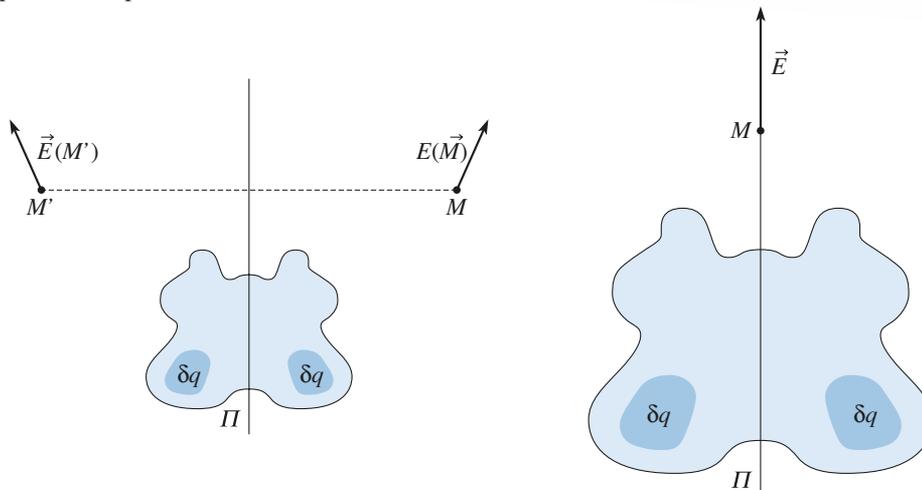
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{fil}} \frac{\lambda(P) \vec{e}_{PM}}{PM^2} d\ell_p.$$

• Symétries du champ

- Une isométrie (rotation, translation ou symétrie) qui laisse invariant le système de charges laisse également invariant le champ électrique. Le champ électrique, qui a les mêmes symétries que le système qui le crée, a les propriétés d'un *vecteur polaire* ou *vecteur « vrai »*.

- Au point M et M' symétriques par rapport à un plan-miroir Π d'une distribution de charges \mathcal{D} , les champs électrostatiques $\vec{E}(M)$ et $\vec{E}(M')$ sont symétriques l'un de l'autre.

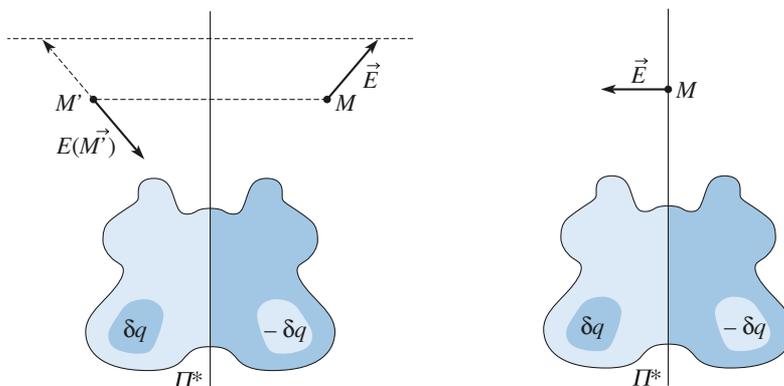
Sur un plan de symétrie ou plan-miroir Π d'une distribution \mathcal{D} le champ électrostatique créé est parallèle au plan Π .



Symétrie plane

• Au point M' symétrique de M par rapport à un plan-antimiroir Π^* d'une distribution de charges \mathcal{D} , le champ électrostatique $\vec{E}(M')$ est l'opposé du symétrique du champ $\vec{E}(M)$ créé en M par la distribution.

Sur un plan d'antisymétrie ou plan-antimiroir Π^* d'une distribution de charges \mathcal{D} , le champ électrostatique créé est perpendiculaire au plan Π^* .



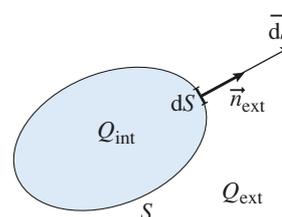
Antisymétrie plane

• L'analyse des symétries **doit précéder** tout calcul de champ ; elle peut permettre de prévoir la direction du champ ainsi que les coordonnées adaptées au système.

• Théorème de Gauss

• Le flux sortant du champ \vec{E} créé par une distribution de charges \mathcal{D} à travers une surface **fermée** S est égal à la charge de \mathcal{D} située à l'**intérieur** de S divisée par ϵ_0 :

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}, \text{ avec } d\vec{S} = \vec{n}_{\text{ext}} dS.$$



- En l'absence de charges, le flux du champ électrostatique est conservatif : le flux est le même à travers toutes les sections d'un même tube de champ.

Discontinuité du champ

À la traversée d'une surface chargée, le champ électrostatique subit une discontinuité normale à la

$$\text{surface traversée : } \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_{12} .$$

Détermination d'un champ à l'aide du théorème de Gauss

- Le théorème de Gauss constitue un outil de calcul rapide du champ électrostatique créé par une distribution de charges possédant une symétrie élevée : après détermination de la forme du champ, à l'aide de considérations de symétries et d'invariances, l'application du théorème de Gauss à une surface fermée, de géométrie adaptée aux symétries du problème, permet de déterminer la norme du champ, en tout point de cette surface.

Potentiel électrostatique

Circulation du champ électrostatique

- À tout champ électrostatique $\vec{E}(M)$, il est possible d'associer une fonction *scalaire* $V(M)$ appelée *potentiel électrostatique* et telle que $\vec{E} = -\text{grad} V$.
- Le potentiel est défini à une constante additive près.
- La circulation du champ électrostatique entre deux points A et B ne dépend pas du trajet (Γ) qui les relie :

$$\int_A^B \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_A^B -\text{grad} V \cdot \overrightarrow{d\ell} = \int_B^A dV = V(A) - V(B) .$$

- La circulation de \vec{E} sur un contour (courbe fermée) est nulle.
- Le champ électrostatique est normal aux surfaces équipotentielles ; les lignes de champ sont orientées dans le sens des potentiels décroissants.
- Le potentiel électrostatique ne possède pas d'extremum en dehors des charges.

Détermination du potentiel

- Le potentiel créé en M par une charge ponctuelle q située en P est (en posant $V = 0$ à l'infini) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{PM} .$$

- Le potentiel créé par un ensemble de charges d'extension **finie** peut se calculer, en posant $V = 0$ à l'infini, à partir de la relation précédente par superposition : somme ou intégrale selon le type de système chargé, ou par intégration de $\vec{E} = -\text{grad} V$.

Énergie potentielle

- L'énergie potentielle d'interaction, entre une particule de charge q , de position M et un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ associé au potentiel $V(M)$, est $\mathcal{E}_p = qV$.
- L'énergie potentielle d'interaction de deux charges q_1 et q_2 situées en M_1 et M_2 est :

$$\mathcal{E}_{p_{\text{int}}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{M_1 M_2} .$$

• Analogie avec le champ de gravitation

• Une particule de masse m placée en M , en présence d'une distribution de masses \mathcal{D} , subit une force d'origine gravitationnelle : $\vec{F} = m\vec{\mathcal{G}}(M)$, où $\vec{\mathcal{G}}(M)$ est le champ de gravitation créé en M par la distribution \mathcal{D} .

• Le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}(M)$, créé en M par une particule de masse m située en P , a pour expression :

$$\vec{\mathcal{G}}(M) = - \frac{Gm\vec{e}_{PM}}{PM^2}$$

avec \vec{e}_{PM} le vecteur unitaire orienté de P vers M .

Théorème de Gauss :

• Le flux sortant du champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ créé par une distribution de masses \mathcal{D} à travers une surface fermée S est égal à la masse située à l'intérieur de S multipliée par $-4\pi G$:

$$\Phi = \oiint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{\mathcal{G}} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} dS = -4\pi G M_{\text{int}}$$

• À l'extérieur d'un astre à symétrie de révolution, le champ de gravitation $\vec{\mathcal{G}}$ est le même que celui créé par un point matériel placé au centre de l'astre et dont la masse est celle de l'astre.

• Bien que les phénomènes soient différents, il y a une *analogie formelle* entre le champ électrostatique et le champ de gravitation. Nous pourrions appliquer les résultats issus de l'électrostatique au cas de la gravitation, en respectant les correspondances du tableau :

électrostatique	gravitation
champ \vec{E}	champ $\vec{\mathcal{G}}$ ($\approx \vec{g}$ pour le champ terrestre)
charge q	masse m
densité volumique de charge ρ	masse volumique ρ
constante $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	constante $-G$

Conseils et pièges à éviter

• Pour trouver l'orientation d'un champ en un point M , toujours étudier les plans de symétrie ou d'antisymétrie **passant par ce point M** .

• Le théorème de Gauss n'est facilement applicable que si l'on connaît les symétries, orientations, invariances du champ \vec{E} .

• On a toujours :

$$V(B) - V(A) = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} V \cdot d\vec{M} = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M}$$

ou $\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M} = V(A) - V(B)$

• Le potentiel est toujours continu (sauf sur un fil ou une charge ponctuelle, où il n'est pas défini) : ne pas oublier les constantes d'intégration, dans le calcul de V à partir de \vec{E} .

1 Étude des invariances et symétries

Étudier les invariances et symétries des distributions suivantes, ainsi que leurs conséquences sur la direction du champ électrostatique E :

- 1 • a) Plan uniformément chargé,
b) Cylindre uniformément chargé,
c) Sphère uniformément chargée.
- 2 • Deux charges : $+q$ en $(-a, 0, 0)$ et $-q$ en $(+a, 0, 0)$.
- 3 • Bi-couche chargée avec $-\rho$ pour $-a < z < 0$ et $+\rho$ pour $0 < z < a$.

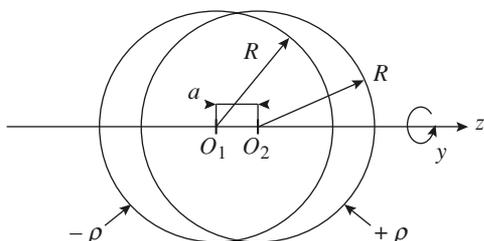
Conseils

FAIRE DES SCHÉMAS CLAIRS où figurent les vecteurs de base, le champ E et le point M . Souvent une projection dans un plan est plus explicite et plus facile à représenter qu'un schéma en perspective, pensez-y !

- 1) Adopter le système de coordonnées le mieux adapté à la distribution pour étudier les invariances et nommer plans de symétries (coordonnées cartésiennes pour un plan ou une couche plane, coordonnées cylindriques pour les distributions présentant une invariance par rotation autour d'un axe, coordonnées sphériques pour une sphère).
- 2) Un seul plan de symétrie ne suffit pas pour conclure quant à la direction du champ E .
- 3) Il faut que le point où la direction de E est cherchée appartienne aux plans de symétrie pour conclure : exemple $z = 0$ est bien ici un plan d'antisymétrie mais on ne peut en conclure que E est selon Oz qu'en $z = 0$!!

2 Passage d'une densité volumique à une densité surfacique

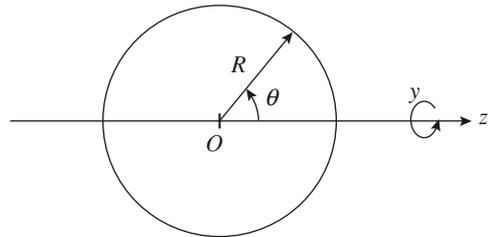
On considère 2 sphères identiques, de rayon R , de centres respectifs O_1 et O_2 distants de a ($O_1O_2 = a$), et chargées respectivement avec des densités volumiques uniformes mais opposées : $-\rho$ et $+\rho$.



1 • Quelles sont les symétries et invariances de cette distribution ? En déduire quelques propriétés de \vec{E} .

2 • À quelle condition sur a et R cette distribution peut rendre compte de la modélisation suivante : une sphère de centre O (milieu de O_1O_2), de rayon R portant une répartition surfacique de charges σ ?

Montrer que $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$; déterminer σ_0 .

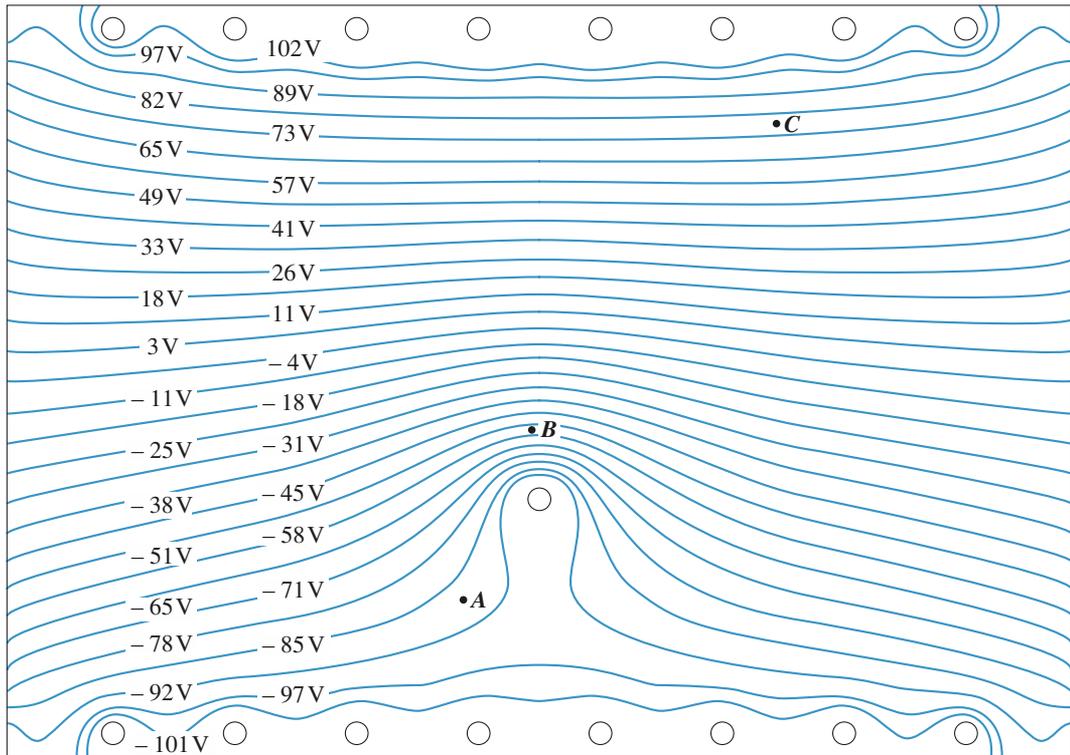


3 • Reprendre la même étude avec deux cylindres identiques de rayon R uniformément chargés avec $-\rho$ et $+\rho$, dont les axes sont parallèles et distants de a .

Conseils

- Le mieux est de travailler en système de coordonnées sphériques de centre O et d'axe Oz (invariance par rotation de φ autour de Oz).
- Quelle est la dimension *a priori* petite devant les autres qui permet d'envisager une répartition surfacique ?
- Pour déterminer σ , on utilisera l'invariance par rotation autour de z et on déterminera d'une part le volume $d\tau$ délimité entre les 2 sphères par $d\theta$ (entre θ et $\theta + d\theta$) et la surface dS délimitée sur la sphère de centre O par le même $d\theta$. On écrira que les charges portées par ces deux éléments sont identiques.
- Dans le cas des deux cylindres, le mieux sera de travailler en système de coordonnées cylindriques d'axe Oz , axe des cylindres.

3 Détermination du champ à partir d'une carte d'équipotentiellles (oral)



réseau d'équipotentiellles
échelle : $\text{---} = 1 \text{ cm}$

Le schéma représente les lignes équipotentiellles d'un champ électrique créé par un ensemble de fils rectilignes, très longs et perpendiculaires au plan du schéma.

Déterminer une valeur approchée du vecteur champ électrique aux points A, B et C.

La ligne $V = 0$ volt (non représentée) a-t-elle une signification particulière ?

Conseils Dans quel plan, \vec{E} est-il contenu en tout point du schéma ?

Quelle est la relation entre champ et potentiel ?

Rappeler la définition du gradient d'un champ scalaire.

Comment calcule-t-on numériquement une valeur approchée de la dérivée d'une fonction ?

Quelle est l'orientation d'une ligne de champ ?

4 Ionisation de l'atome d'hydrogène (oral)

1 • Calculer l'ordre de grandeur du champ électrique qu'il faut appliquer à un atome d'hydrogène pour l'ioniser.

2 • Comparer à un champ macroscopique dans l'air, par exemple le champ disruptif de l'air : $E_d \approx 3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

Conseils

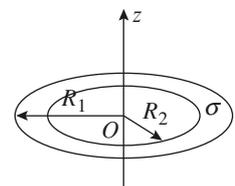
L'énoncé ne précise pas de données numériques. Il faut faire appel à la culture scientifique de base : ordre de grandeur du rayon atomique, charge élémentaire.

On ne demande qu'un ordre de grandeur. On se contente donc d'écrire que l'ionisation ne peut avoir lieu que si le champ perturbateur est comparable au champ qui assure la cohésion de l'atome.

5 Interaction entre un anneau et une charge (oral)

Un disque évidé porte une charge surfacique $\sigma > 0$.

1 • Retrouver le champ électrique créé par un disque non évidé en tout point $M(z)$ de l'axe Oz . En déduire celui créé par le disque évidé.



2 • On suppose que l'on place une particule de masse m et de charge $q > 0$ en un point de l'axe Oz à la cote z_0 . Quelle vitesse minimale v_0 faut-il lui donner pour qu'elle atteigne le centre du disque ? (On néglige l'action de la pesanteur.)

Conseils

1) De l'analyse des symétries on en déduit que le champ est porté par l'axe Oz : il faudra donc sommer les **composantes selon Oz** seulement.

De l'analyse des invariances on en déduit que toutes les charges situées sur la couronne de rayon $r = OP$, de largeur dr , P étant un point de l'anneau, contribuent également au champ total. On sommerá donc les composantes utiles de ces distributions élémentaires.

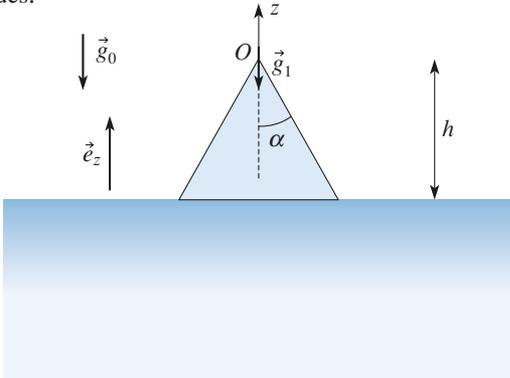
Pour simplifier les calculs on peut exprimer la distance OP en fonction de ϕ , angle entre MP et MO .

Le calcul de l'anneau est le même que le calcul du disque, seule change la borne en zéro.

2) Dès qu'il s'agit de vitesse penser au théorème de l'énergie cinétique ou à la conservation de l'énergie. L'expression de l'énergie potentielle d'une charge q dans un potentiel V est qV .

6 Champ de pesanteur au sommet d'une montagne

1 • Le champ de gravitation et le champ électrostatique sont formellement identiques. Rappeler les grandeurs analogues.



2 • Calculer le champ électrique créé au sommet d'un cône de révolution de hauteur h , de demi-angle d'ouverture α et uniformément chargé en volume avec une densité uniforme ρ .

3 • On représente une montagne comme un cône de révolution de hauteur h , de demi-angle d'ouverture α et de masse volumique uniforme ρ .

Soit $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{e}_z$ le champ de pesanteur à l'altitude du sommet O , loin de la montagne, et $\vec{g}_1 = -g_1 \vec{e}_z$ le champ de pesanteur au sommet de la montagne.

Calculer $\Delta g = g_1 - g_0$.

Faire l'application numérique.

Données : $\rho = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$,

$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m} \cdot \text{kg}^{-2}$, $h = 1 \text{ km}$ et $\alpha = 30^\circ$.

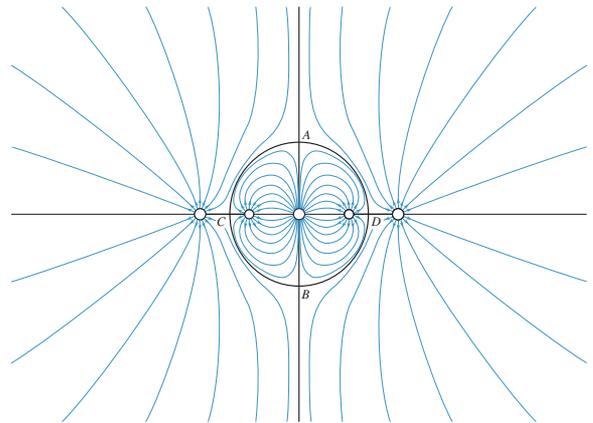
Conseils

Pour le calcul du champ, il faut utiliser un résultat connu (ou facilement retrouvable) : le champ créé par un disque d'épaisseur dz chargé en un point de son axe. Une étude de la symétrie permet de limiter le calcul de \vec{E} (ou du champ de pesanteur) à celui d'une seule composante.

Pour le calcul de \vec{g}_1 , il faut considérer le système étudié comme la superposition de deux systèmes connus.

7 Analyse d'un champ électrostatique (oral)

a) créé par des charges ponctuelles



Le schéma représente les lignes de champ créées par cinq charges ponctuelles numérotées de 1 à 5 de la gauche vers la droite.

Le champ est nul aux points A , B , C et D .

Les lignes en traits épais issues de ces points sont également des lignes de champ.

1 • Déterminer les signes des cinq charges.

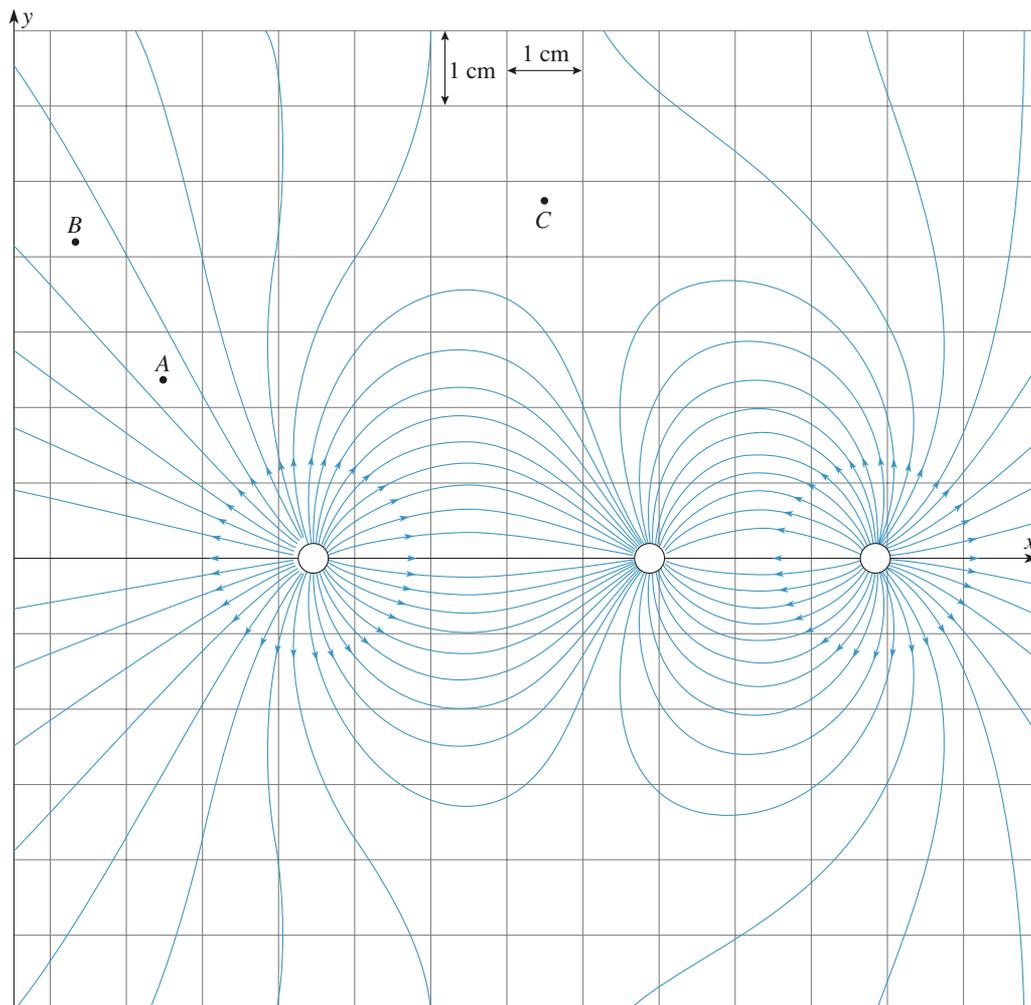
2 • Trouvez et justifiez la position des points de champ nul.

3 • Mettre des flèches sur les lignes non fléchées.

4 • Analyser la symétrie du schéma. Quelles relations peut-on en déduire entre q_1 , q_2 , q_4 et q_5 ?

5 • En appliquant le théorème de Gauss, déterminer la relation liant q_2 et q_3 .

b) créé par une distribution filiforme



Le schéma représente les lignes du champ électrostatique créé par des fils très longs, uniformément chargés, perpendiculaires au plan de la figure.

- 1 • Où sont les plans de symétrie de la distribution ?
- 2 • Quel est le signe de la densité linéique de charge de chacun d'entre eux ?
- 3 • Quel est le signe de la densité linéique de charge totale ?
- 4 • La norme du champ en A est de $100 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Calculer une valeur approchée du champ en B .
- 5 • Que peut-on dire du champ au voisinage de point C ?

Conseils

Les réponses à cet exercice sont entièrement qualitatives, ce qui n'est pas synonyme de non rigoureux ! Comment les lignes de champ sont-elles orientées au voisinage d'une charge ponctuelle ?

Si une ligne de champ relie deux charges, sans passer par un point singulier de champ nul, que peut-on dire du signe des deux charges ?

En un même point le champ peut-il y avoir deux orientations différentes ?

Le champ électrique diverge à partir des charges positives et converge vers les charges négatives.

Quelles isométries laissent le champ électrique invariant ? On rappelle que dans une zone sans charge le flux de \vec{E} a la même valeur à travers toute section d'un tube de champ, donc là où les lignes se resserrent, le champ est plus intense.

8 Champ créé par un fil infiniement long uniformément chargé (INCONTOURNABLE)

Un fil a la forme d'un cylindre de révolution très long (on dira infiniement long) de rayon a ; il est chargé électriquement avec une densité volumique uniforme ρ .

- 1 • Analyser les symétries du système. Que peut-on en déduire pour la direction du champ électrique $\vec{E}(M)$ en un point M quelconque de l'espace ? Quel est le système de coordonnées le mieux adapté ? De quelle coordonnée $\vec{E}(M)$ dépend-il ?
- 2 • Donner l'expression du vecteur champ électrique \vec{E} en un point quelconque de l'espace.
- 3 • Définir et calculer une *densité linéique* de charge λ pour ce fil. Exprimer \vec{E} en fonction de λ . Que devient l'expression de \vec{E} lorsqu'on fait tendre a vers zéro en maintenant λ constant ?
- 4 • Calculer le potentiel électrique V en un point quelconque.
- 5 • Reprendre toutes ces questions pour un fil qui n'est chargé qu'en surface, avec une densité surfacique uniforme σ .

Conseils

Pour calculer un champ électrique en un point M en utilisant le théorème de Gauss, il faut connaître la direction du champ en tout point et les grandeurs spatiales dont il dépend. Il faut ensuite trouver, si elle existe, une surface Σ passant par le point M , telle que le flux du champ \vec{E} à travers Σ s'exprime simplement par $\Phi = \text{aire} \times E(M)$. On détermine enfin $E(M)$ en égalant cette expression du flux à celle qui est fournie par le théorème de Gauss.

On fera attention à bien distinguer l'intérieur du fil et l'extérieur.

Lorsqu'il n'y a pas de répartition surfacique de charges, le champ \vec{E} est une fonction continue des coordonnées de l'espace.

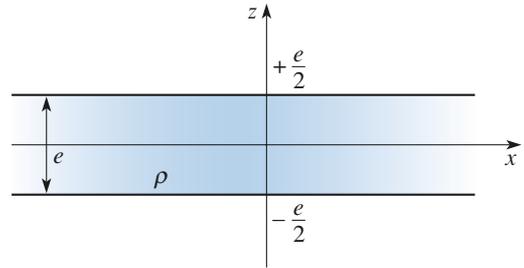
Le potentiel V est-il toujours une fonction continue des coordonnées de l'espace ?

9 Charges uniformément réparties entre deux plans parallèles (INCONTOURNABLE)

Entre deux plans parallèles (infiniment étendus) de cotes $z = -\frac{e}{2}$ et $z = \frac{e}{2}$, se trouve une charge répartie avec une densité volumique uniforme et égale à ρ .

- 1 • Quelle est la direction du champ électrique \vec{E} ? De quelle(s) coordonnée(s) dépend-il ?
- 2 • Quel est l'effet sur \vec{E} d'un changement de z en $-z$?
- 3 • En appliquant le théorème de Gauss à une surface judicieusement choisie, déterminer le champ \vec{E} en tout point de l'espace.

- 4 • Calculer le potentiel V en tout point de l'espace.
- 5 • Définir la densité surfacique σ associée à ce système. Exprimer \vec{E} en fonction de σ .
- 6 • On fait tendre l'épaisseur e vers zéro en maintenant constante la densité surfacique σ . Que devient l'expression de \vec{E} ?
- 7 • Retrouver l'expression de \vec{E} obtenue en 3 par la superposition de plans élémentaires, d'épaisseur dz , en exploitant le résultat obtenu en 6.



Conseils

Quelles isométries laissent le système invariant ? Que peut-on en déduire pour \vec{E} ?

On rappelle le principe du calcul de champ en un point M par le théorème de Gauss :

- trouver une surface fermée Σ passant par M , telle que le flux de \vec{E} soit une fonction simple de $E(M)$;
- égaliser les deux expressions du flux : celle qui dépend de $E(M)$, et celle qui dépend de la charge contenue dans Σ .
- Si le champ \vec{E} reste fini, le potentiel V est une fonction continue des coordonnées d'espace.
- Quelle est la charge surfacique élémentaire $d\sigma$ d'un plan d'épaisseur élémentaire dz ?

10 Champ créé par une sphère chargée en volume (INCONTOURNABLE)

Une sphère de rayon a et de centre O est chargée électriquement avec une densité volumique $\rho(r)$ qui ne dépend que de la distance r au centre. On note Q la charge totale de la sphère.

- 1 • Quel est le système de coordonnées le mieux adapté ? Analyser les symétries du système. Que peut-on en déduire pour la direction du champ électrique \vec{E} ? De quelle coordonnée \vec{E} dépend-il ?
- 2 • Donner l'expression du vecteur champ électrique \vec{E} en un point quelconque de l'espace. On notera $Q(r)$ la charge contenue dans la sphère de rayon r .

- 3 •** La densité de charge ρ est uniforme. Expliciter $\vec{E}(M)$ et le potentiel $V(M)$ pour tout point M .
- 4 •** Reprendre la même question si la sphère est chargée uniquement en surface, avec une densité surfacique σ uniforme.

Conseils

Sur quelles surfaces le champ \vec{E} a-t-il une norme uniforme ? C'est avec de telles surfaces qu'il faut appliquer le théorème de Gauss.

On fera attention à bien distinguer les points situés à l'intérieur de la sphère et ceux qui sont situés à l'extérieur.

Le champ \vec{E} et le potentiel V sont-ils des fonctions continues des coordonnées ?

11 Analogie gravitationnelle : champ de pesanteur dans une cavité sphérique

- 1 •** On considère une sphère chargée de rayon R , de densité volumique de charge uniforme ρ . Rappeler l'expression du champ électrique en tout point M situé à l'intérieur de la sphère à une distance r ($r < R$) du centre.
- 2 •** Déterminer le champ de gravitation à l'intérieur de la Terre, assimilée à une sphère de masse volumique ρ uniforme de centre O .
- 3 •** On imagine une cavité sphérique de rayon R' , et de centre C situé à une distance h du centre de la Terre. Déterminer le champ de gravitation en un point M de la cavité.

Conseils

Le champ étant à symétrie sphérique, il se calcule simplement en appliquant le théorème de Gauss.

Quelle est la charge $Q(r)$ contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r ?

Pour trouver les grandeurs analogues entre les champs de gravitation et électrostatique, écrire côte à côte les lois de Newton et de Coulomb.

La solution simple repose sur le principe de superposition. Il faut trouver deux distributions sphériques dont la combinaison est identique au système étudié.

À noter : Garder l'expression intrinsèque des champs au moyen des vecteurs-position.

12 Modélisation d'un noyau

Du point de vue du potentiel et du champ électrique qu'ils créent, les noyaux de certains atomes légers peuvent être modélisés par une distribution volumique de charge à l'intérieur d'une sphère de centre O et de rayon a . On

désigne par $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$, le vecteur position d'un point P quelconque de l'espace. Pour $r < a$, la charge volumique $\rho(P)$ qui représente le noyau varie en fonction de r suivant la loi :

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

où ρ_0 est une constante positive.

- 1 •** Exprimer la charge totale Q du noyau.
- 2 •** Calculer le champ électrique $E_{\text{ext}}(P)$ en tout point P extérieur à la sphère ($r > a$).
- 3 •** Calculer le champ électrique $E(P)$ en tout point P intérieur à la sphère ($r < a$).
- 4 •** Exprimer le potentiel $V_{\text{ext}}(P)$ créée par le noyau lorsque $r > a$.
- 5 •** Exprimer le potentiel $V_{\text{int}}(P)$ créée par le noyau lorsque $r < a$.

Conseils

1) La distribution est à symétrie sphérique.

Néanmoins elle est non uniforme, il faut donc calculer une intégrale pour obtenir la charge totale. Les invariances permettent de poser une intégrale simple et non multiple.

2) À l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, MÊME NON UNIFORME, la distribution se comporte comme une charge ponctuelle.

3) Dans le cas du champ intérieur on peut appliquer le théorème de Gauss. Pour calculer la charge intérieure on peut reprendre le résultat de la question 1 pour une sphère de rayon r .

4) 5) Enfin le calcul du potentiel s'obtient par intégration du champ en prenant $V = 0$ à l'infini puisque la distribution est finie et en assurant sa continuité en $r = R$.

13 Interaction proton - électron (Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène)

Le centre d'une sphère de rayon R , chargée uniformément en volume, portant une charge Q ($Q > 0$), est placé à l'origine d'un repère $R = (0; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Il règne partout dans l'espace un champ $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$ ($E_0 > 0$) uniforme.

- 1 •** Déterminer le champ E en un point quelconque de l'axe Ox . Donner l'allure de $E = f(x)$.
- 2 •** Une particule chargée de charge $-q$, $q > 0$ et de masse m est libre de se déplacer selon Ox . Montrer qu'il existe deux positions d'équilibre sur l'axe Ox , à condition que E_0 vérifie une certaine inégalité que l'on donnera. Déterminer le point A correspondant à une position stable.

3 • La particule étant en A , on l'écarte de a . Donner une estimation de a_m , la valeur maximale de a telle que la particule ait des oscillations sinusoïdales autour de A . Quelle est alors leur pulsation ?

4 • Application numérique pour l'hydrogène : $R = 53$ pm.

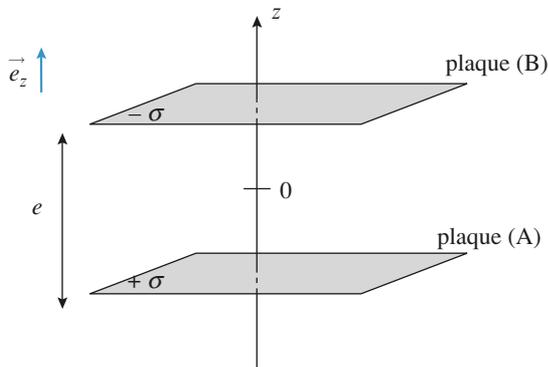
Conseils

Bien considérer les cas : $x < -R$ et $x > +R$ (où le champ créé par la sphère devient celui d'une charge ponctuelle), et $-R < x < +R$ où le champ créé par la sphère varie linéairement en x . Revoir en détail l'exercice 10 incontournable.

Pour trouver une position d'équilibre on peut raisonner sur l'extremum de l'énergie potentielle ou, ce qui revient au même, la nullité de la résultante des forces. Une position d'équilibre stable correspond à un minimum d'énergie potentielle.

14 Champ, potentiel et capacité d'un condensateur plan (INCONTOURNABLE)

Soient deux plaques de surface S , dans le vide, chargées uniformément avec des densités $+\sigma$ et $-\sigma$, planes et parallèles distantes de e , formant un condensateur. On considère que les plaques se comportent comme des plaques infinies.



1 • Montrer que le champ électrique est uniforme dans les trois zones de l'espace : $z < -e/2$, $-e/2 < z < +e/2$, et $z > +e/2$ en tout point de l'espace.

2 • En raisonnant sur l'expression du champ créé par un plan infini uniformément chargé trouver l'expression du champ entre les plaques et à l'extérieur.

3 • Pouvaient-on arriver au même résultat en appliquant le théorème de Gauss au champ électrostatique créé par l'ensemble des deux plaques sans hypothèse supplémentaire ?

4 • Donner l'expression de $V(z)$ en prenant $V(B) = 0$ et $V(A) = U$.

5 • Quelle est l'expression de la capacité de ce condensateur, c'est à dire le rapport $C = Q/U$ avec $Q = \sigma S$ pour la surface S des plaques ?

Conseils

1) Une étude des symétries et invariances permet de montrer que E est selon z et ne dépend que de z . À partir de là on applique le théorème de Gauss à des surfaces situées en dehors des plaques.

2) Appliquer le théorème de superposition en veillant à bien orienter les deux champs créés par les deux plaques. Distinguer les cas $z > |e/2|$ et $z < |e/2|$.

3) Bien se demander si les flux sortant des bases « horizontales » de la surface de Gauss s'ajoutent ou se retranchent, sont égaux ou pas. Remarquer que le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie de la distribution donc $E(z) = -E(-z)$ ici.

4) Chercher la primitive du champ pour trouver $V(z)$. Ne pas oublier les constantes d'intégration. Ou bien exploiter la circulation entre A ou B et un point quelconque entre les armatures.

5) Soit Q la charge portée par l'armature positive, $Q = CU$ or Q et U s'expriment facilement en fonction de E . Après simplification il ne reste dans l'expression de la capacité que les caractéristiques électrique et géométrique du condensateur.

15 Énergie d'une liaison ionique

L'énergie potentielle du système $(\text{Na}^+, \text{Cl}^-)$ a pour expression $E_p(r) = -q^2/4\pi\epsilon_0 r + \lambda q/4\pi\epsilon_0 r^9$.

1 • À quoi correspond le 2^e terme ? Quel est le signe de λ ? Montrer qu'il est nécessaire à l'existence de positions d'équilibre du système.

2 • On donne $r = 241$ pm à l'équilibre. Calculer E_d l'énergie de dissociation de la liaison entre ces deux ions. Exprimer le résultat en eV puis en kJ/mol.

3 • Comment ces résultats peuvent être changés pour le cristal NaCl ?

Conseils

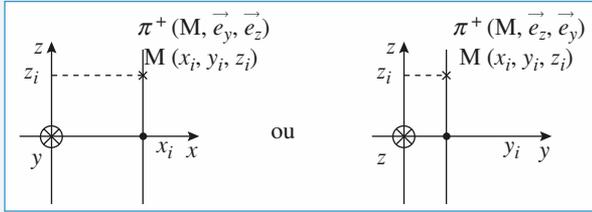
1) L'exposant suggère une interaction très forte et de très courte distance. D'autre part pour qu'existe une position d'équilibre il faut compenser la force d'attraction qui dérive du 1^{er} terme par une force de répulsion, ce qui implique $\lambda > 0$.

2) À l'équilibre (stable) l'énergie potentielle est minimale. Dissocier la liaison revient à éloigner infiniment les deux ions. L'énergie à fournir est donc la différence d'énergie des états lié et non lié.

1 Étude des invariances et symétries

1 • a) Plan $z = 0$

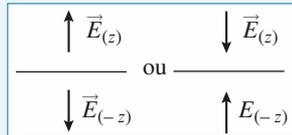
La distribution est invariante par translation selon x ou y donc le champ ne dépend que de z : $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$.



Tout point M appartient à deux plans de symétrie $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ donc le champ appartient en M , à l'intersection de ces deux plans : il est donc selon \vec{e}_z . Or M est choisi quelconque donc, en tout point, le champ est selon \vec{e}_z :

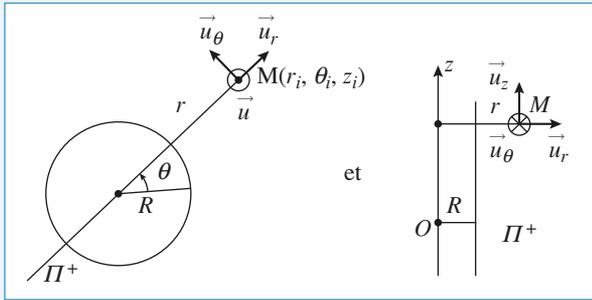
$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z.$$

Le plan $z = 0$ est plan de symétrie des charges, donc $E(z) = -E(-z)$.

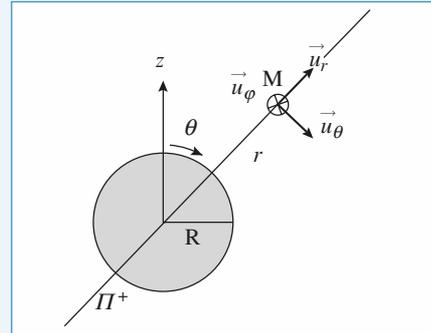
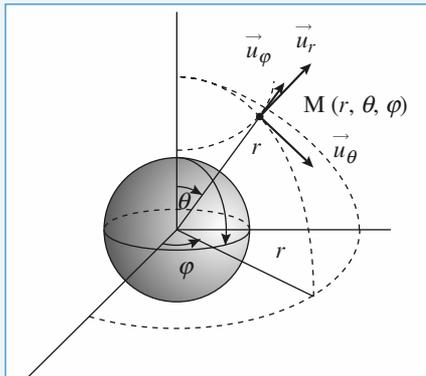


b) Cylindre de rayon R

Il y a invariance par rotation autour de Oz et par translation le long de Oz donc le champ ne dépend que de r : $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$. Tout point M appartient à deux plans de symétrie $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_z, \vec{u}_r)$ donc le champ, appartenant à leur intersection, est porté par \vec{u}_r . M étant quelconque on peut conclure que le champ est en tout point radial : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.



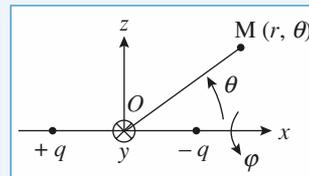
c) Boule de rayon R



Il y a invariance par rotation d'angle θ ou φ : le champ ne dépend que de r , donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)$.

Tout point M appartient à deux plans de symétrie $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_\phi, \vec{u}_r)$ donc le champ \vec{E} appartient à leur intersection : il est donc porté par \vec{u}_r . Le champ est radial : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$.

2 •

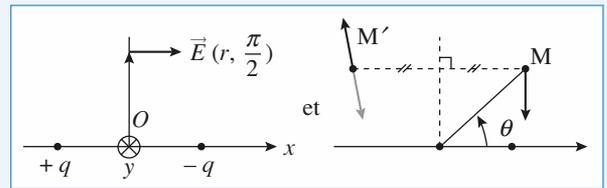


Il y a invariance par rotation d'angle φ autour de l'axe des x , donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta)$. On peut étudier le problème dans le plan

(xOz) , puis déduire le champ par rotation autour de cet axe et $\vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{e}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta$.

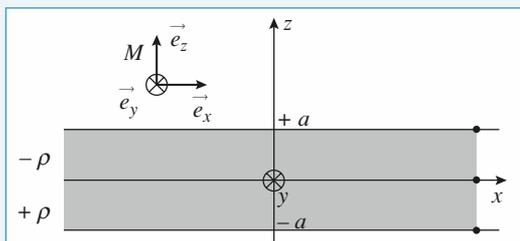
Le plan $x = 0$, médiateur des deux charges, est plan d'antisymétrie : en tout point de ce plan $(\theta = \pm \frac{\pi}{2})$ le champ lui

est perpendiculaire, il est donc parallèle à l'axe des x , et $\vec{E}(\pi - \theta) = -\text{sym} \vec{E}(\theta)$.



Les plans $y = 0$ (et $z = 0$) sont plans de symétrie puisqu'ils contiennent la distribution donc le champ appartient à ce plan : on retrouve l'une des conclusions de l'étude des invariances : $\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$.

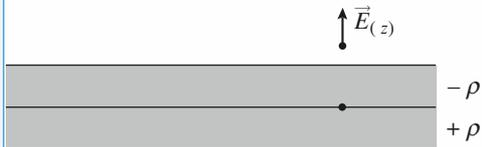
3 • La distribution de charge est invariante par translation suivant x et y donc : $\vec{E}(M) = \vec{E}(z)$.



Tout plan $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ est plan de symétrie ainsi que tout plan $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, la distribution étant infinie dans les deux directions x et y . On en déduit que le champ \vec{E} , appartenant aux plans de symétrie, est selon \vec{e}_z en tout point de l'espace, donc : $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$.

Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie donc $\vec{E}(-z) = \text{opp}(\text{sym}\vec{E}(z))$, ce qui se traduit par $E(-z) = E(z)$.

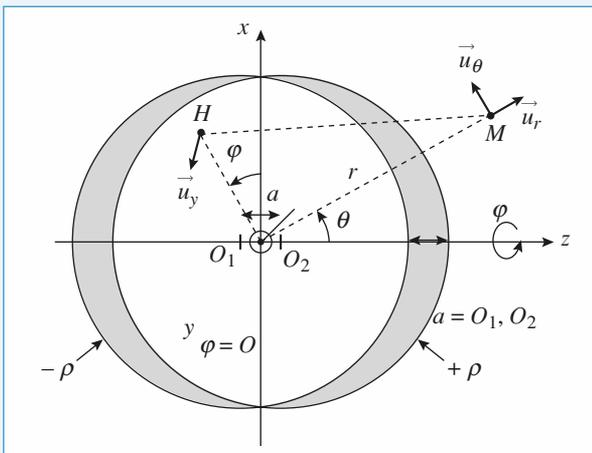
(influence des charges < 0 prépondérantes car plus proches)



(influence des charges > 0 prépondérantes car plus proches)



2 Passage d'une densité volumique à une densité surfacique



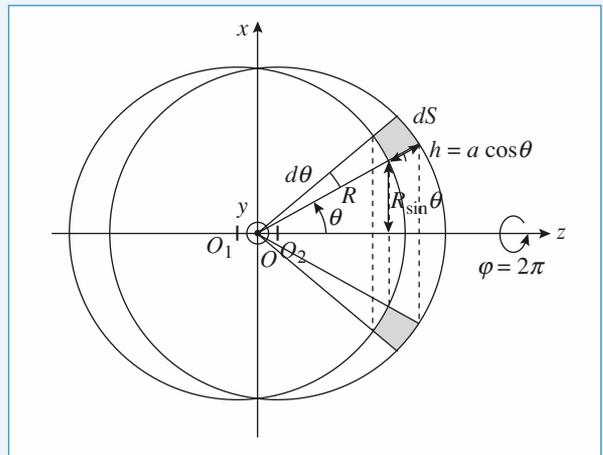
1 • La répartition de charges est invariante par rotation autour de l'axe Oz . En travaillant dans le système de coordonnées sphériques $M(r, \theta, \varphi)$, on a $\vec{E}(M) = \vec{E}(r, \theta)$.

Travaillons dans le plan $\varphi = 0$, c'est-à-dire le plan (xOz) ; soit un point M dans ce plan. Le plan (M, Ox, Oz) est un plan de symétrie des charges, donc $\vec{E}(M)$ est dans ce plan. Il en est de même quel que soit le plan $\varphi = \text{cte}$, donc :

$\vec{E}(M) = E_r(r, \theta) \vec{u}_r + E_\theta(r, \theta) \vec{u}_\theta$. Le champ n'a pas de composante sur \vec{u}_φ .

2 • Remarquons que $+\rho - \rho = 0$: la densité volumique de charges est nulle dans l'espace commun aux 2 sphères.

Pour avoir une répartition surfacique de charge, il faut être en présence d'une répartition volumique (« grande ») sur une épaisseur « faible » : la translation a des deux sphères doit donc être petite devant R : $a \ll R$.



Déterminons le volume $d\tau$ situé entre les 2 sphères, vu sous un angle $d\theta$, entre θ et $\theta + d\theta$ (φ variant de 0 à 2π) :

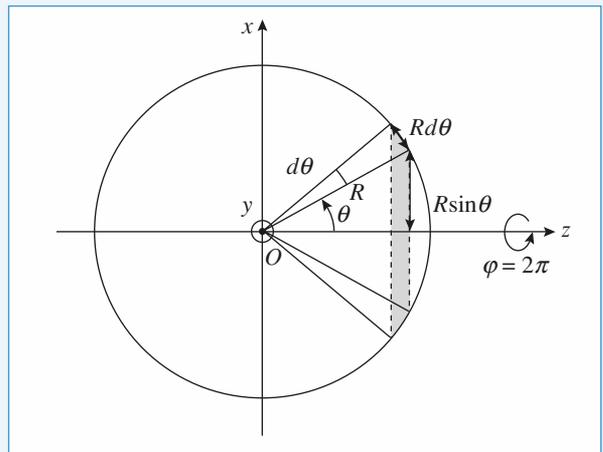
$$d\tau = dS \, 2\pi R \sin \theta$$

$$\text{avec } dS = hR \, d\theta \text{ et } h = a \cos \theta$$

$$\text{soit } d\tau = 2\pi a R^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$

La charge dq située dans cet élément de volume est :

$$dq = 2\pi \rho a R^2 \sin \theta \cos \theta \, d\theta$$



Déterminons sur une sphère de rayon R la surface $d\Sigma$ interceptée (surface hachurée du document) par $d\theta$, entre θ et $\theta + d\theta$ (φ variant de 0 à 2π) :

$$d\Sigma = R \, d\theta \, 2\pi R \sin \theta = 2\pi R^2 \sin \theta \, d\theta.$$

La charge dq située sur cet élément de surface $d\Sigma$ s'écrit (avec une densité surfacique de charges σ) :

$$dq = \sigma \, d\Sigma = 2\pi \sigma R^2 \sin \theta \, d\theta.$$

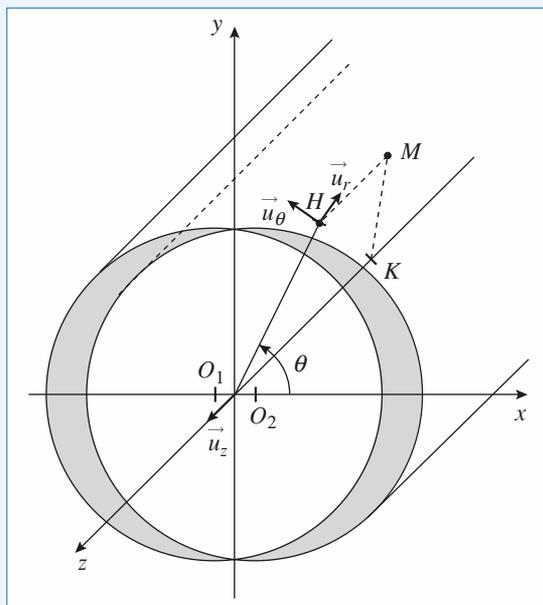
L'identification des deux expressions de dq donne :

$$\sigma = \sigma_0 \cos \theta \text{ avec } \sigma_0 = \rho a.$$

Remarque : σ_0 existe et est non nul si ρ tend vers l'infini quand a tend vers zéro :

$$\sigma_0 = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ \rho \rightarrow \infty}} (\rho a).$$

3 •

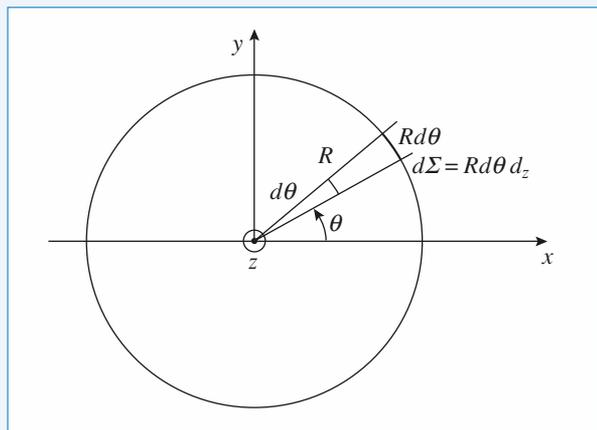
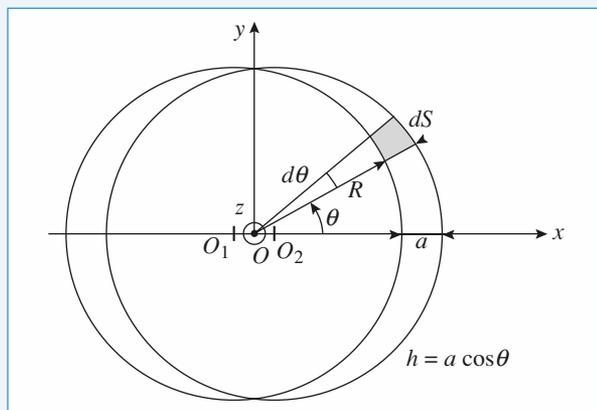


La répartition de charge est invariante par translation suivant z donc $\vec{E}(M) = \vec{E}(x, y) = \vec{E}(r, \theta)$.

Un plan $z = \text{cste}$ est un plan de symétrie des charges donc \vec{E} appartient à ce plan :

$$\begin{aligned} \vec{E}(M) &= E_x(x, y)\vec{u}_x + E_y(x, y)\vec{u}_y \\ &= E_r(r, \theta)\vec{u}_r + E_\theta(r, \theta)\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

Le champ n'a pas de composantes suivant \vec{u}_z .



Pour avoir une répartition surfacique il faut que $a \ll R$.
 Travaillons en coordonnées cylindriques d'axe Oz : le volume situé entre les deux cylindres, entre 2 plans de cotes z et $z + dz$ vu sous l'angle $d\theta$ est :
 $d\tau = dS dz$ avec $dS = hR d\theta$ et $h = a \cos \theta$
 d'où $d\tau = Ra \cos \theta dz$ et $dq = \rho Ra \cos \theta dz$
 Sur le cylindre de rayon R la surface élémentaire interceptée par les mêmes plans est :
 $d\Sigma = R d\theta dz$ et $dq = \sigma R d\theta dz$
 ce qui conduit à $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ avec $\sigma_0 = \rho a$.

3 Détermination du champ à partir d'une carte d'équipotentiels

Le plan du schéma est un plan de symétrie pour les charges. Le champ \vec{E} est donc contenu dans ce plan. \vec{E} est donné par $\vec{E} = -\text{grad } V$.

$\text{grad } V$ est défini par $dV = \text{grad } V \cdot d\vec{\ell}$, dV étant la variation élémentaire de V liée à un déplacement élémentaire $d\vec{\ell}$.

Il en résulte (cf. cours) que le vecteur \vec{E} en M est déterminé par :

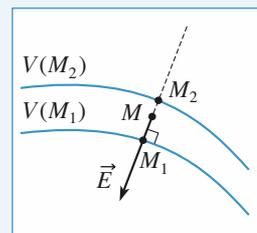
- direction : normale aux équipotentiels ;
- sens : dirigé vers les potentiels décroissants ;
- norme : $\|\vec{E}\| = \frac{dV}{d\ell}$, mesurée le long d'une ligne de champ.

On peut déterminer une valeur approchée, au point M , de cette dérivée par :

$$\|\vec{E}(M)\| \approx \frac{\Delta V}{\Delta \ell} = \frac{|V(M_1) - V(M_2)|}{M_1 M_2}$$

M_1 et M_2 étant deux points de potentiels connus, appartenant à la même ligne de champ que M et encadrant M .

- Point A : On trace la normale aux équipotentiels passant par A. Cette droite coupe les deux équipotentiels les plus proches en A_1 et A_2 .



$$\Delta \ell = A_1 A_2 = 6 \text{ mm} \cdot \Delta V = 97 - 85 = 7 \text{ V}.$$

$$\|\vec{E}(A)\| = \frac{\Delta V}{\Delta \ell} \approx 1,2 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}.$$

$\vec{E}(A)$ dirigé vers A_2

- Point B : $\Delta \ell = 1,5 \text{ mm}$, $\Delta V = 7 \text{ V}$,
 $\|\vec{E}(B)\| \approx 4,7 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.
- Point C : $\Delta \ell = 3 \text{ mm}$, $\Delta V = 9 \text{ V}$,
 $\|\vec{E}(C)\| \approx 3 \text{ kV} \cdot \text{m}^{-1}$.

La ligne $V = 0$ volt n'a aucune signification particulière ; c'est la **différence** de potentiel entre deux points et non sa valeur en un point qui a un sens.

De plus, les fils étant supposés infiniment longs, il est impossible de poser $V = 0$ à l'infini.

4 Ionisation de l'atome d'hydrogène (exo d'oral)

1 • La distance moyenne entre le noyau et l'électron est de l'ordre de $a \approx 10^{-10}$ m.

L'électron est soumis au champ du noyau de charge $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et au champ créé par une source extérieure $E_{\text{appliqué}}$.

Au niveau de l'électron, le champ créé par le noyau est de l'ordre de :

$$E_0 \approx \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a^2} \approx 9,10^9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} / 10^{-20} \approx 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On peut admettre que l'ionisation a lieu si le champ extérieur est comparable au champ créé par le noyau, soit $E_{\text{appliqué}} \approx 10^{11} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

2 • Le champ disruptif de l'air $3,6 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ est le champ maximal qui puisse exister dans l'air, sinon l'air est ionisé et une décharge se produit.

Il faut donc appliquer à l'hydrogène un champ très important.

5 Interaction entre un anneau et une charge (oral)

1 • • Analyse des symétries

Tout plan passant par l'axe (Oz) est plan de symétrie pour les charges. On peut donc écrire, en un point de l'axe, $\vec{E}(M) = E \vec{e}_z$.

Le système étant invariant par rotation autour de (Oz), les coordonnées polaires s'imposent pour repérer la position d'un point P du disque.

On utilisera aussi l'angle φ tel que $\tan \varphi = \frac{r}{z_M}$ ($z_M > 0$).

• Calcul de E par intégration

L'élément de disque qui entoure le point P , repéré par ses coordonnées polaires (r, θ), a une aire dS et une charge :

$$dq = \sigma dS.$$

Cet élément crée en M un champ :

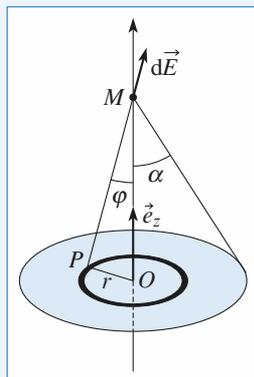
$$d\vec{E} = dE_z \vec{e}_z + dE_r \vec{e}_r.$$

Comme le champ total est parallèle à \vec{e}_z , on ne calcule que cette composante :

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS \cos \varphi}{PM^2}.$$

$$PM = \frac{z_M}{\cos \varphi}; \quad dS = r d\varphi dr; \quad r = z_M \tan \varphi;$$

par invariance on peut étendre dS à $2\pi r dr$: tous les éléments du disque de rayon r contribuent également à dE_z .



$$d'ou : \quad dr = \frac{z_M d\varphi}{\cos^2 \varphi} \quad \text{et} \quad dS = 2\pi z_M^2 \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} d\varphi$$

Ce qui donne :

$$dE_z = \frac{\sigma \sin \varphi d\varphi}{2\epsilon_0}$$

$$\text{et :} \quad E = \iint_{\text{disque}} dE_z = \int_{\varphi=0}^{\alpha} \frac{\sigma \sin \varphi d\varphi}{2\epsilon_0}$$

L'intégration est immédiate, et on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \vec{e}_z \quad (z_M > 0).$$

Dans le cas du disque évidé il faut sommer de

$$\alpha_1 = \text{atan} \frac{R_1}{z_M} \quad \text{à} \quad \alpha_2 = \text{atan} \frac{R_2}{z_M}.$$

$$\text{On obtient} \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$$

$$= \frac{\sigma z_M}{2\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R_1^2 + z_M^2}} - \frac{1}{\sqrt{R_2^2 + z_M^2}} \right) \vec{e}_z$$

2 • Le système est conservatif : on peut appliquer soit le théorème de l'énergie cinétique, soit la conservation de l'énergie mécanique pour arriver rapidement au résultat.

$$E_m(z_0) = \frac{1}{2} m v_0^2 + qV(z_0)$$

avec $V(z_0)$ potentiel créé par l'anneau en z_0 .

Si v_0 est la vitesse minimale, la particule arrive avec une vitesse nulle en $z = 0$.

Son énergie vaut alors

$$E_m(0) = qV(0)$$

$$\text{On en déduit que} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2q}{m} (V(0) - V(z_0))}$$

$$\text{Or} \quad V(0) - V(z_0) = \int_0^{z_0} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^{z_0} E dz = C$$

Calculons la circulation C de \vec{E} de 0 à z_0 .

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{z_0} \frac{z dz}{(R_1^2 + z^2)^{1/2}} - \frac{z dz}{(R_2^2 + z^2)^{1/2}} \\ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^{z_0} d(R_1^2 + z^2)^{+1/2} - d(R_2^2 + z^2)^{+1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d'ou \quad C &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \left[\sqrt{R_1^2 + z^2} \right]_0^{z_0} - \left[\sqrt{R_2^2 + z^2} \right]_0^{z_0} \right\} \\ &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{R_1^2 + z_0^2} - \sqrt{R_2^2 + z_0^2} + R_2 - R_1) \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2qC}{m}}$$

6 Champ de pesanteur au sommet d'une montagne

1 • Entre ces deux champs on a les correspondances suivantes :

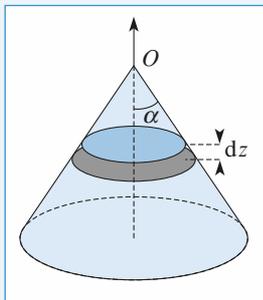
électrostatique	gravitation
champ \vec{E}	champ \vec{g} ($\approx \vec{g}$ pour le champ terrestre)
charge q	masse m
densité volumique de charge ρ	masse volumique ρ
constante $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$	constante $-G$

2 • On considère la tranche d'épaisseur infinitésimale dz et de cote z et d'aire $S(z)$. Sa densité surfacique est :

$$d\sigma = \frac{\text{charge}}{\text{surface}} = \frac{\rho S(z) dz}{S(z)} = \rho dz.$$

Le champ créé en un point de son axe par un disque de densité surfacique uniforme σ est dirigé selon l'axe et a pour norme (cf. le cours et l'exercice 5) :

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha).$$



Le champ créé en O par la tranche dz est donc :

$$d\vec{E} = dE \vec{e}_z, \text{ avec } dE = \frac{\rho dz}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha).$$

L'angle α est ici identique pour toutes les tranches. Il suffit donc d'intégrer dz , et on obtient :

$$\vec{E}(O) = \frac{\rho h}{2\epsilon_0}(1 - \cos\alpha).$$

3 • On peut considérer le système comme une superposition de distributions fictives de masses (cf. schéma ci-dessous). D'après le résultat précédent et l'analogie entre les champs électrostatique et de gravitation :

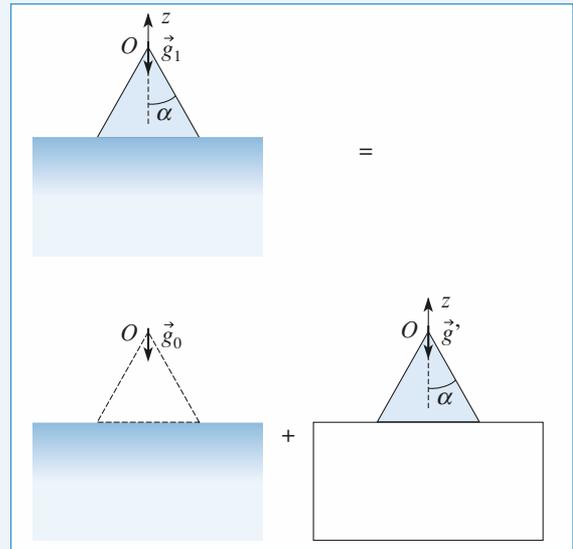
$$g' = 2\pi G \rho h (1 - \cos\alpha).$$

Et donc $g_1 = g_0 + g'$, d'où :

$$\Delta g = 2\pi G \rho h (1 - \cos\alpha).$$

Numériquement, on obtient $\Delta g = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Même si la forme de la montagne est irréaliste, on a là encore un ordre de grandeur correct. Cette variation de g est mesurable.



7 Analyse d'un champ électrostatique

a) créé par des charges ponctuelles

1 • Le champ est convergent au voisinage d'une charge négative et divergent au voisinage d'une charge positive. Une ligne de champ qui ne passe pas par un point de champ nul ne peut donc pas relier deux charges de même signe. On déduit ainsi de l'analyse du schéma :

$$q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 < 0, q_4 > 0 \text{ et } q_5 > 0.$$

2 • Les charges q_1 et q_2 étant de même signe, il y a nécessairement un point où le champ est nul sur le segment qui les relie. Il en va de même pour q_4 et q_5 : les points C et D sont respectivement ces deux points de champ nul : en ces points se croisent deux lignes de champ ce qui n'est possible que si le champ y est nul.

C'est ce même raisonnement qui permet de dire qu'en A et B le champ est aussi nul.

3 • Sur le cercle, les quatre quarts sont orientés : de C vers A , de D en A , de C vers B , de D vers B . À l'intérieur du cercle : de A vers O , de B vers O . À l'extérieur du cercle : de A vers A' , de B vers B' .

4 • Le plan passant par la charge centrale et qui est normal à l'axe qui porte les charges est plan de symétrie. On en déduit que $q_5 = q_1$ et $q_4 = q_2$.

5 • On considère la courbe fermée formée par les quatre lignes de champ qui relient les points de champ nul A, B, C et D . Cette courbe engendre une surface fermée Σ par rotation autour de l'axe qui porte les charges. Sur Σ , le champ est en tout point soit nul, soit tangent. Le flux de \vec{E} à travers

Σ est donc nul. D'après le théorème de Gauss, la charge totale enfermée dans Σ est nulle. On en déduit :

$$q_2 + q_3 + q_4 = 0 \text{ ou encore } 2q_2 = -q_3.$$

Remarques

Si la relation était $2q_2 > -q_3$, alors des lignes de champ issues de q_2 (et de q_4) partiraient vers l'infini.

Dans le cas 2, $q_2 < -q_3$, alors des lignes de champ issues de q_3 viendraient de l'infini ou des deux autres charges.

b) créé par une distribution filiforme

1 • Le plan du schéma est plan de symétrie, ainsi que le plan qui contient les trois fils. Le système est également invariant par translation parallèlement à la direction des fils.

2 • D'après le sens des lignes de champ, ou en considérant que le flux de \vec{E} à travers un cylindre qui entoure le fil de gauche est positif. On en conclut, d'après le théorème de Gauss, que ce fil est chargé positivement.

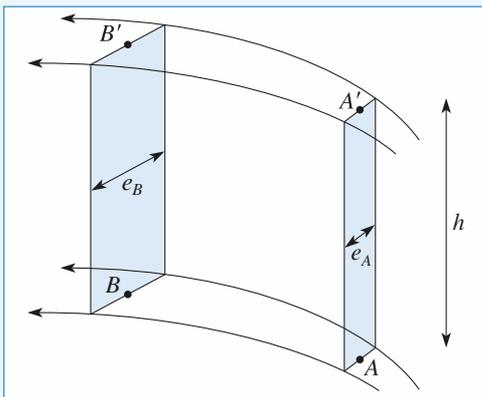
De même, on voit que le fil du milieu est chargé négativement, et le fil de droite positivement.

3 • On considère un parallélépipède dont la base est constituée par le plan du schéma, et de hauteur (parallèle aux fils) égale à h . Le flux de \vec{E} à travers les deux bases est nul (\vec{E} est parallèle au schéma) et, d'après l'orientation des lignes de champ aux points considérés, le flux de \vec{E} à travers les quatre autres faces est positif. D'après le théorème de Gauss, on peut en conclure que la somme des charges situées à l'intérieur du parallélépipède est positive. La charge totale des fils est positive (les lignes de champ divergent loin des fils).

4 • Les deux lignes de champ qui encadrent A (et B) ainsi que celles obtenues par translation de h vers « le haut » qui encadrent A' (et B') permettent de définir un tube de champ avec deux sections rectangulaires d'aires $S_A = he_A$ et $S_B = he_B$. Dans cette zone il n'y a aucune charge (les charges sont localisées sur les fils), donc le flux de \vec{E} à travers ces deux sections a la même valeur. Si les largeurs e_A et e_B sont prises orthogonales au champ, et si on suppose que le champ est quasi uniforme sur chaque section :

$$E(A) he_A \approx E(B) he_B.$$

On mesure sur le schéma : $e_A \approx 6 \text{ mm}$ et $e_B \approx 11 \text{ mm}$. Donc $E(B) \approx 55 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.



5 • Les tubes de champ deviennent très larges au voisinage du point C ; le champ y est donc très faible, en comparaison du champ dans les autres zones.

Remarque : Il existe, près du point C , un point de champ nul : la somme vectorielle des champs créés par les trois fils est nulle.

8 Champ créé par un fil infiniment long uniformément chargé

1 • Le système de coordonnées adapté est un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) dont l'axe (Oz) se confond avec l'axe du fil.

Tout plan contenant l'axe (Oz) est plan de symétrie ; \vec{E} est donc contenu dans le plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) .

Le fil étant infini, tout plan normal à (Oz) est également plan de symétrie : \vec{E} est donc contenu dans le plan $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. \vec{E} est donc orienté comme \vec{e}_r :

$$\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{e}_r.$$

Le système est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) . E est donc indépendant de θ . Le système est invariant par translation parallèle à l'axe (Oz) . E est donc indépendant de z .

En conclusion, $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.

2 • La norme de E est invariante sur une surface cylindrique Σ_1 , de rayon r et de hauteur h quelconque, passant par le point M . En lui ajoutant les bases Σ_2 et Σ_3 , on fabrique une surface fermée Σ . Le flux de \vec{E} à travers Σ s'exprime très simplement en fonction de $E(r)$.

• Le flux de \vec{E} à travers les bases Σ_2 et Σ_3 est nul, car \vec{E} est parallèle à ces surfaces. Le calcul du flux de \vec{E} à travers Σ se limite donc à la surface Σ_1 .

• La normale à Σ_1 , orientée vers l'extérieur de Σ , se confond avec \vec{e}_r . E a la même valeur $E(r)$ en tout point de la surface Σ_1 dont l'aire est égale à $2\pi r h$. On peut donc écrire :

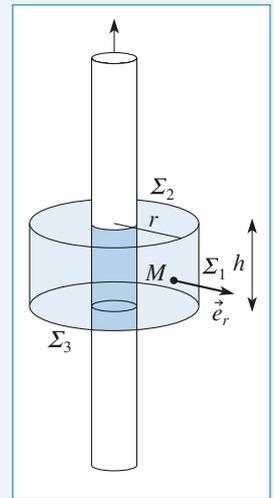
$$\Phi = 2\pi r h E(r).$$

L'autre expression du flux Φ , obtenue par le théorème de Gauss, est différente selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur du cylindre chargé :

• si $r < a$ (point à l'intérieur), la charge contenue à l'intérieur de Σ est $Q = \rho \pi r^2 h$:

$$\Phi = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} = 2\pi r h E(r);$$

d'où $\vec{E} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$ pour $r < a$;



• si $r > a$ (point extérieur, comme sur la figure), la charge contenue à l'intérieur de Σ est $Q = \rho \pi a^2 h$.

$$\Phi = \frac{\rho \pi a^2 h}{\epsilon_0} = 2\pi r h E(r);$$

d'où $\vec{E} = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$ pour $r > a$.

5 • Par définition : $\lambda = \frac{\text{charge}}{\text{longueur}}$.

Une longueur h de fil occupe un volume $V = \pi a^2 h$ et contient une charge $Q = \rho \pi a^2 h$, et donc $\lambda = \rho \pi a^2$.

D'où : $\vec{E} = \frac{\lambda r}{2\pi a^2 \epsilon_0} \vec{e}_r$ si $r < a$

et : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$ si $r > a$.

Lorsque a tend vers zéro à λ constant, le champ à l'extérieur garde la même expression. Le champ au niveau de la surface tend vers l'infini.

Remarques

• *Le cas limite du fil infiniment fin (filiforme) correspond à une densité volumique infinie et à un champ infini au niveau du fil.*

• *Pour ce cas limite, on peut calculer directement le champ en écrivant que la charge contenue à l'intérieur de Σ est égale à λh .*

4 • Connaissant $E(r)$, on peut déterminer $V(r)$ par intégration :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r.$$

V est donc une primitive de $-E(r)$:

$$V = \frac{\lambda r^2}{4\pi a^2 \epsilon_0} + C \quad \text{si } r < a$$

et $V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$ si $r > a$,

en prenant un potentiel nul pour $r = r_0$.

V étant continue, $C = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \left[\ln \frac{a}{r_0} - \frac{1}{2} \right]$.

Remarque : L'expression de V montre bien qu'il est impossible de choisir la constante d'intégration par la condition $V = 0$ pour r infini, car il y a des charges à l'infini.

On peut choisir $r_0 = a$ pour « simplifier » l'expression de V .

5 • • Les symétries sont identiques, ainsi que l'expression du flux en fonction de $E(r)$.

• Si $r < a$ (point à l'intérieur), la charge contenue à l'intérieur de Σ est nulle :

$$\Phi = 0 = 2\pi r h E(r); \text{ d'où } \vec{E} = \vec{0}.$$

• Si $r > a$ (point extérieur), la charge contenue à l'intérieur de Σ est $Q = \sigma 2\pi a h$.

$$\Phi = \frac{\sigma 2\pi a h}{\epsilon_0} = 2\pi r h E(r); \text{ d'où } \vec{E} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 r} \vec{e}_r.$$

Une longueur h de fil contient une charge $Q = \sigma 2\pi a h$, donc :

$$\lambda = \frac{\text{charge}}{\text{longueur}} = \sigma 2\pi a.$$

On retrouve donc $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$ si $r > a$.

Le potentiel garde la même expression à l'extérieur, et il est uniforme (champ nul) à l'intérieur :

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} \quad \text{si } r > a$$

et $V = -\frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \ln \frac{a}{r_0}$ si $r < a$.

Là encore on peut choisir $r_0 = a$ si l'on veut.

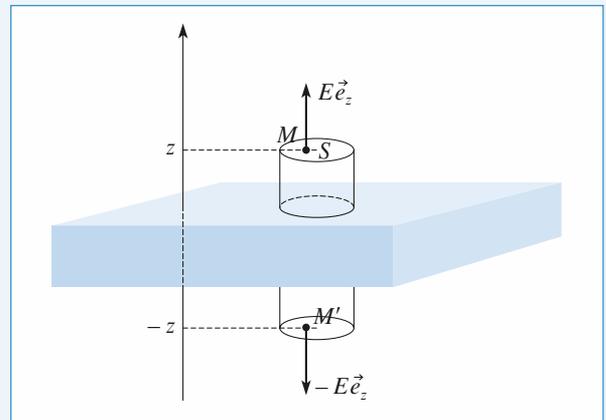
9 Charges uniformément réparties entre deux plans parallèles

1 • Tout plan parallèle à l'axe Oz et passant par M est plan de symétrie pour les charges. \vec{E} est donc parallèle à \vec{e}_z .

Le système est invariant par toute translation parallèle à \vec{e}_x ou à \vec{e}_y . On en conclut que $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$.

2 • Le plan $z = 0$ est plan de symétrie. Si M et M' sont deux points de cotes z et $-z$, $\vec{E}(M')$ est symétrique de $\vec{E}(M)$, soit $E(-z) = -E(z)$. $E(z)$ est donc une fonction impaire et on limite les calculs au cas $z > 0$.

3 • \vec{E} est uniforme sur toute surface orthogonale à \vec{e}_z . On choisit donc comme surface de Gauss Σ un cylindre de base orthogonale à \vec{e}_z , passant par le point M de cote z et le point M' de cote $-z$. Le flux de \vec{E} à travers la partie de Σ qui est parallèle à \vec{e}_z est nul, et les flux de \vec{E} à travers les deux bases sont égaux à $S E(z)$.



• Première expression du flux :

$$\Phi = 2 E(z) S \quad (\text{pour } z > 0).$$

- Cas $z > \frac{e}{2}$:

le cylindre découpe dans la zone chargée une « rondelle » d'aire S et d'épaisseur e . La charge interne à Σ est donc $Q = \rho S e$. La deuxième expression du flux est donc :

$$\Phi = \frac{\rho S e}{\epsilon_0}$$

En égalant les deux expressions de Φ , on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } z > \frac{e}{2} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } z < -\frac{e}{2}$$

- Cas $0 < z < \frac{e}{2}$:

le cylindre est entièrement plongé dans la zone chargée. Il découpe dans celle-ci une « rondelle » d'aire S et d'épaisseur $2z$ (si $z > 0$).

La charge interne à S est donc $Q = 2\rho S z$.

La deuxième expression du flux est donc :

$$\Phi = \frac{2\rho S z}{\epsilon_0} \quad (\text{pour } z > 0)$$

En égalant les deux expressions de Φ , on obtient :

$$\vec{E} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

Les valeurs de $E(z)$ pour $z < 0$ se déduisent de :
 $E(-z) = -E(z)$.

Conclusion :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } z < -\frac{e}{2}; & \text{(le champ est bien dirigé} \\ & & \text{selon } -\vec{e}_z \text{ pour} \\ \vec{E} &= \frac{\rho z}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}; & 0 > z > -\frac{e}{2} \\ & & \text{puisque } z \text{ y est négatif)} \\ \vec{E} &= \frac{\rho e}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } z > \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

- 4 • Le potentiel s'obtient par intégration de $E(z)$:

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V, \text{ donc } E(z) = -\frac{dV}{dz};$$

$V(z)$ est une primitive de $-E(z)$. On obtient :

$$V = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} z + C_1 \quad \text{si } z < -\frac{e}{2};$$

$$V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + C_2 \quad \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2};$$

$$V = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} z + C_3 \quad \text{si } z > \frac{e}{2}.$$

La fonction $V(z)$ étant continue :

$$C_1 = C_2 + \frac{\rho e^2}{8\epsilon_0} \quad \text{et} \quad C_3 = C_1.$$

On peut faire le choix de $C_2 = 0$ pour « simplifier ».

- 5 • Par définition : $\sigma = \frac{\text{charge}}{\text{surface}}$. Une rondelle d'aire S a

un volume $V = S e$, et renferme une charge $Q = \rho S e$. On en déduit $\sigma = \rho e$. Le champ s'exprime alors par :

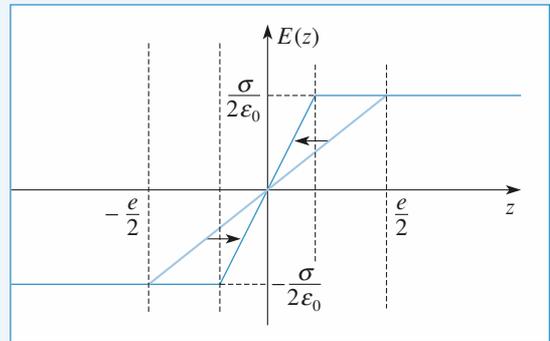
$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } z < -\frac{e}{2};$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma z}{\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } -\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2};$$

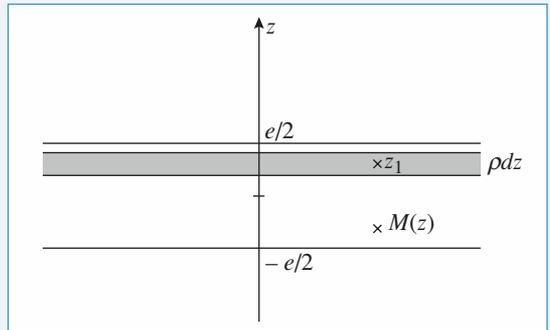
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad \text{si } z > \frac{e}{2}.$$

- 6 • Le champ à l'extérieur qui ne dépend que de σ reste inchangé lorsque e tend vers zéro. À la limite ($e = 0$) le champ subit, à la traversée du plan $z = 0$, une discontinuité

d'amplitude $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$.



- 7 •



Le plan de cote z_1 crée un champ $\frac{\rho dz}{2\epsilon_0}$ en $z > z_1$, un champ

$$-\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} \text{ en } z < z_1 \text{ donc}$$

pour $z > \frac{e}{2}$

$$E(z) = \int_{-e/2}^{e/2} \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} = \frac{\rho e}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

pour $-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$

$$E(z) = \int_{-e/2}^z \frac{\rho dz}{2\epsilon_0} + \int_z^{e/2} -\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} = \frac{\rho z}{\epsilon_0} = \frac{\sigma z}{\epsilon_0}$$

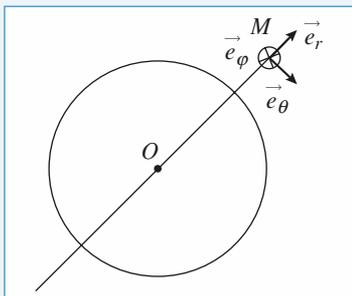
pour $-\frac{e}{2} > z$

$$E(z) = \int_{-e/2}^{e/2} -\frac{\rho dz}{2\epsilon_0} = -\frac{\rho e}{2\epsilon_0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

10 Champ créé par une sphère chargée en volume

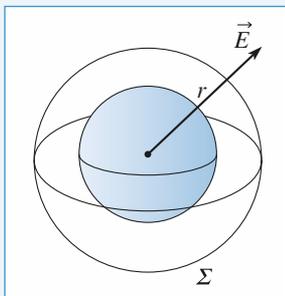
1 • Le système de coordonnées adapté est un système de coordonnées sphériques (r, θ, φ) .

Tout plan contenant le centre O est plan de symétrie ; en M le plan de la feuille $(\vec{e}_\theta(M), \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est plan de symétrie ; ainsi que le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$; \vec{E} est donc radial : $\vec{E}(M) = E \vec{e}_r$.



Le système est invariant par rotation autour de tout axe passant par O . E est donc indépendant de θ et de φ . Le champ électrique est donc de la forme $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$.

2 •



$E(r)$ est uniforme sur la sphère Σ de rayon r passant par le point M .

La normale à Σ , orientée vers l'extérieur de Σ , se confond avec \vec{e}_r .

L'aire de Σ est égale à $4\pi r^2$.

Le flux de \vec{E} à travers Σ s'exprime donc très simplement en fonction de $E(r)$:

$$\Phi = 4\pi r^2 E(r).$$

L'autre expression du flux Φ , obtenue par le théorème de Gauss, est différente selon que le point M est à l'intérieur ou à l'extérieur de la sphère chargée :

• si $r < a$ (point à l'intérieur), la charge contenue à l'intérieur de Σ est $Q(r)$:

$$\Phi = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}, \quad \text{d'où} \quad \vec{E} = \frac{Q(r)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r;$$

• si $r > a$ (point extérieur, comme sur le schéma), la charge contenue à l'intérieur de Σ est la charge totale Q :

$$\Phi = \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad \text{d'où} \quad \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

À l'extérieur d'une distribution à symétrie sphérique, le champ électrique est équivalent au champ créé par une charge ponctuelle située au centre de la distribution.

3 • Si la densité volumique de charge est uniforme, $Q(r)$ est proportionnelle au volume de la sphère de rayon r , soit :

$$Q(r) = Q \frac{r^3}{a^3} \quad \text{pour } r < a.$$

On obtient donc $\vec{E} = \frac{Qr}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{e}_r$ pour $r < a$ et une expres-

sion inchangée $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ pour $r > a$.

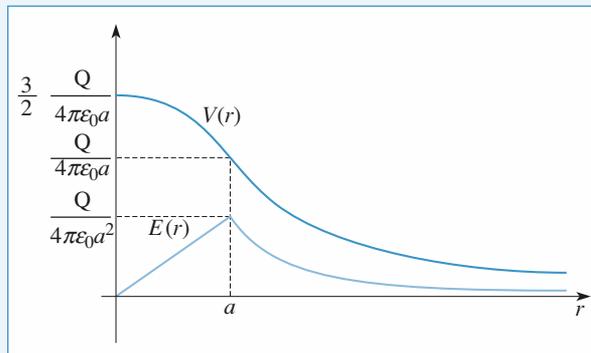
Le potentiel s'obtient par intégration du champ :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V, \quad \text{donc} \quad E(r) = -\frac{dV}{dr}.$$

Si $r > a$ avec $V \rightarrow 0$ pour $r \rightarrow \infty$, la constante d'intégration

est nulle et $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$; $r < a$ et $V = -\frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 a^3} + C$.

Le champ restant fini (et continu), $V(r)$ est continue en a , d'où $C = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a}$.



Champ et potentiel créés par une sphère uniformément chargée en volume

4 • Le potentiel et le champ ont même expression à l'extérieur ($r > a$). En revanche, $Q(r)$ est toujours nul à l'intérieur ; d'où :

• $E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ et $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ si $r > a$;

• $E(r) = 0$ et $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$ (uniforme) si $r < a$.

Le champ est discontinu mais fini. Le potentiel reste donc continu.

On remarque que la discontinuité du champ :

$E(a^+) - E(a^-) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$ est égale à $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$, avec σ égal à la densité surfacique de charge.

11 Analogie gravitationnelle : champ de pesanteur dans une cavité sphérique

1 • Le principe de la solution est le suivant :

Par analyse des symétries $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$.

Soit Σ la sphère de rayon r , avec $r < R$.

Σ contient la charge $Q(r) = \rho \times \text{volume} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$.

On applique le théorème de Gauss à Σ :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0}.$$

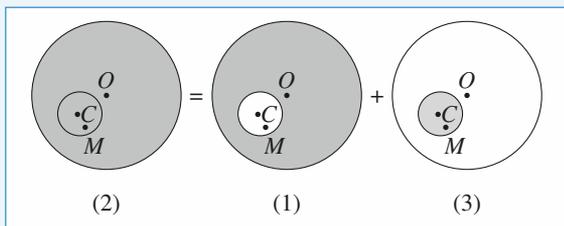
D'où le résultat : $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \vec{e}_r$ pour $r < R$.

2 • Le champ électrostatique et le champ gravitationnel sont formellement analogues. Le champ de gravitation en un point intérieur est $\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(r) \vec{e}_r$, avec :

$$\mathcal{G}(r) = -4\pi G \frac{\rho}{3} r \vec{e}_r \quad \text{ou} \quad \vec{\mathcal{G}}(M) = -4\pi G \frac{\rho}{3} \overrightarrow{OM}.$$

G est la constante de gravitation universelle qui correspond à $-\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ dans l'analogie.

3 • On affecte l'indice 1 au système étudié, l'indice 2 à la Terre sans cavité et l'indice 3 à une sphère pleine de masse volumique ρ occupant l'espace de la cavité. On peut considérer que (2) est la superposition de (1) et (3) :



La superposition des distributions implique l'addition des champs :

$$\vec{\mathcal{G}}_2(M) = \vec{\mathcal{G}}_1(M) + \vec{\mathcal{G}}_3(M).$$

D'après la question 2) :

$$\vec{\mathcal{G}}_2(M) = -4\pi G \frac{\rho}{3} \overrightarrow{OM} \quad \text{et} \quad \vec{\mathcal{G}}_3(M) = -4\pi G \frac{\rho}{3} \overrightarrow{CM}.$$

On obtient donc, en remarquant que $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{OC}$:

$$\vec{\mathcal{G}}_1(M) = -4\pi G \frac{\rho}{3} \overrightarrow{OC}.$$

Le champ de gravitation est donc uniforme dans une cavité sphérique, quel que soit son rayon.

12 Modélisation d'un noyau

1 • La charge dq comprise entre deux sphères de rayon r et $r + dr$ c'est-à-dire dans le volume $d\tau = 4\pi r^2 dr$ s'exprime facilement, la densité ρ étant uniforme et égale à $\rho(r)$.

$$dq = \rho d\tau = \rho \times 4\pi r^2 dr$$

La charge totale s'obtient donc en sommant toutes les contributions :

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2 dr = \int_0^a \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) 4\pi r^2 dr \\ &= \rho_0 4\pi \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5}\right) = \frac{\rho_0 8\pi a^3}{15}. \end{aligned}$$

2 • En tout point extérieur à la sphère $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$

$$\text{or } \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 8\pi a^3}{15 \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^2} \Rightarrow \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r^3} \vec{r}.$$

3 • Le champ est radial et ne dépend que de r : on peut appliquer le théorème de Gauss en une sphère de rayon r pour surface de Gauss.

En un point M de la surface de Gauss, on a bien $\vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot dS$ et E uniforme sur toute la surface

$$\text{alors } \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r).$$

q_{int} est la charge comprise dans la sphère de rayon r soit, en reprenant le calcul fait en 1., en intégrant de 0 à r :

$$q_{\text{int}} = \frac{\rho_0 4\pi}{15} \left(5r^3 - \frac{3r^5}{a^2}\right)$$

$$\text{donc } E(r) = \frac{\rho_0 4\pi \left(5r^3 - \frac{3r^5}{a^2}\right)}{15 \cdot 4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2}\right)$$

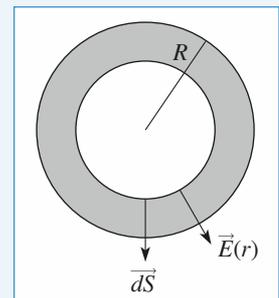
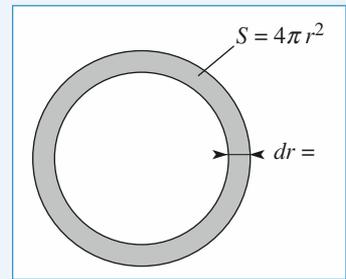
$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{int}} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) \vec{r}$$

On vérifie la continuité de \vec{E} en $r = a$: $\vec{E}(r = a) = \frac{2\rho_0 a}{15\epsilon_0} \vec{e}_r$.

4 • $V_{\text{ext}}(r) = -\int E dr + \text{cte} = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r}$ avec $V(\infty) = 0$.

Ou encore en prenant la référence de potentiel $V(\infty) = 0$

$$\text{alors } V_{\text{ext}}(r) = -\int_r^\infty E dr = \frac{2\rho_0 a^3}{15\epsilon_0 r}.$$



$$5 \bullet V_{\text{int}}(r) = - \int E dr + \text{cte} = - \int \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^3}{5a^2} \right) dr + \text{cte}$$

$$V_{\text{int}}(r) = - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} \right) + \text{cte.}$$

La constante est obtenue par continuité soit

$$V_{\text{int}}(a) = V_{\text{ext}}(a) = - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2}{6} - \frac{a^4}{20a^2} \right) + \text{cte} = \frac{\rho_0 a^2}{15\epsilon_0}$$

$$\text{soit } \text{cte} = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6} - \frac{1}{20} \right) = \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0}$$

$$\text{Il vient : } V_{\text{int}}(r) = - \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^2}{6} - \frac{r^3}{20a^2} \right) + \frac{\rho_0 a^2}{4\epsilon_0}$$

$$= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(- \frac{r^2}{6} - \frac{r^4}{20a^2} + \frac{a^2}{4} \right).$$

On aurait pu aussi calculer $V_{\text{int}}(r) - V_{\text{ext}}(r=a) = - \int_r^a E dr$.

13 Interaction proton - électron (Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène)

1 • Déterminons le champ \vec{E}_1 créé par la sphère uniformément chargée ; \vec{E}_1 est radial et ne dépend que de r :

$$\vec{E}_1 = E_1(r) \vec{u}_r.$$

Pour $r > R$ tout se passe comme si la charge totale de la

sphère était en O , soit : $E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ pour $r > R$.

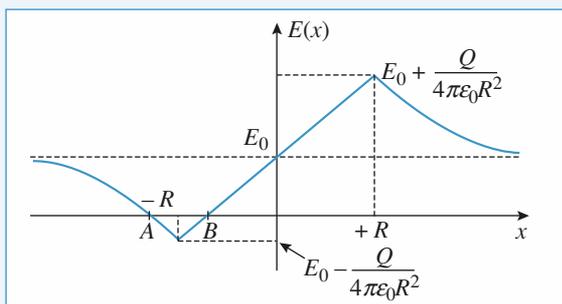
Pour $r < R$, l'application du théorème de Gauss donne :

$$E_1(r) 4\pi r^2 = Q \frac{r^3}{R^3} \text{ soit } E_1(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \text{ pour } r < R.$$

On pourra se reporter à l'exercice 10 (incontournable) pour un calcul plus détaillé.

Sachant que $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$, cela donne sur l'axe Ox :

	$x < -R$	$-R < x < 0$	$0 < x < R$	$x > R$
\vec{E}_0	$E_0 \vec{u}_x$	$E_0 \vec{u}_x$	$E_0 \vec{u}_x$	$E_0 \vec{u}_x$
\vec{E}_1	$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_x$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} x \vec{u}_x$	$\frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{u}_x$	$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} \vec{u}_x$
\vec{E}_2	$\left(E_0 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right) \vec{u}_x$	$\left(E_0 + \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right) \vec{u}_x$	$\left(E_0 + \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}\right) \vec{u}_x$	$\left(E_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2}\right) \vec{u}_x$



2 • La particule $-q$ est soumise à la force $-q\vec{E}$ dont la résultante est nulle si $\vec{E} = 0$. Ceci n'est possible que si $E_0 < \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$ pour que les deux points A et B existent. Il

existe donc deux positions d'équilibre si $E_0 < \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

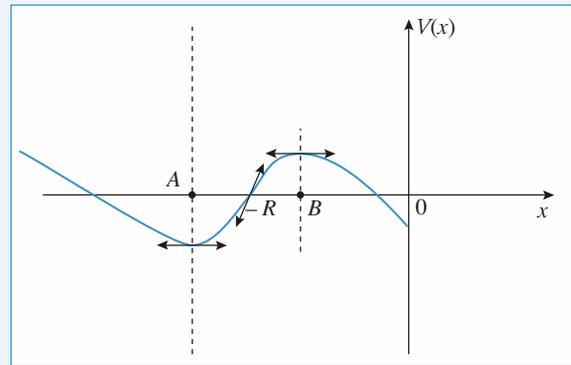
Pour étudier la stabilité déterminons l'énergie potentielle de la particule, $E_p = -qV$:

$x < -R$: $V = -E_0 x - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x} - E_0 R - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$ en prenant par exemple $V = 0$ en $x = -R$.

$-R < x < 0$: $V = -E_0 x - \frac{Qx^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} - E_0 R + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$ en

prenant à nouveau $V = 0$ en $x = -R$.

L'allure de $V(x)$ est la suivante :



En effet, étudions les concavités pour x en A et B :

$$x < -R : \frac{dV}{dx} = -E_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 x^2} ; x_A = -\sqrt{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 E_0}}$$

$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{x^3} > 0$ pour $x < 0$ donc la concavité est vers le haut en particulier en x_A .

$$-R < x < 0 : \frac{dV}{dx} = -E_0 - \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} ; x_B = -\frac{4\pi\epsilon_0 E_0 R^3}{Q}$$

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} < 0 \quad \forall x, \text{ donc la concavité est vers le bas.}$$

Sachant que $E_p = -qV$, la position d'équilibre stable est en B

avec $x_B = -\frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E_0}{Q}$.

3 • Le mouvement de la particule est donné par les solutions de l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -qE = -q \left(E_0 + \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)$$

Posons $y = x - x_B$, cela donne :

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -q \left(E_0 + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} y + \frac{Qx_B}{4\pi\epsilon_0 R^3} \right)$$

$$= -\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 R^3} y \quad (y = 0 \text{ est la position d'équilibre})$$

Le mouvement sera bien un mouvement sinusoïdal si la particule reste dans le domaine $-R < x < +R$. A est toujours entre $-R$ et 0 , donc $a_m = R - \frac{4\pi\epsilon_0 R^3 E_0}{Q}$.

a_m est au maximum égal à R si $E_0 = 0$.

Cherchons la pulsation ω_0 du mouvement :

$$\omega_0^2 = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m R^3} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 m R^3}}.$$

$$4 \bullet \text{A.N.} : \omega_0 = \left[\frac{(1,6 \cdot 10^{-19})^2 \cdot 9 \cdot 10^9}{9 \cdot 10^{-31} \cdot (53)^3 \cdot 10^{-36}} \right]^{1/2}$$

Cette modélisation rend compte du comportement de l'électron de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Thomson où la charge du proton est uniformément répartie sur le volume de l'atome.

14 Champ, potentiel et capacité d'un condensateur plan

1 • Commençons par étudier les symétries et invariances : les plaques se comportant comme des plaques infinies, le système de charge est invariant par translation suivant x et y , donc le champ ne dépend que de z :

$$\vec{E}(M) = \vec{E}(z).$$

Soit un point M de l'espace, tout plan perpendiculaire aux plaques et passant par M est un plan de symétrie des charges, donc \vec{E} est suivant \vec{u}_z :

$$\vec{E}(M) = E(z) \vec{u}_z.$$

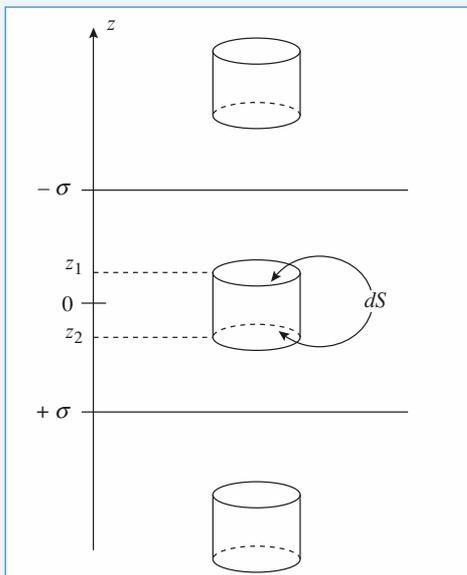
Le plan $z = 0$ est un plan d'antisymétrie des charges donc $E(-z) = +E(z)$.

Prenons les 3 surfaces de Gauss ci-dessous : il n'y a aucune charge à l'intérieur de ces surfaces donc :

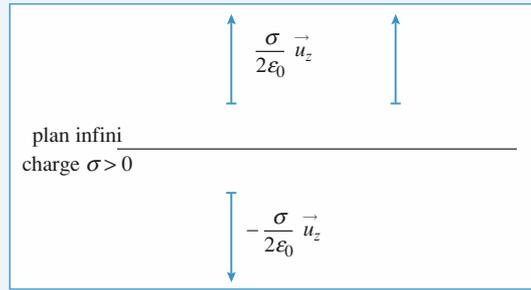
$$[E(z_1) - E(z_2)] dS = \frac{0}{\epsilon_0}$$

soit $E(z_1) = E(z_2)$.

Le champ électrique est uniforme dans les 3 zones, mais n'a pas nécessairement la même valeur.



2 • Rappelons qu'un plan infini uniformément chargé crée un champ $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$:



Superposons les différents champs :

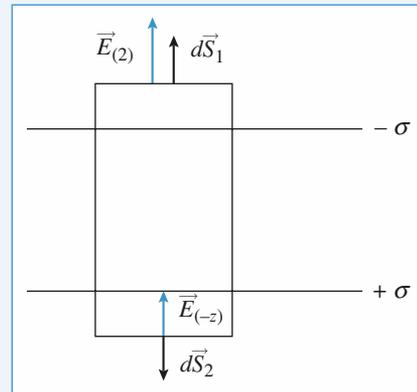
composante du champ suivant \vec{u}_z	plaque chargée $-\sigma$	plaque chargée $+\sigma$	ensemble des 2 plaques
$z > \frac{e}{2}$	$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	$\vec{0}$
$-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$	$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	$\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z$
$z < -\frac{e}{2}$	$+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	$-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z$	$\vec{0}$

On retrouve bien des champs uniformes dans les 3 zones.

3 • Le plan $z = 0$ est plan d'antisymétrie donc

$$\vec{E}(z) = +\vec{E}(-z)$$

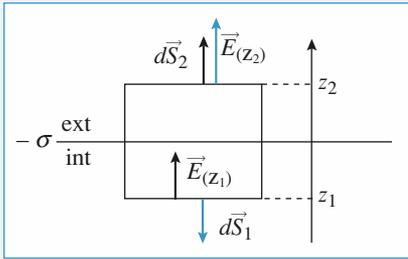
Considérons une surface de Gauss qui traverse les deux plaques



$$\begin{aligned} \oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} &= -\frac{\sigma S}{\epsilon_0} + \frac{\sigma S}{\epsilon_0} = 0 = \iint \vec{E}(z) \cdot d\vec{S}_1 \\ &+ \iint \vec{E}(z) \cdot d\vec{S}_2 \\ &= +E(z)S - E(-z)S \\ &= 0! \end{aligned}$$

On ne peut que vérifier $E(z) = E(-z)$.

Considérons une surface de Gauss « à cheval » sur une des plaques



$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\frac{\sigma S}{\epsilon_0} = -E_{\text{int}} S + E_{\text{ext}} S$$

Là encore on ne peut obtenir que $E_{\text{ext}} - E_{\text{int}}$.

En posant comme hypothèse supplémentaire que le champ est nul en dehors du condensateur, on retrouve alors $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

entre les plaques.

$$4 \bullet \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V \Rightarrow dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E dz$$

$$\text{d'où } V = -\frac{\sigma z}{\epsilon_0} + \text{cste.}$$

$$V\left(\frac{e}{2}\right) = 0 \Rightarrow \text{cste} = \frac{\sigma e}{2\epsilon_0} \Rightarrow V(z) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{e}{2} - z\right).$$

$$5 \bullet C = \frac{Q}{U} \text{ or } Q = \sigma S$$

$$\text{et } U = V\left(-\frac{e}{2}\right) - V\left(\frac{e}{2}\right) = \frac{\sigma e}{\epsilon_0} \left(= \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \right)$$

$$\text{d'où } C = \frac{\epsilon_0 S}{e}.$$

15 Énergie d'une liaison ionique

1 • Le 2^e terme est un terme de répulsion entre les deux nuages électroniques de même signe des deux ions (non interprétabilité des atomes), λ est donc > 0 .

La position d'équilibre (stable) est celle du minimum d'énergie potentielle.

Elle est donc solution de $\frac{dE_p}{dr} = 0$: on voit bien que sans le 2^e terme cette dérivée ne s'annulerait pas.

$$2 \bullet \frac{dE_p}{dr} = 0 \Leftrightarrow \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{9\lambda q}{4\pi\epsilon_0 r^{10}} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[1 - \frac{9\lambda/q}{r^8} \right] = 0$$

$$\text{donc à l'équilibre } \frac{\lambda/q}{r_{\text{eq}}^8} = \frac{1}{9}$$

$$\text{alors } E_{p(\text{eq})} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{eq}}} + \frac{\lambda q}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{eq}}^9} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{eq}}} \left[1 - \frac{\lambda/q}{r_{\text{eq}}^8} \right] = -\frac{0,88q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{eq}}}$$

Quand les deux ions sont infiniment éloignés l'un de l'autre $E_p \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$

L'énergie de dissociation est l'énergie qu'il faut fournir pour éloigner indéfiniment les deux ions d'où :

$$E_d = 0 - E_{p(\text{eq})} = \frac{0,88q^2}{4\pi\epsilon_0 r_{\text{eq}}}$$

$$\text{soit en eV } \frac{0,88 \times 1,6 \cdot 10^{-19}}{241 \cdot 10^{-12}} \times 910^9 \approx 5,25 \text{ eV}$$

soit en $\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1} \times 1,610^{-19} \times 6,02 \cdot 10^{23} = 506 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$. La liaison ionique étant la plus forte on a le bon ordre de grandeur.

LES OBJECTIFS

- Maîtriser l'étude des symétries et invariances d'une distribution de courants.
- Utiliser, à bon escient, la loi de Biot et Savart ou le théorème d'Ampère.

LES PRÉREQUIS

- Étude du champ magnétique vu dans le secondaire.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Construction du symétrique d'un vecteur.
- Opérations de symétrie.
- Produit vectoriel.
- Dérivation – Intégration.

ESSENTIEL

Loi de Biot et Savart

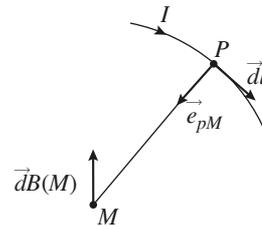
La contribution au champ magnétique en M d'un élément de courant $I d\vec{\ell}$ situé en P est donné, en régime permanent, par la loi de Biot et Savart :

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{e}_{PM}}{PM^2} \quad (\vec{e}_{PM} = \frac{\vec{PM}}{PM} \text{ vecteur unitaire dirigé de } P \text{ vers } M).$$

Le coefficient μ_0 vaut exactement $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$ (H désigne le henry, unité d'inductance).

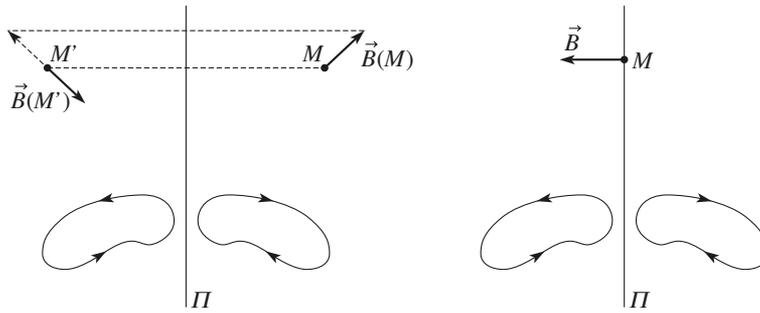
L'unité de champ magnétique est le tesla (symbole : T).

- Les 3 vecteurs $d\vec{\ell}$, \vec{e}_{PM} , $d\vec{B}$ forment donc un trièdre direct.
- Le champ magnétique terrestre est de l'ordre de 10^{-5} T .

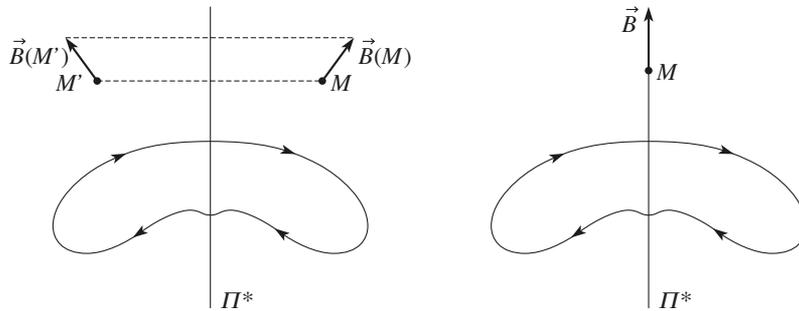


Symétries du champ magnétostatique

- Une transformation, qui laisse invariant le système de courants, laisse également invariant le champ magnétique.
- Un plan Π qui est plan de symétrie pour les courants est plan d'antisymétrie pour le champ \vec{B} :
 - au point M' symétrique de M par rapport au plan Π , le champ magnétique $\vec{B}(M')$ est opposé au symétrique du champ $\vec{B}(M)$;
 - le champ magnétique \vec{B} est perpendiculaire à Π en chacun de ses points.



- Un plan Π^* qui est plan d'antisymétrie pour les courants est plan de symétrie pour le champ \vec{B} :
 - au point M' symétrique de M par rapport au plan Π^* , le champ magnétique $\vec{B}(M')$ est égal au symétrique du champ $\vec{B}(M)$;
 - le champ magnétique \vec{B} est contenu dans Π^* en chacun de ses points.

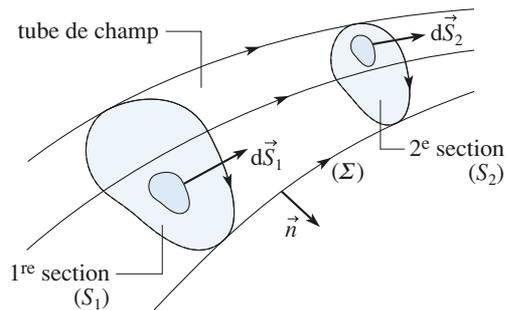


- Ces propriétés se résument en affirmant que le champ magnétique est un objet tridimensionnel qui a les propriétés de symétrie d'un *vecteur axial* ou *pseudo-vecteur*.

Comme en électrostatique, l'analyse des symétries doit précéder tout calcul de champ ; elle peut permettre de prévoir la direction du champ ainsi que les coordonnées adaptées au système.

Flux magnétique

- Le flux du champ magnétique à travers une surface fermée est toujours nul.
- Le flux du champ magnétique garde la même valeur à travers toutes les sections d'un même tube de champ ; le champ magnétique est à flux conservatif.

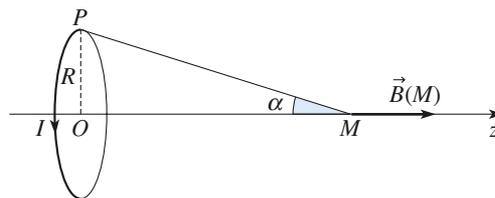


Spires

- Le champ magnétique en un point de l'axe (Oz) d'une spire circulaire (centre O , rayon R) a pour expression :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}(O) \sin^3 \alpha$$

avec $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z$.

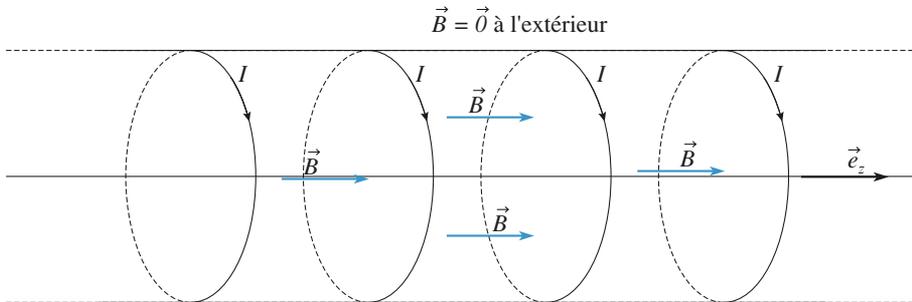


- Soit un solénoïde infiniment long, d'axe (Oz), comportant n spires régulièrement réparties par unité de longueur, chacune étant parcourue par un courant d'intensité I :

– le champ magnétique sur l'axe (et à l'intérieur) vaut :

$$\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z ;$$

– le champ magnétique à l'extérieur de ce solénoïde est nul.



Solénoïde infini portant n spires par unité de longueur : à l'intérieur \vec{B} est uniforme et égal à $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$

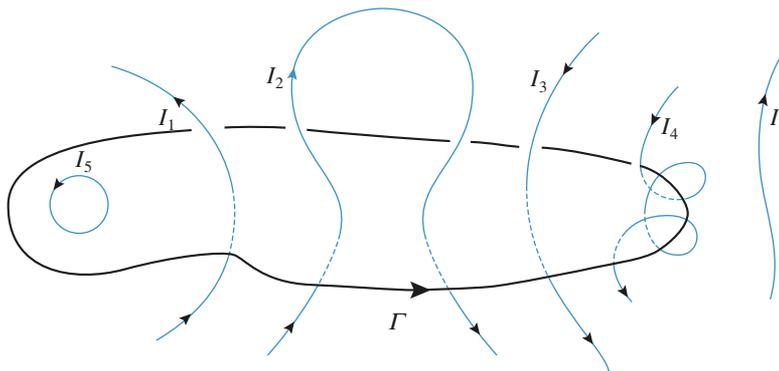
• Théorème d'Ampère

- Soit un champ magnétostatique créé par une distribution de courants ; la circulation de ce champ sur une courbe fermée (ou contour) Γ est égale à la somme des courants enlacés par Γ multipliée par μ_0 :

$$\mathcal{C}_r = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{\text{enlacés}} .$$

Le signe des courants enlacés est déterminé relativement à l'orientation du contour Γ en utilisant, par exemple, la « règle du tire-bouchon » .

Ainsi dans la situation suivante :



soit \vec{B} le champ magnétique créé par l'ensemble des courants I_1, I_2, \dots, I_5 et I_6 ;

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I_1 - I_3 - 3I_4) .$$

- Contrairement au cas du champ électrostatique, les lignes de champ magnétique sont, en général, des courbes fermées qui tournent autour des courants qui créent le champ.
- Dans le cas particulier idéalisé de distributions infinies (solénoïdes, nappes planes, les lignes de \vec{B} ne se referment qu'à l'infini.

Application au calcul d'un champ magnétique

- Préalablement à l'application du théorème d'Ampère, il faut étudier les symétries et les invariances de la distribution pour trouver un contour tel que le champ \vec{B} lui soit tangent ou perpendiculaire et de norme constante.
- En particulier, le théorème d'Ampère permet d'établir l'expression du champ dans les cas fondamentaux suivants :

– fil rectiligne infiniment long parcouru par un courant I : $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$;

– solénoïde de section quelconque infiniment long, avec n spires par unité de longueur :
 $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_z$ en tout point intérieur ; $\vec{B} = \vec{0}$ en tout point extérieur.

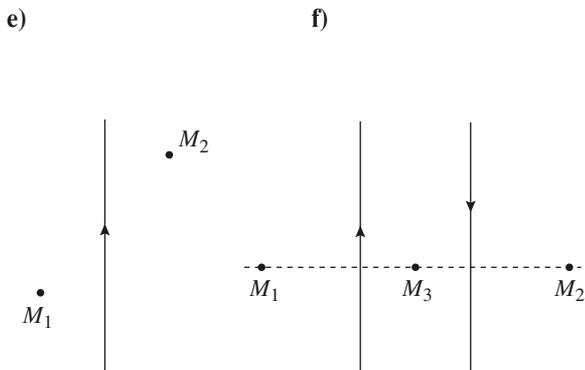
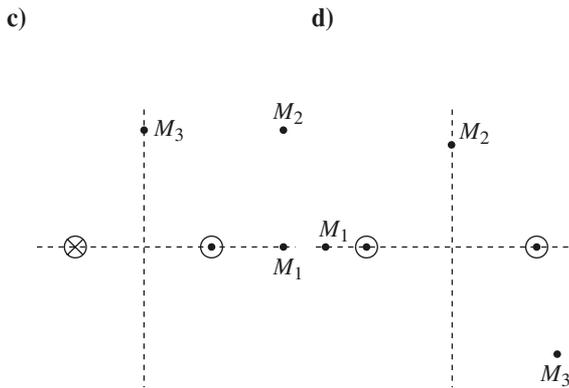
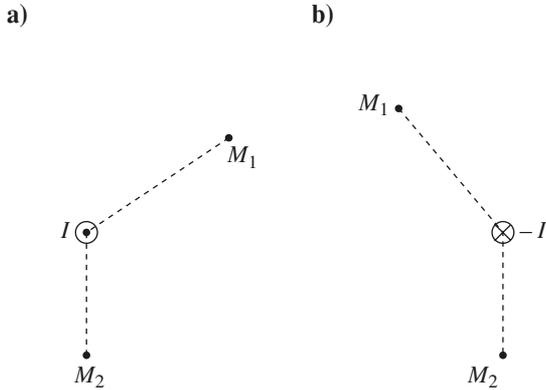
Conseils et pièges à éviter

- \vec{B} est toujours à flux conservatif alors que \vec{E} ne l'est que dans les régions vides de charges.
- \vec{E} dérive d'un potentiel scalaire donc sa circulation sur un contour fermé est toujours nulle. La circulation de \vec{B} n'est nulle que si aucun courant ne traverse le contour.
- Les plans de symétrie des charges transforment \vec{E} en son symétrique ; les plans de symétrie des courants transforment \vec{B} en l'opposé de son symétrique.
- Les plans d'antisymétrie des charges transforment \vec{E} en l'opposé de son symétrique ; les plans d'antisymétrie des courants transforment \vec{B} en son symétrique.

Exercices

1 Orientation du champ magnétique

Pour chacun des schémas suivants donner l'orientation du champ magnétique aux points M_i . Les courants sont tous de même intensité ; les fils sont rectilignes et infinis.

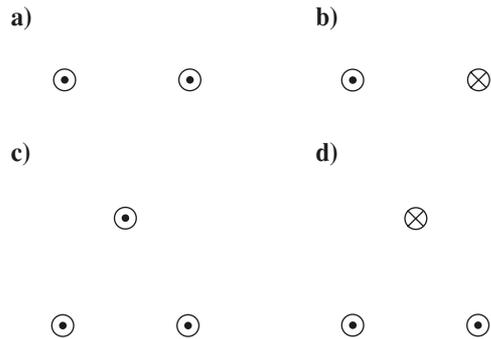


Conseils

Il est toujours plus astucieux de trouver un plan de symétrie de la distribution – lorsqu'il existe – car alors la direction est déterminée sans équivoque. Le champ B appartenant au plan d'antisymétrie, trouver **un** plan d'antisymétrie laisse une infinité de possibilités pour l'orientation de B dans ce plan. Il faut alors trouver un deuxième plan d'antisymétrie pour fixer sans plus d'équivoque la direction du champ. Une fois la direction trouvée, il reste à déterminer le sens de B . On peut alors faire appel à la règle des 3 doigts, du tire-bouchon ou à la loi de Biot et Savart. On peut aussi se souvenir que le champ magnétique « s'enroule » autour des courants rectilignes infinis dans le sens direct si le courant est « sortant », dans le sens horaire sinon.

2 Lignes de champ magnétique créées par des fils rectilignes infinis

Pour chacun des schémas suivants donner l'allure approximative des lignes du champ magnétique. Par convention le courant sortant est positif. Tous les courants ont même intensité.



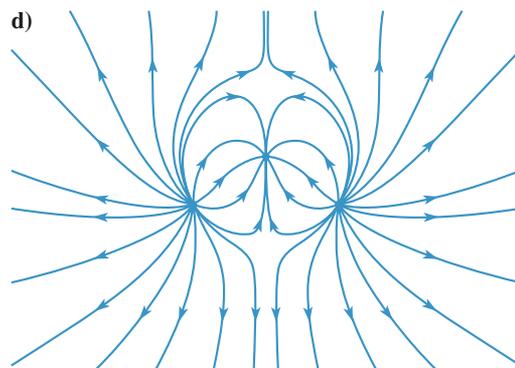
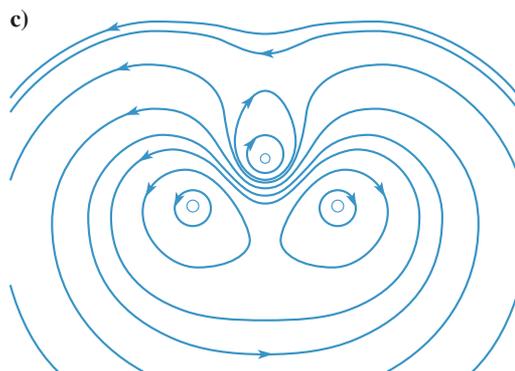
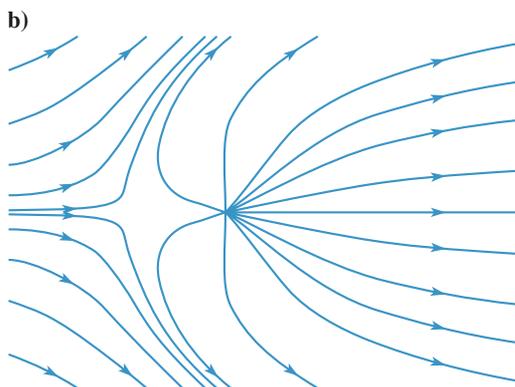
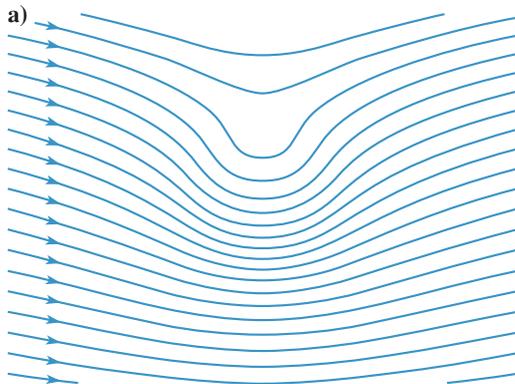
Conseils

En tout point de l'espace se superposent les champs que créeraient chacun des fils pris isolément (**théorème de superposition**).

Près d'un fil, le champ créé par ce fil est très intense comparé aux autres : on peut donc ignorer la contribution des autres champs au champ résultant. Loin des fils, la distribution est équivalente à **un seul fil** traversé par la somme des courants de tous les fils. Entre ces deux domaines, le champ en un point donne la direction de la ligne de champ. Par ailleurs les lignes de champ obéissent aux mêmes symétries que le champ bien évidemment.

3 Analyse d'un champ

Les quatre *schémas* représentent des lignes de champ ; on sait, de plus, que ces champs sont parallèles au plan des schémas et qu'ils sont invariants par translation perpendiculaire à ces schémas. Deux d'entre eux ne peuvent être des lignes de champ magnétique ; lesquels et pourquoi ?



Conseils

Quelle propriété vérifie le flux du champ magnétique à travers une surface fermée ?

Il suffit de trouver une surface pour laquelle cette propriété n'est pas vérifiée pour que le champ ne soit pas un champ magnétique.

Quelles surfaces choisir, sachant que le champ est parallèle au schéma et invariant par translation perpendiculaire au schéma ?

4 Analyse d'un champ magnétique

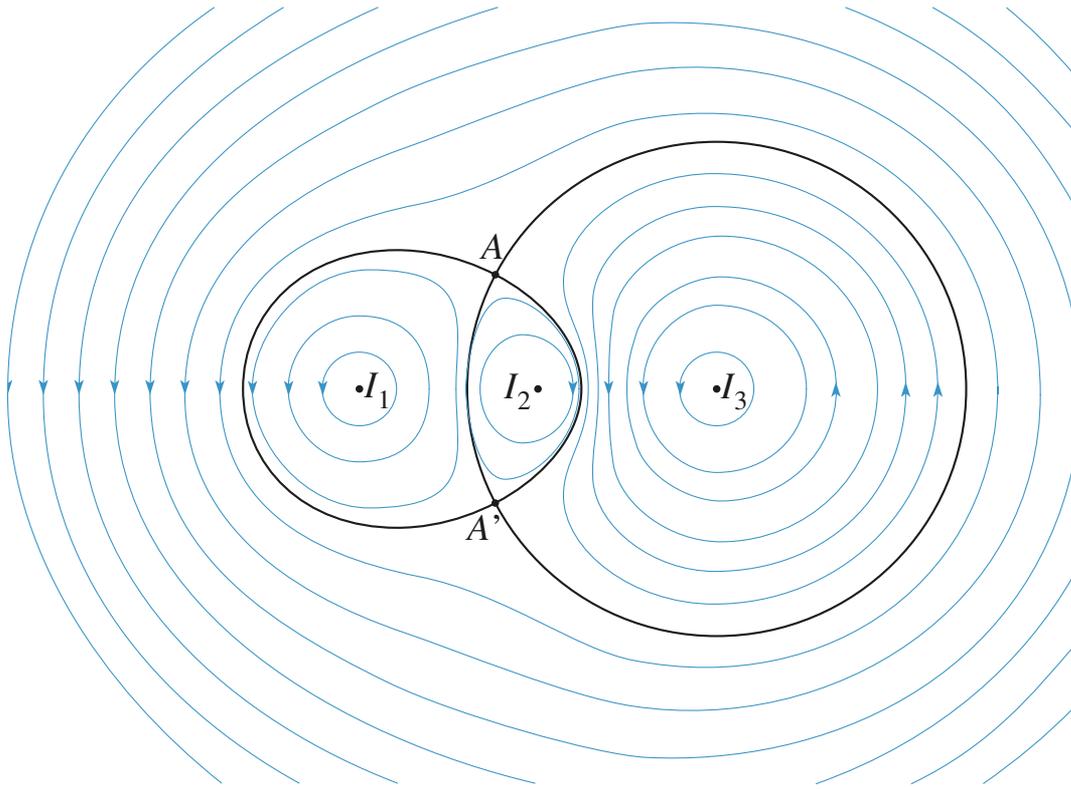
Le *schéma* représente les lignes du champ magnétique créé par trois fils infiniment longs, perpendiculaires au plan du schéma, parcourus par les courants I_1 , I_2 et I_3 . Par convention, un courant dirigé vers le lecteur est positif.

1 • Déterminer sans aucun calcul le signe de I_1 , I_2 , I_3 et celui de la somme $I_1 + I_2 + I_3$.

2 • Quelle est la valeur du champ \vec{B} en A et en A' ?

3 • $|I_2| = 1$ A. Calculer une valeur approchée de I_1 et de I_3 .

4 • On sait que le champ en M vaut 0,01 T. Estimer le champ magnétique au point P .



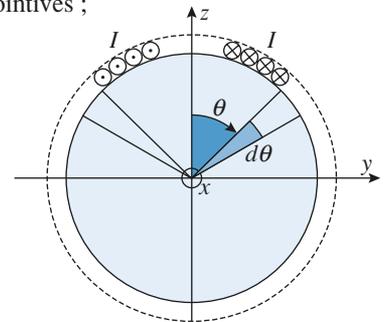
Conseils

1) Le sens du champ \vec{B} est indiqué par les flèches. On connaît donc le signe de la circulation de \vec{B} sur les lignes de champ qui sont des courbes fermées, à l'exception de celles qui aboutissent à un point de champ nul.

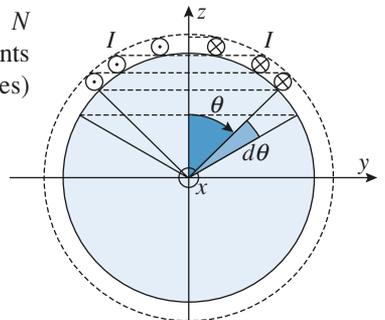
2) Deux lignes de champ peuvent-elles se croiser ? La position des points de champ nul permet d'écrire une équation vectorielle, soit deux équations. Il faut pour cela connaître l'expression du champ créé par un fil infini.

4) B est à flux conservatif. Considérer alors un tube de champ qui se referme sur deux sections passant par P et M . Mesurer sur la figure la « largeur » des sections en P et M , et en déduire le champ en P .

1 • Les spires sont jointives ;



2 • Les plans des N spires sont équidistants (spires non jointives) suivant (Oz) .



5 Sphère recouverte de spires (oral)

Une sphère de rayon R est recouverte d'un nombre élevé N de spires parcourues dans le même sens par un courant d'intensité I . Calculer le champ magnétique créé par cette distribution de courants au centre O de la sphère dans les deux cas suivants :

Conseils

Dans les deux cas il s'agit de sommer les champs des spires. Dans les deux cas, les spires se répartissent sur une demi-circonférence de longueur πR : quand on fait varier θ de 0 à π on décrit bien l'ensemble des spires, depuis celle de rayon nul au « pôle Nord » à celle de rayon nul au « pôle Sud » en passant par celle de rayon R à l'équateur.

Ce qui change c'est le nombre de spires par unité de longueur (et leur épaisseur bien évidemment) : dans le 1^{er} cas il y a N spires jointives réparties sur une longueur πR , dans le 2^e cas ce sont les projections des spires sur l'axe Oz qui sont en quelque sorte jointives.

Le champ d'une spire est en $\sin^3\theta$ donc il faut considérer le nombre de spires contenues entre θ et $\theta + d\theta$, car elles contribuent également au champ total en O . Leur nombre est proportionnel à $d\theta$ de manière immédiate dans le 1^{er} cas, dans le 2^e cas il s'exprime en dz , qu'on exprimera en fonction de $d\theta$. Il ne reste plus alors qu'à intégrer de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$.

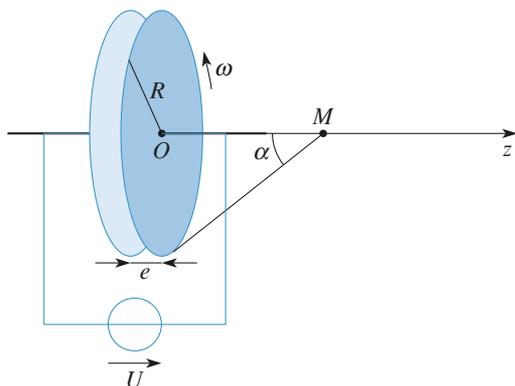
6 Disque de Rowland (oral)

Henry Rowland, physicien américain, a réalisé en 1876 une expérience qui a montré que le déplacement de charges électriques constituait bien un courant électrique susceptible de créer un champ magnétique.

Le principe, très simplifié, de l'expérience est expliqué ci-dessous.

1 • Un condensateur est constitué de deux disques métalliques de rayon R , très proches l'un de l'autre. Si on impose une différence de potentiel U entre ces disques, des charges électriques surfaciques apparaissent sur les faces métalliques en regard. La charge sur le disque positif est uniformément répartie, avec une densité surfacique

$$\sigma = \epsilon_0 \frac{U}{e}.$$



Le disque positif, de centre O , est mis en rotation autour de l'axe (Oz) . Calculer le champ magnétique en un point M de l'axe (Oz) . En quel point ce champ est-il maximal ? On repérera M par l'angle α .

2 • $U = 100$ kV, $R = 10$ cm, $e = 0,5$ mm, et la vitesse de rotation est de 6 000 tours par minute.

Calculer la valeur maximale du champ magnétique. Comparer cette valeur à celle du champ magnétique terrestre.

Conseils

Il faut partir de l'expression (à connaître) du champ \vec{B} sur l'axe d'une spire circulaire parcourue par un courant I .

Les différentes étapes du calcul de \vec{B} sont :

- déterminer le courant élémentaire dI associé à la « spire » de rayon r et de largeur dr ;
- déterminer le champ dB associé à cette spire élémentaire ;
- calculer le champ total $B(z)$ en intégrant dB .

Pour le calcul de l'intégrale, il est plus simple d'utiliser comme variable l'angle θ sous lequel on voit la « spire » de rayon r ; θ varie entre 0 et α .

7 Champ magnétique créé par une sphère chargée en rotation (oral)

On considère une sphère isolante, de rayon R et de centre O , creuse, portant une charge Q uniformément répartie sur sa surface. Elle tourne autour d'un axe Oz avec une vitesse angulaire ω constante qui ne perturbe pas la répartition des charges.

- 1 • Déterminer le champ créé en O .
- 2 • Déterminer le champ créé loin de la sphère.

Conseils

1) Les charges en mouvement créent des courants électriques. Il suffit de trouver le « découpage » en élément de surface se comportant comme des spires et on est ramené au calcul de l'exercice 5 (répartition de spires jointives ou non sur une sphère).

Pour évaluer l'intensité du courant qui circule dans ces « spires », on peut chercher la quantité d'électricité qui s'est déplacée pendant un tour pour calculer celle qui circule par unité de temps.

2) L'analyse est la même, seul change l'angle sous lequel est vu une spire. Comme on est très loin de la sphère on peut approximer le sinus de l'angle à sa tangente, ce qui facilite le calcul.

8 Bobines de Gaugain-Helmholtz (INCONTOURNABLE)

1 • Rappeler l'expression du champ créé en un point de son axe par une bobine de N spires circulaires de rayon R parcourue par un courant I ; on considère que toutes les spires ont même rayon et qu'elles se trouvent toutes dans le plan $z = 0$.

On notera B_0 le champ au centre de la bobine et on exprimera la fonction $f(u)$ telle que $B(z) = B_0 f(u)$, avec $u = \frac{z}{R}$.

2 • Deux bobines identiques (rayon R , N spires) et perpendiculaires à l'axe (Oz) sont centrées en deux points O_1 et O_2 de cotes $\frac{d}{2}$ et $-\frac{d}{2}$. Elles sont parcourues par le même courant I , dans le même sens.

On note $\vec{B}(z) = B(z) \vec{e}_z$ le champ magnétique en un point de l'axe.

a) Représenter sur un même graphe les champs $B_1(z)$ et $B_2(z)$ créés par chaque bobine, ainsi que le champ B total. On distinguera le cas où les bobines sont proches et celui où elles sont éloignées.

b) Quelle est la parité de la fonction $B(z)$?

3 • Il existe une valeur de d pour laquelle la dérivée seconde $B''(z)$ s'annule en O .

a) Représenter graphiquement $B_1(z)$, $B_2(z)$ et $B(z)$ dans cette situation.

b) Que peut-on dire de la variation du champ \vec{B} au voisinage de O ? Quel est l'intérêt de cette configuration ?

c) Calculer la valeur de d pour cette configuration appelée « bobines de Helmholtz ».

d) Par un calcul numérique, définir l'intervalle de z pour lequel $B(z) \approx B(0)$ à 1% près en valeur relative.

Conseils

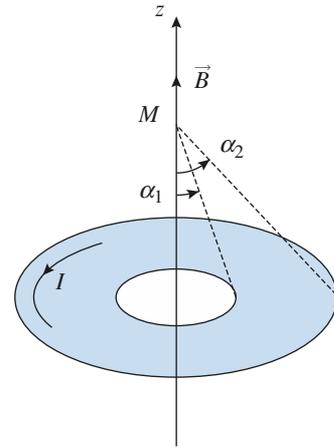
Il est préférable de connaître le résultat demandé à la question 1). On pourra commencer par tracer, avec une calculatrice graphique, la courbe représentant $\frac{B}{B_0}$ en fonction de $\frac{z}{R}$, pour différentes valeurs de d .

Quel est le signe de la dérivée d'une courbe « en cloche » ? Possède-t-elle des points d'inflexion ?

Si le champ \vec{B} est uniforme le long d'une ligne de champ, alors les lignes de champ voisines sont parallèles ; pourquoi ?

Si la dérivée seconde en 0 d'une fonction paire est nulle, quel est l'ordre de la plus faible puissance dans le développement de Taylor ?

9 Champ créé par un « solénoïde plat » (oral)



Un « solénoïde plat » est obtenu en juxtaposant N spires parcourues par I de $\alpha = \alpha_1$ à $\alpha = \alpha_2$.

1 • Poser l'intégrale qui permet de calculer le champ créé en M .

2 • Que dire de cette intégrale en $z = 0$, en z tendant vers l'infini ?

Conseils

1) Les spires étant jointives, celles qui sont comprises entre r et $r + dr$ contribuent également au champ en M . On connaît le champ créé en M par une spire, il faut donc déterminer combien de spires sont comprises entre r et $r + dr$.

2) En $z = 0$ on est au plus proche des courants, l'intégrale doit donc être maximale ; à l'infini on doit retrouver le champ d'un dipôle (voir au chapitre suivant) en un point de l'axe de ce dipôle.

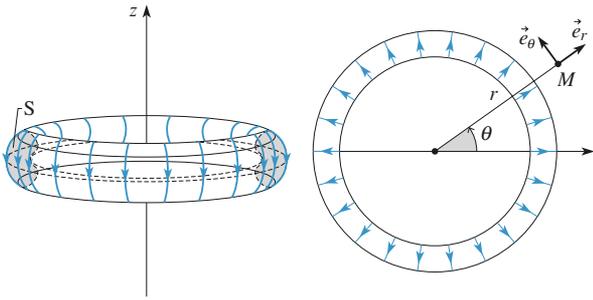
10 Champ magnétique produit par une bobine torique (INCONTOURNABLE)

Un tore est engendré par la rotation d'une surface plane S autour d'un axe (Oz). Une bobine de N spires parcourues par un courant I est enroulée régulièrement sur le tore. Elles sont suffisamment serrées pour être assimilées à une nappe surfacique continue.

1 • Étudier les symétries de \vec{B} .

2 • Exprimer le champ \vec{B} en un point M repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z).

3 • Comparer avec le champ produit par un solénoïde infiniment long.



Conseils

L'étude des symétries doit nous donner la forme des lignes de champ. On rappelle qu'elle porte sur la détermination des plans de symétrie ou d'antisymétrie, ainsi que sur les translations et rotations qui laissent le système invariant. Étant donné la symétrie du problème, le calcul de \vec{B} se fait en appliquant le théorème d'Ampère avec un contour Γ constitué d'une ligne de champ.

11 Champ créé par un solénoïde de vingt spires

Vingt spires circulaires, de même axe (Oz) , de même rayon $R = 5 \text{ mm}$ et espacées de 5 mm , sont parcourues par

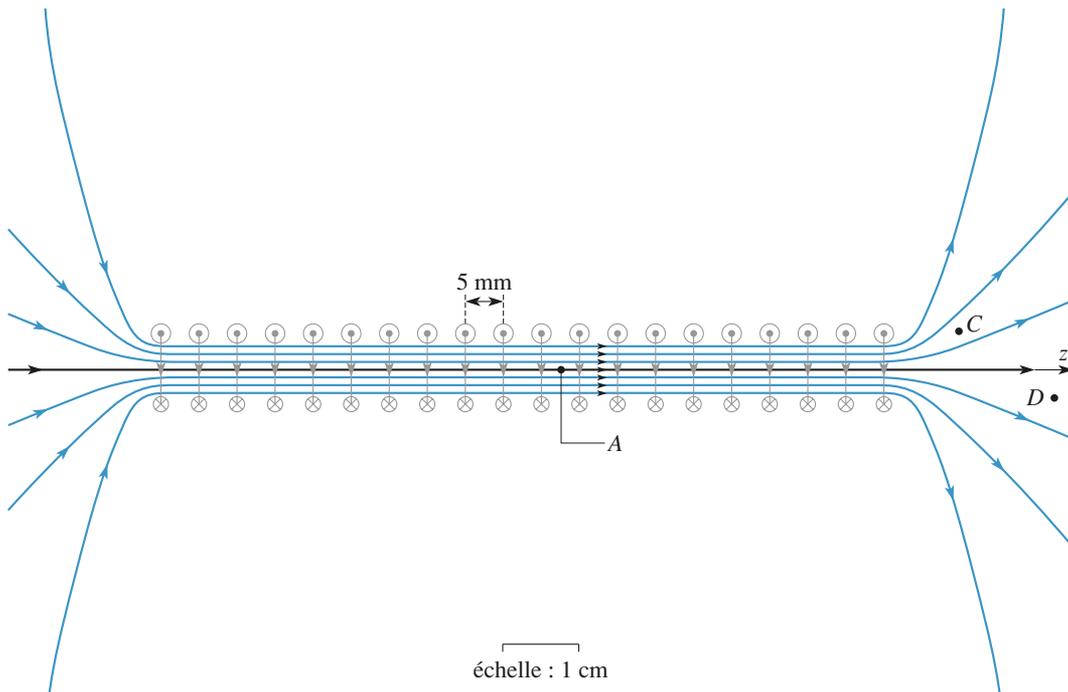
le même courant $I = 1 \text{ A}$. Le schéma représente les lignes de champ du champ magnétique créé par ce système, dans un plan contenant (Oz) .

Dans la zone où les lignes de champ sont quasiment des droites parallèles, elles sont espacées de 1 mm .

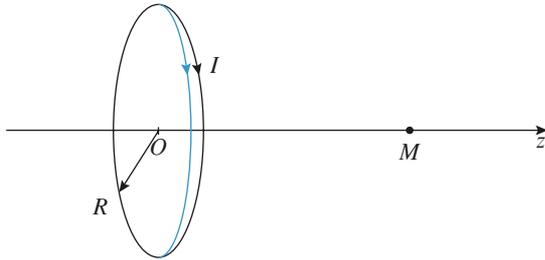
- 1 • Quelles sont les symétries du système ?
- 2 • a) Dans le cas d'un solénoïde infiniment long, retrouver l'expression du champ créé sur l'axe.
- b) Calculer $\vec{B}(N)$ sur l'axe du solénoïde fini.
- 3 • Calculer une valeur approchée du champ en A , et en analysant la figure, déterminer une valeur approchée du champ magnétique en C et en D .

Conseils

- 1) Attention, le solénoïde n'est pas infiniment long.
- 2) a) C'est du cours, INCONTOURNABLE.
- b) C'est du classique.
- 3) À quel système simple peut-on assimiler le système de spires pour déterminer le champ en A ? On admettra qu'en un point A' proche de A , mais en dehors de l'axe, $\vec{B}(A') \approx \vec{B}(A)$. Quelle est la propriété des différentes sections d'un même tube de champ ? Une ligne du champ engendre un tube de champ par rotation autour de l'axe Oz en raison de l'invariance par rotation de la distribution.



12 Circulation du champ magnétique créé par une spire sur son axe



Soit une spire d'axe Oz , de centre O , de rayon R parcourue par un courant d'intensité I .

- 1 • Calculer $\vec{B}(M)$ en un point M de l'axe Oz .
- 2 • a) Calculer la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Oz) (de $-\infty$ à $+\infty$).
b) Interpréter le résultat obtenu.
- 3 • Calculer de même la circulation du champ magnétique le long de l'axe (Ox) (de $-\infty$ à $+\infty$) d'un solénoïde circulaire de rayon R , de longueur ℓ et comportant N spires jointives parcourues chacune par un courant d'intensité I .

Conseils

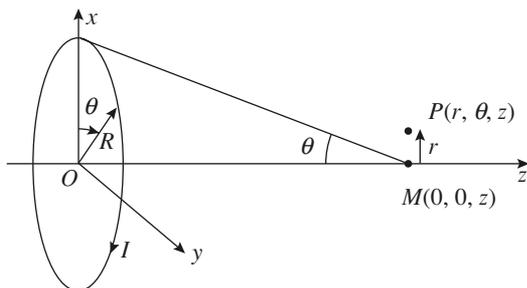
- 1) Ce calcul doit être connu ; il fait partie des INCONTOURNABLES.
- 2) permet de « retrouver » le théorème d'Ampère. La question 3) en présente une application.

13 Champ au voisinage de l'axe d'une spire (INCONTOURNABLE)

Soit une spire de rayon R , d'axe Oz parcourue par un courant d'intensité I . On connaît le champ créé par cette spire en tout point de son axe Oz :

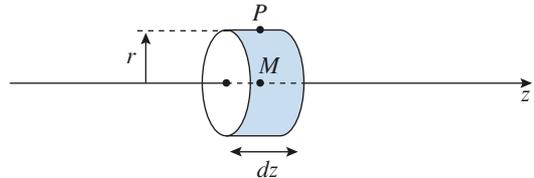
$$B(M) = f(z)I \quad \text{avec} \quad f(z) = \frac{\mu_0}{2R} \sin^3 \theta.$$

(voir exercice précédent)



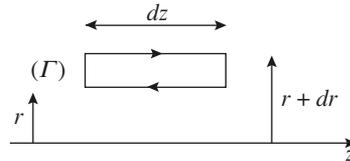
Dans cet exercice, on cherche à connaître le champ en un point voisin de l'axe Oz .

- 1 • Justifier que l'on cherche un champ de la forme $B_r(r, z)\mathbf{e}_r + B_z(r, z)\mathbf{e}_z$.
- 2 • Exprimer le flux de B à travers une surface cylindrique élémentaire fermée de rayon r , hauteur dz (r et dz étant du même ordre de grandeur). En déduire le développement limité au 1^{er} ordre de $B_r(r, z)$ en considérant que $B_z(r, z) \approx B(M)$, M étant sur l'axe.



On précisera pourquoi r et la hauteur du cylindre doivent être petits (ce calcul n'est valable qu'au voisinage de l'axe !).

- 3 • Trouver alors le développement limité au second ordre de $B_z(r, z)$ en posant $B_z(r, z) = B_z(0, z) + \beta(z)r^2I$.
Expliciter $\beta(z)$ en prenant le contour suivant :



- 4 • En déduire le champ \vec{B} en un point P de coordonnées (r, θ, z) avec $r \ll R$, connaissant \vec{B} en M de coordonnées $(0, 0, z)$.

Conseils

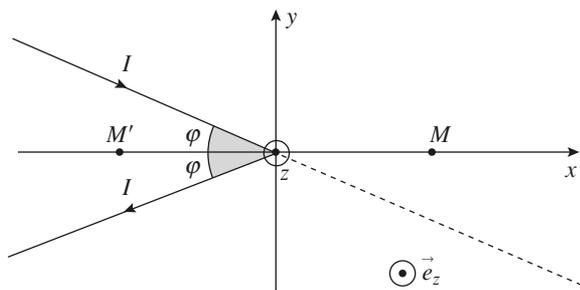
- 1) L'étude habituelle des symétries et des invariances permet de répondre à la première question.
- 2) r étant petit, comme la hauteur du cylindre, il n'est pas besoin d'intégrer sur les différentes surfaces pour exprimer le flux. Se souvenir que le flux de B à travers n'importe quelle surface fermée est nul.
- 3) En appliquant le théorème d'Ampère sur un contour élémentaire *ad hoc*, le calcul de la circulation de B , développé au second ordre en r , permet d'explicitier $\beta(z)$.
- 4) On remarquera que $B(P)$ s'exprime uniquement en fonction de B sur l'axe.

14 Courant angulaire (oral)

Montrer que le champ magnétique créé par un circuit filiforme « angulaire » parcouru par un courant d'intensité I au point M de l'axe (Ox) bissecteur est donné par :

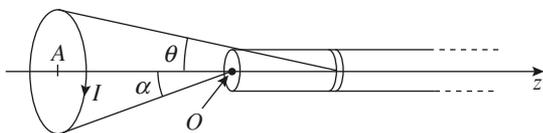
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_z$$

dans le cas $x > 0$ (point M). Qu'obtient-on dans le cas $x < 0$ (point M') ?



15 Flux du champ d'une spire à travers un solénoïde

On considère le système suivant :



Une spire d'axe Oz de centre A rayon R est parcourue par un courant I .

Un solénoïde de rayon r est suffisamment long pour pouvoir le considérer comme infini quand z tend vers l'infini. Il comporte n spires par unité de longueur.

De l'extrémité du solénoïde on voit la spire sous l'angle α . Le rayon r du solénoïde est petit devant R , rayon de la spire.

Calculer le flux du champ magnétique créé par la spire à travers le solénoïde.

Conseils

Le champ d'une spire est $\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$. Il faut relier le nombre de spires ndz à $d\theta$.

16 Champ magnétique créé par l'électron de l'atome d'H

Dans un modèle « planétaire » simple de l'atome d'hydrogène, l'électron tourne autour du proton sur une trajectoire circulaire bien définie.

1 • Calculer la vitesse de rotation de l'électron si la distance proton – électron est $r = 53$ pm.

2 • Calculer le champ magnétique alors ressenti par le proton. Le comparer à un champ macroscopique.

Conseils

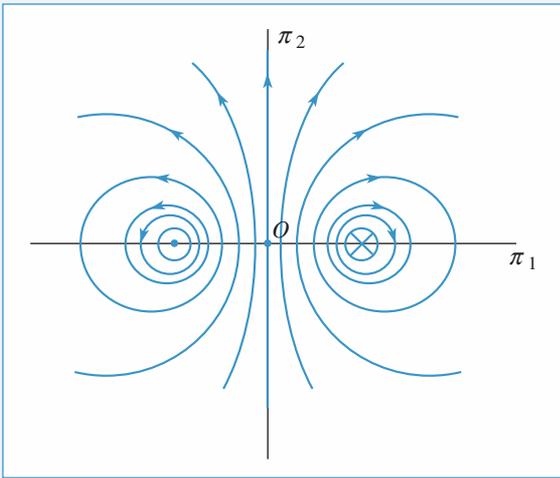
1) Appliquer par exemple le principe fondamental de la dynamique projeté sur \vec{e}_r .

2) L'électron dans son mouvement de rotation se comporte comme une boucle de courant.

direct. Loin des deux fils on retrouve des lignes de champ circulaires qui s'enrouleraient dans le sens direct autour d'un courant sortant $+2I$ situé en O .

Le champ est nul en O .

b)

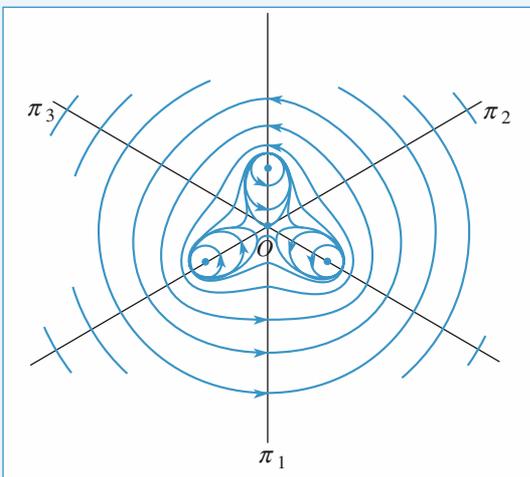


Là encore, les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan qui contient les deux fils et par rapport au plan π_2 médiateur des deux fils.

π_1 est toujours un plan de symétrie mais π_2 est maintenant un plan d'antisymétrie. D'où la forme et l'orientation très différentes par rapport à a).

Le champ est maximal en O .

c)

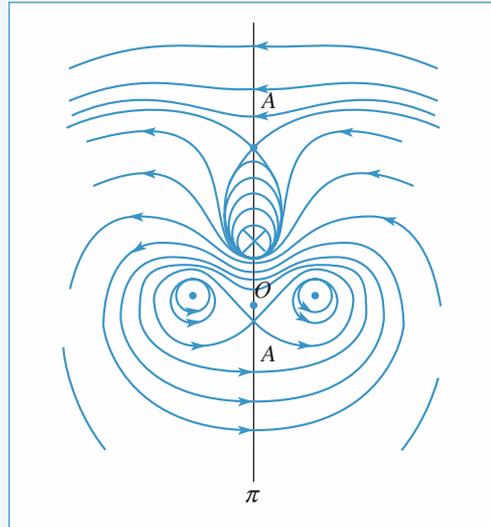


Les lignes de champ sont symétriques par rapport aux plans π_1, π_2, π_3 ou la figure est invariante, comme la distribution par rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Le champ est nul en O .

Loin des fils les lignes sont des cercles que créeraient le champ d'un fil parcouru par $3I$ situé en O .

d)



Les lignes de champ sont symétriques par rapport au plan médiateur de la distribution.

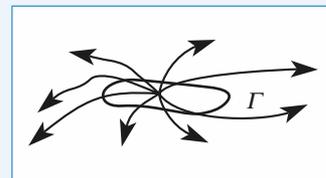
Le champ n'est plus nul en O à cause du fil parcouru par « $-I$ ». Le champ est nul en A et A' où se croisent plusieurs lignes de champ.

Loin des fils les lignes sont des cercles que créerait le champ d'un fil parcouru par I situé au barycentre de la distribution.

3 Analyse d'un champ

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul. Le champ étant, par hypothèse, contenu dans le plan du schéma et invariant par translation perpendiculaire au schéma, on choisit des surfaces dont les bases sont parallèles au schéma et les surfaces latérales sont engendrées par translation perpendiculaire au schéma (des bases). On peut alors raisonner sur un contour Γ dans le plan.

Si toutes les lignes de champ qui traversent Γ sont sortantes (respectivement entrantes), alors le flux à travers Σ est positif (respectivement négatif) :



Dans le cas d'un champ magnétique, il ne peut exister de courbe telle que toutes les lignes qui la traversent soient toutes entrantes et toutes sortantes :

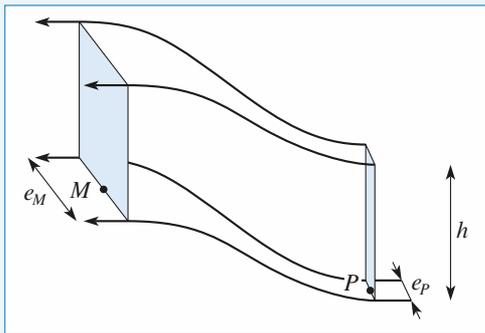
Schéma b) : Pour une courbe qui entoure le point dont sont issues les lignes de champ, celles-ci sont toutes sortantes.

Schéma d) : Pour une courbe qui entoure un des trois points sources représentés par un rond noir, ou pour une courbe qui entoure les trois sources à grande distance, les lignes de champ sont toutes sortantes ou toutes entrantes.

Conclusion : Les schémas **b)** et **d)** ne peuvent en aucun cas représenter un champ magnétique.

On peut vérifier que, pour toute courbe fermée tracée sur le schéma **a)** ou sur le schéma **c)**, il y a des lignes entrantes et des lignes sortantes. Cela ne prouve pas que ce sont des champs magnétiques, mais on ne peut pas éliminer, *a priori*, cette hypothèse.

Comme le système est invariant par translation dans la direction des fils, les deux lignes de champ qui encadrent M et P permettent de construire un tube de champ à section rectangulaire de hauteur constante h :



Si on admet que le champ est approximativement uniforme au niveau des sections du tube de champ, la conservation du flux s'écrit :

$$B(M) e_M h = B(P) e_P h, \text{ soit } B(P) = B(M) \frac{e_M}{e_P}.$$

On mesure e_M et e_P sur le schéma, et on en déduit :

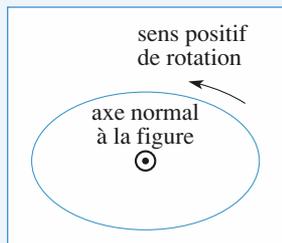
$$B(P) \approx \frac{B(M)}{3}.$$

Comme $B(M) = 0,01$ T alors $B(P) \approx 0,003$ T.

4 Analyse d'un champ magnétique

1 • L'axe normal au schéma est orienté positivement vers le lecteur, ce qui définit l'orientation d'une courbe fermée (ou contour) selon la règle du tire-bouchon.

• Les lignes de champ voisines du fil (1) sont orientées dans le sens positif :



$\vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ est positif et la circulation $\mathcal{C} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ est positive.

ligne de champ

D'après le théorème d'Ampère, $\mathcal{C} = \mu_0 I_1$ et donc I_1 est positif.

• Pour la même raison, I_2 est négatif et I_3 est positif.

• On applique le même raisonnement à une ligne de champ qui entoure les trois fils. Ces lignes de champ sont orientées dans le sens positif. La circulation, positive, est égale à : $\mu_0 (I_1 + I_2 + I_3)$.

La somme $I_1 + I_2 + I_3$ est positive.

2 • Le champ ayant une orientation déterminée en tout point, deux lignes de champ ne peuvent en général se croiser. Le vecteur nul n'ayant pas d'orientation définie, plusieurs lignes de champ peuvent aboutir en un point de champ nul. Les points A et A' sont des points de champ nul.

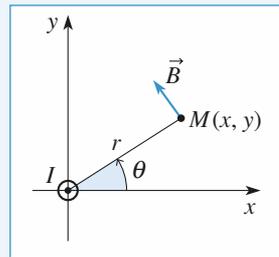
3 • Le champ créé par un fil rectiligne infini est :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \text{ou encore} \quad B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sin\theta = -\frac{\mu_0 I y}{2\pi r^2} \quad \text{et}$$

$$B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \cos\theta = \frac{\mu_0 I x}{2\pi r^2}.$$

On note x_1, x_2, x_3, r_1, r_2 et r_3 les valeurs de x et de r correspondant au point A lorsque l'origine est prise sur le fil 1, sur le fil 2 et sur le fil 3. L'ordonnée y de A est commune aux trois origines.

Le champ est nul en A .



$$\text{Donc} \quad B_x = -\frac{\mu_0 y}{2\pi} \left(\frac{I_1}{r_1^2} + \frac{I_2}{r_2^2} + \frac{I_3}{r_3^2} \right) = 0$$

$$\text{et :} \quad B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} \left(\frac{x_1 I_1}{r_1^2} + \frac{x_2 I_2}{r_2^2} + \frac{x_3 I_3}{r_3^2} \right) = 0.$$

Ces deux équations ont pour solutions :

$$I_1 = -I_2 \frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} \quad \text{et} \quad I_3 = -I_2 \frac{r_3^2}{r_2^2} \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}.$$

Sur la carte du champ, on mesure :

$$x_1 \approx 18 \text{ mm}, \quad x_2 \approx -6 \text{ mm}, \quad x_3 \approx -30 \text{ mm},$$

$$r_1 \approx 24 \text{ mm}, \quad r_2 \approx 16,5 \text{ mm}, \quad r_3 \approx 33,5 \text{ mm}.$$

Avec ces valeurs :

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} = 1,06 \quad \text{et} \quad \frac{r_3^2}{r_2^2} \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} = 2,06.$$

Comme $I_2 = -1$ A, et compte tenu de la marge d'erreur sur les mesures de distances, $I_1 \approx 1$ A et $I_3 \approx 2$ A.

Une erreur de 1 mm sur une des distances entraîne une erreur de l'ordre de 10 % sur les intensités.

5 Sphère recouverte de spires

1 • Spires jointes

L'ensemble des plans contenant (Oz) sont des plans d'antisymétrie des courants, donc $\vec{B}(O)$ est porté par (Oz) .

Le nombre de spires par unité de longueur est donné par

$$n = \frac{N}{\pi R}. \text{ Donc entre } \theta \text{ et } \theta + d\theta \text{ il y a } \frac{N}{\pi R} \times R d\theta =$$

$$N \frac{d\theta}{\pi} \text{ spires de rayon } R \sin \theta \text{ qui contribuent pour}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2(R \sin \theta)} \times \frac{NI d\theta}{\pi} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z \text{ au champ total.}$$

On en déduit :

$$\vec{B}(O) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \sin^2 \theta d\theta \cdot \vec{e}_z$$

$$\text{or } \int_0^\pi \frac{\mu_0 NI}{2\pi R} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{\mu_0 N\pi I}{4\pi R}$$

$$\text{donc } \vec{B}(O) = \frac{\mu_0 NI}{4R} \vec{e}_z.$$

2 • Spires équidistantes (non jointives)

Le nombre de spires situées entre deux plans de cotes z et $z + dz$ est donné par $n' dz = \frac{N}{2R} dz$, soit $n' = \frac{N}{2R}$.

$$\cos \theta = \frac{z}{R} \Rightarrow -\sin \theta d\theta = \frac{dz}{R}$$

donc $dz = -R \sin \theta d\theta$; il y a donc $n' dz = \frac{N}{2R} dz$, soit

$$\frac{N}{2} \sin \theta d\theta \text{ spires de rayons } R \sin \theta \text{ entre } \theta \text{ et } \theta + d\theta.$$

Ces spires contribuent pour

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{2(R \sin \theta)} \times \frac{NI}{2} \sin \theta d\theta \times \sin^3 \theta \vec{e}_z \text{ au champ total}$$

$$= + \frac{\mu_0 I N}{4R} \sin^3 \theta d\theta \vec{e}_z$$

$$\text{alors } B(O) = \frac{\mu_0 N I}{4R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{8R} \int_0^\pi \sin \theta (1 - \cos 2\theta) d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{8R} \left[2 - \frac{1}{2} \int_0^\pi (-\sin \theta + \sin 3\theta) d\theta \right]$$

$$= \frac{\mu_0 N I}{8R} \left(2 + 1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{\mu_0 N I}{3R}$$

6 Disque de Rowland

1 • Le disque en rotation peut être considéré comme un ensemble continu de spires circulaires concentriques.

Le champ \vec{B} en un point M de l'axe (Oz) est de la forme $\vec{B}(M) = B(\alpha) \vec{e}_z$.

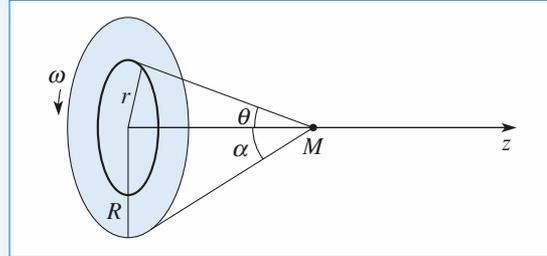
• La spire élémentaire de rayon r et de largeur dr contient une charge $dq = \sigma 2\pi r dr$.

Pendant une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, cette charge dq traverse une section quelconque de la « spire » ; l'intensité associée est donc telle que $dq = T dI$, soit :

$$dI = \sigma \omega r dr.$$

• La spire élémentaire crée en M un champ :

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} \sin^3 \theta.$$



La variable θ semble plus appropriée au calcul de l'intégrale que la variable r :

$$r = z \tan \theta, \text{ d'où } dr = \frac{z}{\cos^2 \theta} d\theta; \quad dI = \sigma \omega \frac{z r d\theta}{\cos^2 \theta}$$

$$\text{et } dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta.$$

$$\text{On pose } u = \cos \theta. \quad \frac{\sin^3 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta = -\left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) du.$$

$$B(\alpha) = \int_0^R dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \int_{\cos \alpha}^1 \left(\frac{1}{u^2} - 1 \right) du$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega z}{2} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - 2 \right)$$

$$= \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2 \tan \alpha} \left(\frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - 2 \right);$$

$$\text{soit : } B(\alpha) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{\mu_0 \epsilon_0 U \omega R}{2e} \frac{(1 - \cos \alpha)^2}{\sin \alpha}.$$

$$\text{Au point } O, \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ et } B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\mu_0 \epsilon_0 U \omega R}{2e}.$$

À l'infini, $\alpha \rightarrow 0$ et $B \rightarrow 0$.

$$B'(\alpha) = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} (2 - \cos^2 \alpha - \cos \alpha).$$

$B'(\alpha)$ ne s'annule que pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$: le champ est maximal au voisinage du centre O .

$$B_{\max} = \frac{\mu_0 \epsilon_0 U \omega R}{2e}.$$

2 • Avec les valeurs proposées :

6 000 tours/minute \rightarrow 100 tours/seconde

$$\rightarrow \omega = 200 \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$B_{\text{max}} = 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ T}.$$

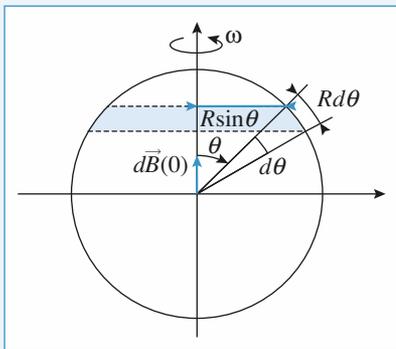
Cette valeur est très faible par rapport au champ terrestre qui est de l'ordre de quelques 10^{-5} T . Rowland est néanmoins parvenu, grâce à un jeu d'aiguilles aimantées, à prouver l'existence de ce champ.

7 Champ magnétique créé par une sphère chargée en rotation

1 • Les charges en mouvement à la surface de la sphère se comportent comme des courants annulaires ou des « spires » de courant.

Entre θ et $\theta + d\theta$ les charges se répartissent sur une surface $dS = 2\pi R \sin \theta \times R d\theta$ qui porte donc la charge

$$dq = \frac{Q}{4\pi R^2} dS = \frac{Q}{2} \sin \theta d\theta$$



Cette charge se déplace à la vitesse $v = R \sin \theta \omega$.

En un tour il s'est donc écoulé dq dans cette spire, ce qui

$$\text{correspond à un courant } dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi} \omega = \frac{Q \omega \sin \theta d\theta}{4\pi}$$

$$\text{qui contribue pour } d\vec{B} = \frac{\mu_0 dI}{2R \sin \theta} \times \sin^3 \theta \vec{e}_z =$$

$$\frac{\mu_0 \omega \sin^3 \theta d\theta}{8\pi R} \vec{e}_z \text{ au champ total.}$$

$$B(0) = \frac{\mu_0 \omega}{8\pi R} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 Q \omega}{6\pi R}.$$

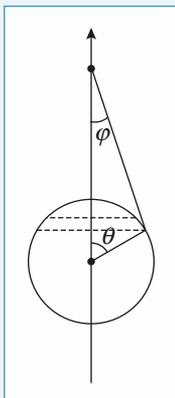
2 • En un point très éloigné le calcul est le même : la « spire » située entre θ et $\theta + d\theta$ contribue pour

$$d\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 dI}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

au champ total.

Si M est très éloigné de O on peut

$$\text{approximer } \sin \varphi \text{ par } \frac{R \sin \theta}{z}$$



il vient alors

$$dB(M) = \frac{\mu_0}{2R \sin \theta} \left(\frac{R \sin \theta}{z} \right)^3 \frac{Q \omega \sin \theta d\theta}{4\pi}$$

$$= \frac{\mu_0 R^2 Q \omega}{8\pi z^3} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\text{d'où } B(M) = \frac{\mu_0 R^2 Q \omega}{8\pi z^3} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\mu_0 R^2 Q \omega}{6\pi z^3}$$

On verra comment retrouver ce résultat en assimilant la distribution à un dipôle magnétique au chapitre suivant.

8 Bobines de Gaugain-Helmholtz

1 • Soit O le centre de la bobine, perpendiculaire à l'axe (Oz).

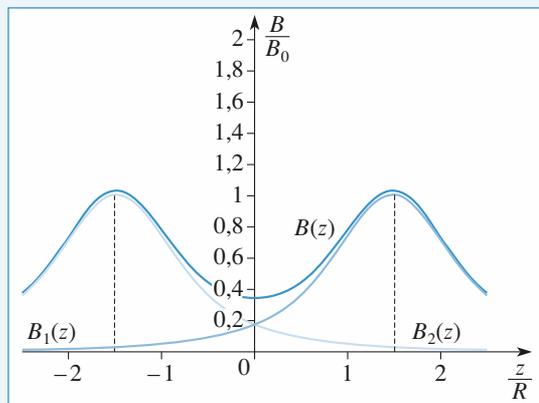
• Le champ au centre est $\vec{B}(0) = B_0 \vec{e}_z$, avec :

$$B_0 = \frac{\mu_0 N I}{2R}.$$

• Le champ en un point de l'axe de cote z est $\vec{B} = B(z) \vec{e}_z$, avec $B(z) = B_0 \sin^3 \alpha$; ou encore :

$$B(z) = B_0 \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}} \quad \text{avec} \quad u = \frac{z}{R}.$$

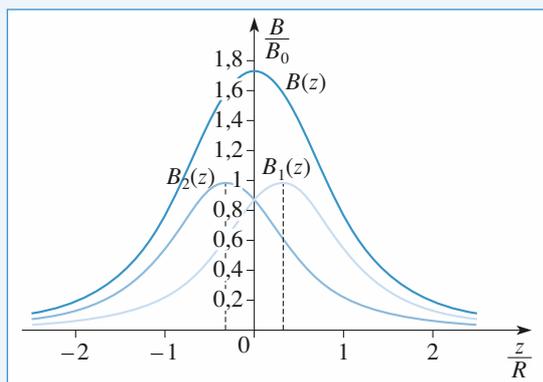
2 • a) La courbe représentative de la fonction $B(z)$ est une courbe « en cloche » ; elle possède nécessairement deux points d'inflexion où sa dérivée seconde est nulle.



$B_1(z)$, $B_2(z)$ et $B(z)$ pour $d = 3R$

Le schéma représente les deux courbes en cloche identiques,

centrées en $z = \pm \frac{d}{2}$, et la somme des deux fonctions.



$B_1(z)$, $B_2(z)$ et $B(z)$ pour $d = 0,6 R$

- Si d est grand, la somme est du type « chameau ».
- Si d est petit, la somme est du type « dromadaire ».
- Il existe donc une valeur intermédiaire de d pour laquelle le creux (ou la bosse) du milieu est remplacé(e) par une courbe très plate.

b) Dans tous les cas, la fonction $B(z)$ est paire. Le développement limité de $B(z)$ au voisinage de 0 ne comportera donc que des puissances paires.

3 • a) La courbe possède deux points d'inflexion pour le profil « dromadaire » et quatre pour le profil « chameau ». Lorsque la dérivée seconde de $B(z)$ s'annule en 0, la situation est celle du cas limite où les deux points d'inflexion intérieurs se rejoignent en O ; la bosse est alors très plate.

b) La fonction $B(z)$ étant paire, si la dérivée seconde est nulle, le premier terme non nul de son développement de Taylor est d'ordre 4 :

$$B(z) = B(0) + \frac{1}{24} B^{(4)}(0) z^4 + o(z^5).$$

En d'autres termes, la fonction $B(z)$ est stationnaire à l'ordre 3 ; le champ magnétique est quasi uniforme sur un domaine important, d'où l'intérêt de cette configuration.

La quasi uniformité de \vec{B} ne se limite pas à l'axe. Si \vec{B} est uniforme le long de l'axe, les tubes de champ gardent une section constante, et les lignes de champ sont parallèles. Or, si les lignes de champ sont parallèles dans une zone dépourvue de courants, le champ est uniforme (on peut le montrer en utilisant le théorème d'Ampère).

c) Si $B''(0) = 0$, alors $B_1''(0) = -B_2''(0)$.

La bobine (1) est centrée en O_1 de cote $z_1 = -\frac{d}{2}$.

On en déduit, en utilisant la variable adimensionnée $u = \frac{z}{R}$ et la fonction $f(u)$ définies à la question 1) :

$$B_1(z) = B_0 f\left(u + \frac{d}{2R}\right)$$

et de même : $B_2(z) = B_0 f\left(u - \frac{d}{2R}\right)$;

d'où la condition : $f''\left(\frac{d}{2R}\right) = -f''\left(-\frac{d}{2R}\right)$.

La fonction f étant paire, on a par ailleurs :

$$f''\left(\frac{d}{2R}\right) = f''\left(-\frac{d}{2R}\right).$$

Il en résulte que la configuration recherchée est telle que

$$f''\left(\frac{d}{2R}\right) = 0.$$

$$f''(u) = \frac{12u^2 - 3}{(1+u^2)^{7/2}} ; f''(u) \text{ s'annule pour } u = \pm \frac{1}{2}.$$

Conclusion : $B(z)$ est stationnaire à l'ordre 3 au voisinage de O si $d = R$.

d) On suppose la condition $d = R$ réalisée :

$$B(z) = B_0 \left[f\left(u + \frac{1}{2}\right) + f\left(u - \frac{1}{2}\right) \right].$$

Pour comparer simplement $B(z)$ à $B(0)$, on calcule, pour différentes valeurs de z (ou de u), le rapport :

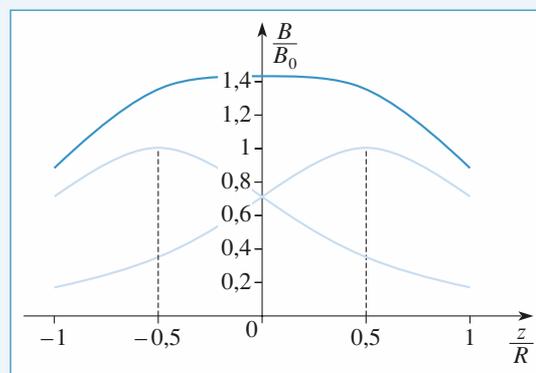
$$\frac{B(z)}{B(0)} = \frac{f(u+0,5) + f(u-0,5)}{2f(0)}.$$

L'étude numérique conduit aux valeurs suivantes :

u	0	0,1	0,2	0,3	0,31
(1)	1,0000	0,9999	0,9982	0,9916	0,9904

$$\text{où (1)} = \frac{f(u+0,5) + f(u-0,5)}{2f(0)}.$$

On peut donc considérer le champ uniforme, à 1% près en valeur relative, dans l'intervalle $-0,3R < z < 0,3R$.



Bobine de Helmholtz : $d = R$
le champ sur l'axe $B(z)$ est stationnaire à l'ordre 3

9 Champ créé par un « solénoïde plat »

1 • Déterminons tout d'abord le nombre de spires de rayon r comprises entre r et $r + dr$:

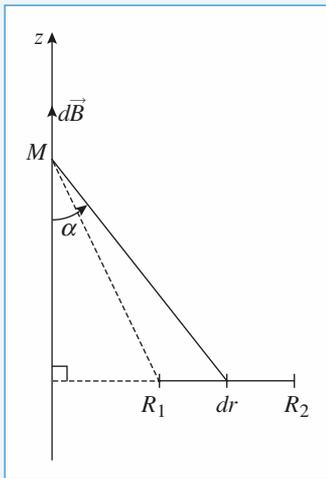
de $r = R_1$ à $r = R_2$ il y a N spires jointives, ce qui donne

$\frac{N}{R_2 - R_1}$ spires par unité de longueur (radiale). Donc entre

r et $r + dr$ il y a $\frac{N dr}{R_2 - R_1}$ spires.

Elles contribuent pour $d\vec{B} = \frac{\mu_0 N I dr}{2(R_2 - R_1)r} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$

au champ total.



$$\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{r^2 + z^2}} \quad \text{taux } \alpha = \frac{r}{z}$$

$$dB = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{d'où } B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2 • • En $z = 0$ l'intégrale devient $\int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \text{Ln } \frac{R_2}{R_1}$

et le champ est bien maximum et égal à

$$B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \text{Ln } \frac{R_2}{R_1}.$$

(z n'intervient qu'au dénominateur dans une somme de carrés : quand il est nul $dB(M)$ est bien max).

• Quand $z \rightarrow \infty$, $\int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \rightarrow \int_{R_1}^{R_2} \frac{r^2 dr}{z^3} = \frac{R_2^3 - R_1^3}{3z^3}$,

ce qui donne :

$$B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)} \frac{R_2^3 - R_1^3}{3z^3}. \text{ Le champ varie en } \frac{1}{z^3}, \text{ c'est}$$

une caractéristique des champs dipolaires qui seront vus au chapitre suivant.

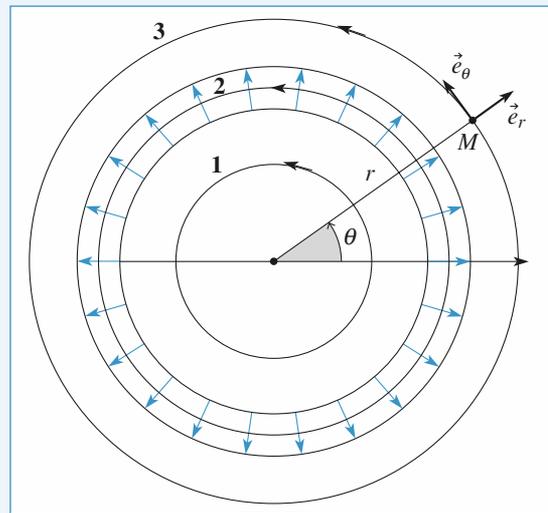
10 Champ magnétique produit par une bobine torique (INCONTOURNABLE)

1 • Le système est invariant par rotation autour de (Oz) . B est donc indépendant de θ et $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$.

• Tous les plans contenant l'axe (Oz) sont plans de symétrie pour les courants. $\vec{B}(M)$ est donc normal au plan défini par l'axe (Oz) et le point M , soit :

$$\vec{B}(M) = B(r, z) \vec{e}_\theta.$$

2 • Les lignes de champ sont des cercles centrés sur l'axe (Oz) . B est de norme constante sur une ligne de champ, ce qui permet de le déterminer aisément au moyen du théorème d'Ampère.



• Soit Γ la ligne de champ passant par M . Son rayon est r , et la circulation de \vec{B} le long de Γ est :

$$\mathcal{C} = 2\pi r B(M).$$

• Si M est à l'extérieur du tore :

– cas 1 : aucun courant ne traverse le disque délimité par Γ ;

– cas 3 : le disque délimité par Γ est traversé par N courants montants (positifs) et N courants descendants (négatifs). Le courant total traversant la surface Σ délimitée par Γ est nul.

On remarque que, si Γ est extérieur au tore, il est toujours possible de choisir une surface (Σ) s'appuyant sur Γ , traversée par aucun courant.

Dans tous les cas où M est à l'extérieur, d'après le théorème d'Ampère, $\mathcal{C} = 0$ et $B(M) = 0$.

• Si M est à l'intérieur du tore (cas 2), seuls les courants montants traversent Σ . Le courant total traversant cette surface est égal à $+NI$ (le signe + vient de ce que la normale à la surface est orientée comme I).

Dans ce cas, d'après le théorème d'Ampère :

$$\mathcal{C} = \mu_0 N I \text{ et } B(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}.$$

Conclusion : $\vec{B}(M) = \vec{0}$, si M est à l'extérieur du tore.

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta, \text{ si } M \text{ est à l'intérieur du tore.}$$

3 • On peut voir un solénoïde infini comme un tore dont le rayon tend vers l'infini.

- Le champ est bien nul à l'extérieur.
- À l'intérieur du tore, le rayon r est quasiment uniforme et égal à R , aussi grand que l'on veut.
- Le nombre de spires par unité de longueur est :

$$n = \frac{N}{\text{longueur}} = \frac{N}{2\pi R}.$$

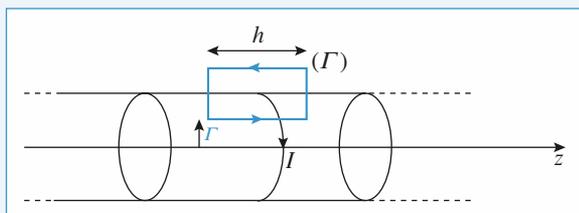
À l'intérieur, on retrouve bien un champ uniforme et égal à $\mu_0 n I$.

11 Champ créé par un solénoïde de vingt spires

1 • Le système de courants, et donc le champ \vec{B} , sont invariants par rotation d'axe (Oz) , donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)$.

Le plan du schéma, comme tout plan contenant l'axe (Oz) , est plan d'antisymétrie pour les courants ; en tout point du schéma, $\vec{B}(M)$ est contenu dans ce plan donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques d'axe Oz . Le plan normal à (Oz) , et équidistant de la 10^e et de la 11^e spires, est plan de symétrie pour les courants ; ce plan est donc un plan d'antisymétrie pour les lignes de champ.

2 • a)



Soit un solénoïde infiniment long comportant n spires par unité de longueur (régulièrement réparties), chacune étant parcourue par un courant d'intensité I .

Le système du courant est invariant par translation suivant z donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r, \theta)$.

Le système de courant est invariant par rotation autour de Oz donc $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$.

Tout plan orthogonal à Oz est un plan de symétrie des courants, donc \vec{B} est porté par \vec{Oz} , et donc : $\vec{B}(M) = B(r)\vec{e}_z$.

Nous savons (résultat du cours) que le champ magnétique à l'extérieur d'un solénoïde infiniment long est nul.

Appliquons le théorème d'Ampère en choisissant le contour (Γ) du schéma :

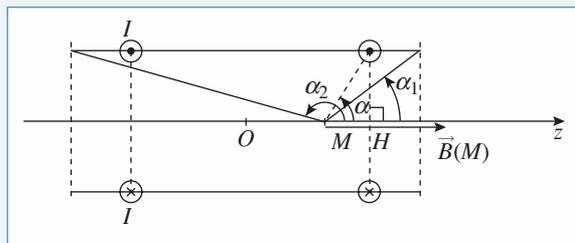
$$B(r) h = \mu_0 n h I$$

soit : pour M intérieur au solénoïde $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$;

Le champ magnétique est uniforme à l'intérieur d'un solénoïde infiniment long.

b) Calculons le champ sur l'axe d'un solénoïde de longueur finie comportant n spires par unité de longueur

$$\left(\text{ici } n = \frac{1}{5.10^{-3}} = 200 \text{ m}^{-1} \right).$$



Soit un point M de cote z sur l'axe Oz .

Chaque spire vue sous un angle α de M contribue pour $\frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$ au champ magnétique.

Cherchons le nombre de spires vues entre α et $\alpha + d\alpha$;

sachant que $\tan \alpha = \frac{R}{MH}$ ou $MH = \frac{R}{\tan \alpha}$, quand α varie de $d\alpha$, H se déplace de dH :

$$dH = - \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha,$$

or sur une longueur $|dH|$ il y a $n|dH|$ spires. Le nombre de spires entre α et $\alpha + d\alpha$ est égal à :

$$dN = \frac{nR}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

$$\text{d'où } dB = \frac{nR}{\sin^2 \alpha} \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha d\alpha = \frac{n \mu_0 I}{2} \sin \alpha d\alpha.$$

Quand α varie de α_1 à α_2 , cela donne :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2)$$

$$\text{et } \vec{B}(N) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2) \vec{e}_z$$

Dans le cadre d'un solénoïde infini, on retrouve bien : $\vec{B}(M) = \mu_0 n I \vec{e}_z$ avec $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi$.

3 • Vu du point A , le système de spires est voisin d'un solénoïde infiniment long qui possède $n = 200$ spires par mètre, d'où :

$$\vec{B}(A) \approx \mu_0 n I \vec{e}_z, \text{ soit } B(A) \approx 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ T.}$$

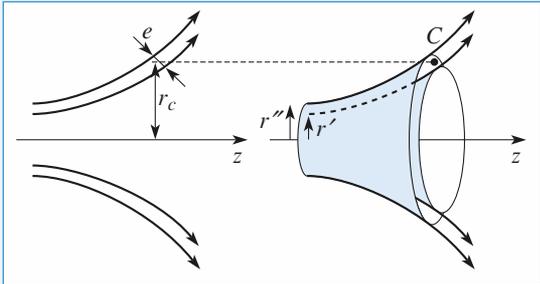
Tant que le modèle du solénoïde infiniment long est valable, le champ \vec{B} est quasiment égal à $\vec{B}(A)$ en tout point intérieur au solénoïde.

En ne faisant pas cette approximation $B(A) = \mu_0 n I \cos \alpha$

$$\text{avec } \cos \alpha = \frac{55}{\sqrt{55^2 + 5^2}} = 0,96.$$

On fait donc une erreur de 4 % en considérant le champ d'un solénoïde infiniment long alors qu'il n'est constitué que de 20 spires.

À partir de chaque ligne de champ du schéma, on peut donc, par rotation, engendrer un tube de champ. À partir de deux lignes de champ voisines, on engendre de même un tube de champ dont la section normale a approximativement pour aire : $S = 2 \pi r e$.



Point C : On considère le tube de champ engendré par la rotation des deux lignes de champ qui encadrent C .

Le point C est à une distance $r_c \approx 5$ mm de l'axe, et les deux lignes de champ sont écartées de $e \approx 3,5$ mm ; au niveau du point C , l'aire de la section du tube vaut approximativement $2 \pi r_c e$. La valeur approchée du flux de \vec{B} à travers ce tube de champ est donc $\Phi \approx B(C) 2 \pi r_c e$.

À l'intérieur du solénoïde, le champ est quasiment égal à $\vec{B}(A)$; les deux lignes de champ considérées sont distantes de l'axe de $r' = 1$ mm et $r'' = 2$ mm. La section du tube de champ vaut alors $\pi(r''^2 - r'^2)$ et $\Phi = B(A) \pi (r''^2 - r'^2)$.

Le flux se conservant, on en déduit :

$$B(C) \approx B(A) \frac{r''^2 - r'^2}{2r_c e} \approx \frac{1}{12} B(A), \text{ soit } B(C) \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ T.}$$

Point D : On considère le tube de champ engendré par la rotation de la ligne de champ passant par D .

Au niveau du point D , la section du tube de champ est approximativement un disque de rayon $r_1 \approx 8$ mm. D étant suffisamment proche de l'axe, on peut supposer le champ uniforme sur tout le disque.

À l'intérieur du solénoïde, la section du tube de champ est un disque de rayon $r' = 1$ mm.

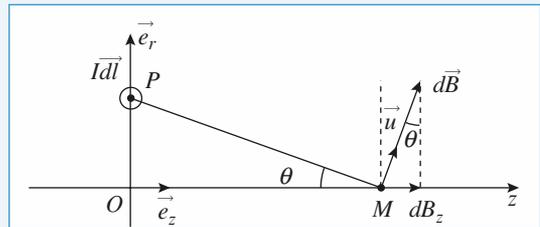
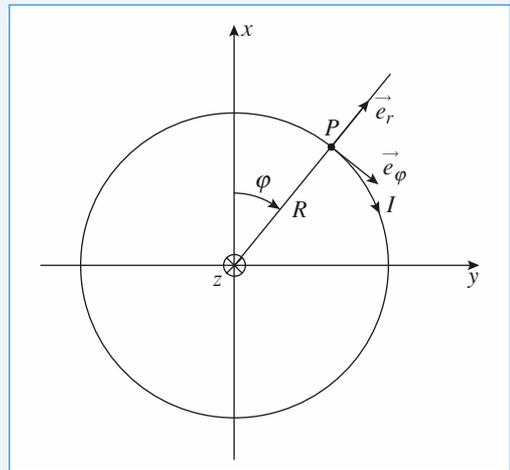
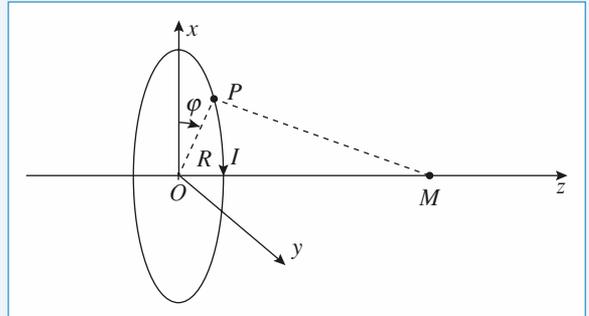
Le flux se conservant, $B(D) \approx B(A) \frac{r'^2}{r_1^2}$, soit :

$$B(D) \approx \frac{1}{64} B(A), \text{ d'où } B(D) \approx 4 \cdot 10^{-6} \text{ T.}$$

Conclusion : En comparant les valeurs de $B(A)$, $B(C)$ et $B(D)$, on constate que le champ s'atténue rapidement à l'extérieur du solénoïde.

12 Circulation du champ magnétique créé par une spire sur son axe

1 • Soit une spire de rayon R , d'axe Oz , de centre O parcourue par un courant d'intensité I .



Tout plan contenant l'axe Oz est un plan d'antisymétrie des courants donc \vec{B} appartient à ces plans, donc à leur intersection, soit : $\vec{B}(M) = B(z)\vec{e}_z$.

Calculons $\vec{B}(M)$ en utilisant la loi de Biot et Savart :

Soit un élément de courant $I d\vec{\ell}$ en P (avec $d\vec{\ell} = R d\varphi \vec{e}_\varphi$) :

$$\begin{aligned} d\vec{B}(M) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge \vec{PM}}{PM^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{PM^2} \vec{u}, \end{aligned}$$

dont la composante sur z est :

$$dB_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR d\varphi}{PM^2} \sin \theta$$

Sachant que $\frac{R}{IM} = \sin \theta$, on a $dB_z = \frac{\mu_0 I}{4MR} \sin^3 \theta d\varphi$.

La contribution de tous les éléments de courant de la spire donne φ variant de 0 à $2M$:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4MR} \sin^3 \theta 2M$$

et $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta = B(0) \sin^3 \theta$

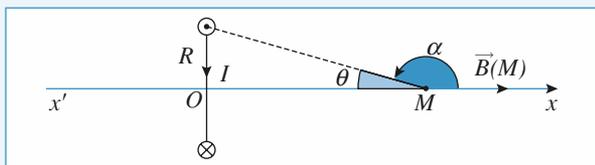
M sur l'axe

avec $B(0) = \frac{\mu_0 I}{2R}$, ce dernier résultat pouvant se retrouver

très rapidement.

2 • a) Le vecteur champ magnétique créé par une spire (de rayon R , parcourue par un courant d'intensité I) en un point de son axe est donné par :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_x.$$

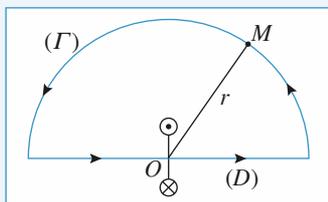


La circulation de \vec{B} sur $(x'Ox)$ est égale à $C = \int_{-\infty}^{+\infty} B(x) dx$,

avec $x = -\frac{R}{\tan \alpha}$; $dx = \frac{R}{\sin^2 \alpha} d\alpha$ et $\sin \theta = \sin \alpha$.

Soit :
$$C : \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\sin^3 \alpha}{\sin^2 \alpha} R d\alpha = \mu_0 I.$$

b) Soit le contour fermé constitué de la droite (D) et du demi-cercle (Γ) de rayon r infini.



$$\int_{(D)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I ; \int_{(D)+(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I.$$

D'où $\int_{(\Gamma)} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$, ce qui est normal, car pour r grand,

B varie en $\frac{1}{r^3}$, donc l'intégrale tend bien vers 0.

3 • Le solénoïde étant constitué de N spires, en utilisant le

résultat précédent, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} \vec{B}(x) d\vec{x} = \mu_0 NI$.

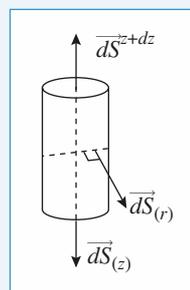
13 Champ au voisinage de l'axe d'une spire (classique)

1 • Il y a invariance de la distribution par rotation autour de Oz donc B ne dépend pas de θ : $\vec{B}(P) = \vec{B}(r, z)$.

Tout plan passant par O_2 (plan O, \vec{e}_z, \vec{e}_r) est plan d'antisymétrie de la distribution ; le champ \vec{B} appartenant à ce plan, n'a donc pas de composantes selon $\vec{e}_\theta = \vec{B}(P) =$

$$B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z.$$

2 •



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}(z+dz) + \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}(x) + \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}(r) = 0$$

$$\approx B_z(0, z+dz)\pi r^2 - B_z(0, z)\pi r^2 + B_r(r, z) 2\pi r dz.$$

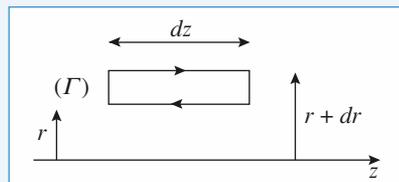
En effet comme r et dz sont petits et de même ordre de grandeur on peut considérer que B_z varie peu avec r sur $dS(z+dz)$ ou $dS(z)$ et approximer la valeur du champ sur ces deux surfaces à la valeur du champ sur l'axe, et que B_r varie peu avec z sur $dS(r)$.

Donc $0 = \pi r^2 \frac{dB_z}{dz} dz + B_r(r, z) 2\pi r dz$

D'où $B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z}{dz}(0, z) = -\frac{r}{2} \frac{df(z)}{dz} I.$

3 • Au 2^e ordre en r : $B_z(r, z) = B_z(0, z) + \beta(z)r^2 I.$

Pour faire intervenir la composante axiale $B_z(r, z)$ à la distance r de l'axe, appliquons le théorème d'Ampère au contour (Γ) suivant :



$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B_z(r+dr, z)dz - B_r(r, z+dz)dr - B_z(r, z)dz + B_r(r, z)dr = 0,$$

car il n'y a aucun courant enlacé.

Ce qui donne :

$$\frac{\partial B_z}{\partial r}(r, z) dr dz - \frac{\partial B_r}{\partial z} dr dz = 0$$

soit $\frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial B_r}{\partial z}$, et ainsi :

$$2\beta(z)rI = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_z(0, z)}{dz} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 f(z)}{dz^2} I$$

soit : $\beta(z) = -\frac{1}{4} \frac{d^2 f}{dz^2}$

ou $B_z(r, z) = B_z(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2}{dz^2} B_z(0, z)$.

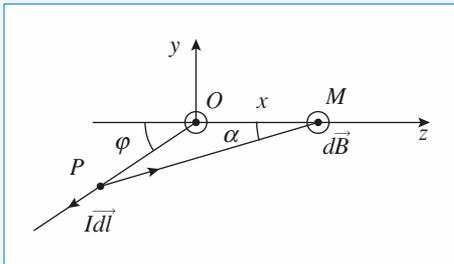
4 • Ainsi avec $M(0, 0, z)$ et $P(r, \theta, z)$:

avec $\vec{B}(M) = B(M)\vec{e}_z = B(z)\vec{e}_z$

$$\vec{B}(P) = \vec{B}(M) - \frac{r}{2} \frac{d}{dz} B(z)\vec{e}_z - \frac{r^2}{4} \frac{d^2}{dz^2} B(z)\vec{e}_z$$

14 Courant angulaire

Calculer tout d'abord le champ créé par un seul demi-fil infini au point M .



L'élément $I d\vec{\ell}$ centré au point P créé un champ

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{e}_{P \rightarrow M}}{PM^2}$$

La relation des sinus dans le triangle OPM nous donne :

$$\frac{PM}{\sin(\pi - \varphi)} = \frac{PM}{\sin \varphi} = \frac{OM}{\sin(\varphi - \alpha)} = \frac{OP}{\sin \alpha}$$

$$PM = \frac{OM \sin \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} \text{ et } OP = \frac{OM \sin \alpha}{\sin(\varphi - \alpha)} ; OM = x$$

On en déduit

$$PM^2 = \frac{x^2 \sin^2 \varphi}{\sin^2(\varphi - \alpha)} \text{ et } dOP = d\ell = x \frac{\sin \varphi d\alpha}{\sin^2(\varphi - \alpha)}$$

Par ailleurs $d\vec{\ell} \wedge \vec{e}_{PM} = \sin(\varphi - \alpha) d\ell \vec{e}_z$ d'où

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sin(\varphi - \alpha) d\alpha \vec{e}_z}{x \sin \varphi} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d[\cos(\varphi - \alpha)] \vec{e}_z}{\sin \varphi}$$

Pour tout le fil il faut faire varier α de 0 à φ . Il vient

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi x} \frac{(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} x \tan \frac{\varphi}{2} \vec{e}_z$$

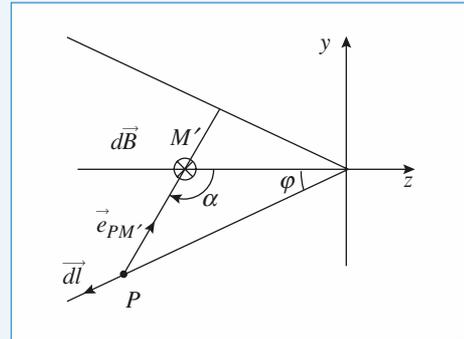
Pour trouver le champ créé par l'autre fil, il suffit de considérer le plan xOz qui est un plan d'antisymétrie de la distribu-

tion de courant. L'autre fil créé donne en M un champ égal à l'opposé du symétrique de \vec{B}_1 : soit $\vec{B}_2 = -\vec{B}_1$. Le champ total vaut donc

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tan \frac{\varphi}{2} \vec{e}_z$$

Dans le cas du point M' , un calcul rigoureusement analogue nous mène à

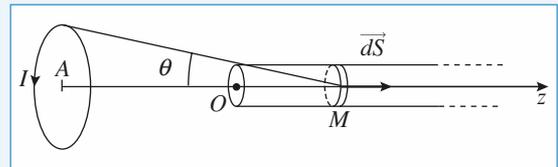
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} \frac{1}{\tan \frac{\varphi}{2}} \vec{e}_z$$



Remarque

Si $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on retrouve le champ magnétique \vec{B} créé par un fil rectiligne infini.

15 Flux du champ d'une spire à travers un solénoïde



Prenons l'origine de l'axe des z à l'extrémité gauche du solénoïde. Considérons le flux envoyé par la grande spire à travers les spires comprises entre la cote z et la cote $z + dz$ du solénoïde (voir figure).

Il y a $n dz$ spires qui sont traversées par le champ

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z \text{ qui y crée donc un flux}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 I \pi r^2}{2R} \sin^3 \theta \times n dz$$

Posons $OA = d > 0$; l'angle θ est défini par

$$\tan \theta = \frac{R}{z + d}, \text{ soit encore } z = \frac{R}{\tan \theta} - d$$

liant dz et $d\theta$ est donc : $dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta$, ce qui donne

$$d\Phi = -\frac{\mu_0 I}{2} \pi r^2 n \sin \theta d\theta.$$

Quand z varie de 0 à l'infini, θ varie de α à 0, ce qui donne :

$$\Phi = \frac{\mu_0 I \pi}{2} r^2 n \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 n I \pi}{2} r^2 (1 - \cos \alpha)$$

16 Champ magnétique créé par l'électron de l'atome d'H

1 • Le principe fondamental appliqué à l'électron donne

$$m\vec{a} = -\frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r.$$

Pour un mouvement circulaire de rayon r

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{e}_r$$

$$\text{donc } \frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r^2} \Leftrightarrow v^2 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 mr}$$

$$\Rightarrow v = \frac{e}{\sqrt{4\pi \epsilon_0 mr}}$$

$$\text{A.N.} = v = 310^{4,5} \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{\sqrt{9 \cdot 10^{-31} \times 53 \cdot 10^{-12}}} = 2,2 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

grandeur très inférieure à c , heureusement ! sinon le calcul classique ainsi fait était impossible.

2 • En un tour une quantité de charge égale à celle de l'électron a parcouru un cercle de rayon r : l'électron en mouvement se comporte comme une boucle parcourue par un courant d'intensité $i = \frac{e}{T}$, T étant la période de révolution

$$\text{égale à } \frac{2\pi r}{v} \text{ d'où } i = \frac{ev}{2\pi r}.$$

Le courant crée au niveau du proton un champ

$$B = \frac{\mu_0 i}{2r} = \frac{\mu_0 ev}{4\pi r^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{A.N.} : B &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{ev}{r^2} = 10^{-7} \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 2,2 \cdot 10^6}{53^2 \cdot 10^{-24}} \\ &= \frac{1,6 \times 2,2}{53^2} 10^{-7+6+24-19} = 12,53 \text{ T} \end{aligned}$$

Ce champ est très intense.

- Le champ magnétique terrestre est inférieur à 10^{-4} T.
- Le champ B maximum dans la matière est de l'ordre de 1 T.

3

Dipôles électrique et magnétique

LES OBJECTIFS

- Modèle du dipôle.
- Champ et potentiel du dipôle.
- Similitudes et différences entre dipôles électrique et magnétique.
- Actions exercées par un champ \vec{E} extérieur sur un dipôle électrique.

LES PRÉREQUIS

- Potentiel électrostatique.
- Champ \vec{E} et \vec{B} .

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Développement limité.
- Opérateur gradient.

ESSENTIEL

◀ Moment dipolaire électrique

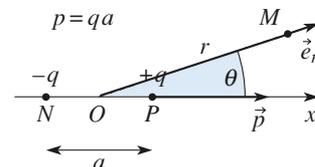
Un objet de charge totale nulle, mais dont le barycentre des charges positives est décalé par rapport à celui des charges négatives, crée un potentiel et un champ analogues (en première approximation) à ceux d'un doublet de charges.

Un doublet constitué d'une charge $-q$, située en N , et $+q$, située en P , est caractérisé par son moment dipolaire $\vec{p} = q \overrightarrow{NP}$.

L'unité usuelle de moment dipolaire est le Debye : $1 \text{ D} = \frac{1}{3} 10^{-29} \text{ C.m}$

◀ Potentiel et champ d'un dipôle électrique

- Le potentiel électrostatique créé par un dipôle de moment dipolaire \vec{p} placé au point O est, à l'ordre le plus bas en puis-



sances de $\frac{a}{r}$:

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{OM^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

• L'expression du champ du dipôle est, en coordonnées polaires :

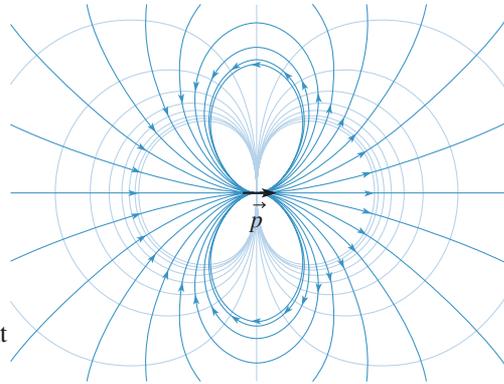
$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta \vec{e}_r + p \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

obtenu grâce à $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$.

• Sous forme intrinsèque :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}.$$

• Les lignes de champ et les équipotentielles ont l'allure ci-contre.

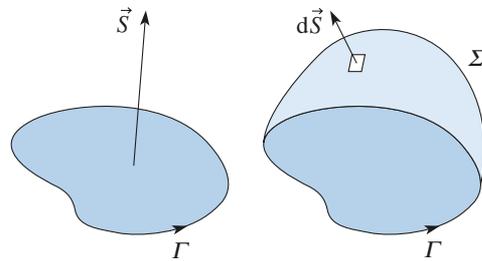


◀ Moment magnétique (PCSI)

• Le vecteur surface \vec{S} associé à un contour orienté Γ est défini par $\vec{S} = \iint_{\Sigma} d\vec{S}$.

Σ est une surface quelconque qui s'appuie sur Γ ; l'orientation de Γ et celle de Σ sont liées par la règle du « tire-bouchon ».

• Le moment magnétique d'une boucle de courant, parcourue par un courant I et définie par son contour orienté Γ et son vecteur surface \vec{S} , est $\vec{M} = I\vec{S}$.



◀ Champ dipolaire magnétique (PCSI)

• En des points très éloignés d'une boucle de courant, son champ magnétique tend vers celui d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} .

• Bien que physiquement différents, le champ électrostatique d'un dipôle électrique de moment \vec{p} et le champ magnétique d'un dipôle magnétique de moment \vec{M} sont formellement identiques à grande distance en coordonnées sphériques d'axe (O, \vec{M}) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M \cos \theta \vec{e}_r + M \sin \theta \vec{e}_\theta}{r^3}.$$

Son expression intrinsèque est donc $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r - \vec{M}}{r^3}$.

• L'identité n'est vraie qu'à grande distance ; le champ électrique d'un doublet et le champ magnétique d'une boucle de courant sont très différents au voisinage des sources.

Interaction d'un dipôle électrique avec un champ appliqué permanent

- La résultante des forces qui s'exercent sur un dipôle placé dans un champ électrique **uniforme** est nulle.
- Le moment des forces appliquées à un dipôle, placé dans un champ uniforme ou légèrement hétérogène, est $\vec{T} = \vec{p} \wedge \vec{E}$.
- Dans un champ non uniforme, le dipôle subit principalement un moment qui tend à l'aligner dans le sens du champ appliqué. Une fois aligné, le dipôle subit une force qui tend à le déplacer vers les zones de champ intense.
- L'énergie potentielle d'interaction entre le dipôle rigide et le champ appliqué est $\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$.

Conseils et pièges à éviter

- Avec des répartitions dipolaires électrostatiques il faut toujours commencer par calculer le potentiel : il est plus simple de faire un développement limité de scalaire qu'un développement limité de vecteur.
- Nous ne connaissons que l'expression de l'énergie potentielle d'un **dipôle rigide** placé dans un **champ permanent**. Attention aux dipôles induits...

1 Moments dipolaires moléculaires

1 • Dans la molécule d'eau, la différence d'électro-négativité entre atome d'oxygène et atome d'hydrogène polarise les liaisons OH de telle sorte que chaque atome d'hydrogène porte une charge partielle égale à $\frac{e}{3}$ environ.

En déduire le moment dipolaire p de la molécule d'eau sachant que l'angle α entre les deux liaisons OH est égal à $104^\circ 45'$ et que la longueur d'une liaison OH est $d = 95$ pm.

2 • En vous aidant de la théorie VSEPR expliquez pourquoi la molécule de trioxyde de soufre est apolaire malgré la différence d'électro-négativité entre les atomes O et S.

Conseils

1) Une distribution dipolaire est globalement neutre : on en déduit les charges partielles sur les autres atomes.

Le moment de la molécule d'eau est la **somme vectorielle** des moments des deux liaisons OH.

2) l'atome de soufre n'a pas à obéir à la règle de l'octet puisqu'il est sur la 3^e ligne du tableau périodique.

2 Positions de Gauss d'un dipôle

1 • En un point M quelconque tracer approximativement le vecteur champ électrique créé par un dipôle de moment dipolaire $\vec{p} = p \vec{e}_x$.

2 • Tracer alors la ligne de champ qui passe par ce point M .

3 • Représenter les vecteurs de base \vec{e}_r et \vec{e}_θ au point M .

4 • Où sont situés les points tels que le champ électrique créé par un dipôle ait même direction que le moment dipolaire ? Ce sont les positions de Gauss.

5 • Faire un schéma illustrant ces positions, en reportant les vecteurs de base pour chacune d'elles.

Conseils

1) Appliquer le théorème de superposition : au point M se superposent les champs des deux charges constituant le dipôle.

2) Il faut veiller à ce que la ligne soit bien tangente au champ que vous venez de tracer au point M , sinon il y a une erreur soit dans la représentation de E soit dans le tracé de la ligne de champ.

Conseils

3) Pour représenter correctement les vecteurs de base il faut tracer OM qui donne la direction de \vec{e}_r ; celle de \vec{e}_θ s'en déduit par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens choisi pour définir la coordonnée θ .

4) Pour quelles positions de M , \vec{e}_r ou \vec{e}_θ se retrouvent-ils parallèles à Ox ? Pour quelles valeurs de θ le champ E est-il selon e_r ou e_θ seulement ?

5) Vérifier la concordance avec l'expression des composantes de \vec{E} .

3 Validité de l'approximation dipolaire électrique

Un dipôle est constitué de deux charges opposées $-q$ et $+q$ situées sur l'axe (Ox) aux abscisses $-\frac{a}{2}$ et $\frac{a}{2}$.

1 • En un point de l'axe (Ox) d'abscisse x , rappeler la valeur $\vec{E}_0(x)$ du champ électrique dans l'approximation dipolaire.

2 • Exprimer la valeur exacte du champ électrique sous la forme $\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x)f(x)$.

3 • Pour quelles valeurs de x ces deux expressions du champ sont-elles égales à 1% près ?

4 • Reprendre ces questions pour un point de l'axe (Oy) . Conclure.

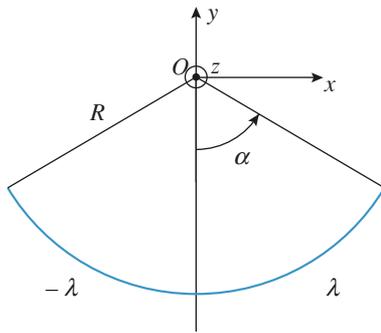
Conseils

La solution doit pouvoir s'adapter à tous les systèmes de deux charges. La grandeur significative n'est pas l'éloignement absolu x (ou y), mais l'éloignement rapporté à la distance a . La fonction $f(x)$ est en fait une fonction de la variable adimensionnée $\frac{x}{a}$.

Le champ \vec{E}_0 peut s'obtenir, soit à partir de l'expression intrinsèque, soit à partir de l'expression en coordonnées polaires (r, θ) ; dans ce dernier cas il faut, pour chaque configuration, repérer l'orientation des vecteurs \vec{e}_r et \vec{e}_θ de la base locale.

4 Arcs de cercle portant des densités de charges égales et opposées

Les arcs de cercle de rayon R sont chargés avec les densités λ et $-\lambda$.



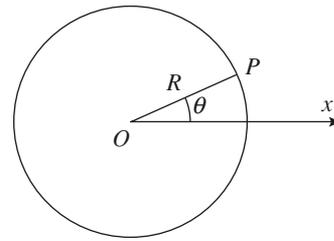
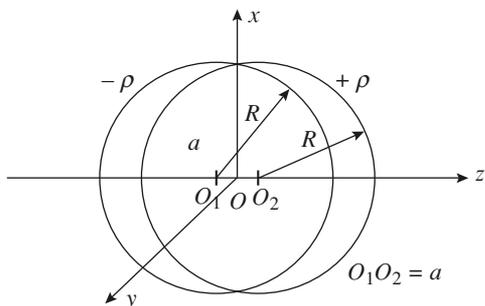
- 1 • Calculer le champ électrique en O , centre du cercle de rayon R .
- 2 • Calculer le champ en un point M de l'axe Oz , tel que $z_M \gg R$.
- 3 • Que retrouve-t-on lorsque α tend vers zéro ?

Conseils

- 1) Étudier d'abord les symétries pour ne sommer que les seules composantes qui contribuent effectivement au champ total.
- 2) Il faut projeter deux fois le champ élémentaire pour obtenir la composante « utile » : une première fois pour se ramener à la composante « horizontale », une deuxième pour se ramener, comme en 1) à la projection sur Ox . Quand $z \gg R$ la 1^{re} projection s'exprime facilement à l'aide de $\frac{R}{z}$.
- 3) Quand α tend vers zéro on doit retrouver l'expression du champ d'un dipôle, les barycentres des charges positives et négatives se situant en $(-\alpha R, -R)$ et $(+\alpha R, -R)$.

5 Passage d'une densité volumique à une densité surfacique

Reprenons l'exercice 2 du chapitre 1. On considère deux sphères identiques, de rayons R , de centres respectifs O_1 et O_2 distants de a , et chargées respectivement avec des densités volumiques uniformes mais opposées $-\rho$ et $+\rho$, modélisables par une sphère de centre O , de rayon R , chargée avec une densité surfacique de charges $\sigma = \sigma_0 \cos \theta$ ($\sigma_0 = \rho a$).



- 1 • Calculer le champ créé en O par cette distribution.
- 2 • Montrer qu'en réalité le champ est uniforme à l'intérieur de la sphère.
- 3 • Comment se comporte cette distribution pour $r > R$? En déduire l'expression du potentiel en un point M extérieur en fonction de $r = OM$, σ_0 et R . En déduire le champ électrique pour $r > R$.

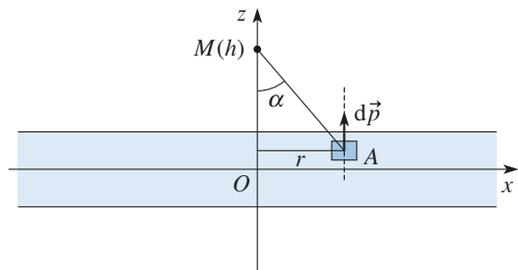
Conseils

- 1) Toutes les charges comprises entre θ et $\theta + d\theta$ contribuent également au champ résultant.
- 2) Appliquer le théorème de superposition et le théorème de Gauss.
- 3) À l'extérieur de la distribution comment se comportent les deux sphères uniformément chargées ?

6 Dipôles répartis entre deux plans parallèles

L'espace compris entre deux plans de cotes $-\frac{e}{2}$ et $\frac{e}{2}$ est rempli de dipôles microscopiques régulièrement répartis. Un volume mésoscopique élémentaire $d\tau$ possède un moment dipolaire $d\vec{p} = \vec{P}d\tau$. Le vecteur \vec{P} , densité volumique de moment dipolaire encore appelé vecteur polarisation, est ici uniforme :

$$\vec{P} = P\vec{e}_z$$



- 1 • Un point A situé entre les plans de cotes $-\frac{e}{2}$ et $\frac{e}{2}$ est repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) . Exprimer le potentiel dV créé par les dipôles situés dans l'élément de volume $d\tau$ situé au voisinage de A ,

en un point M situé sur l'axe (Oz) , à la cote h . On pourra utiliser l'angle α (cf. schéma ci-dessus).

2 • En déduire le potentiel et le champ électrique en M . On étudiera tous les cas :

$$< -\frac{e}{2}, -\frac{e}{2} < \frac{e}{2} \text{ et } > \frac{e}{2}.$$

3 • Montrer que cette distribution de dipôles est équivalente à une distribution de charges que l'on précisera.

4 • Sachant que $V(M)$ est donné par :

$$V(M) = \iiint_{\substack{\text{volume où} \\ \text{existe } \vec{P}}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{AM} d\tau}{4\pi\epsilon_0 AM^3}$$

montrer que : $V(M) = \vec{P} \cdot \vec{E}(M)$ où $\vec{E}(M)$ est analogue à un champ de « nature électrostatique » créé par une densité volumique de « charge » que l'on définira.

Calculer $\vec{E}(M)$ dans tout l'espace. En déduire $V(M)$.

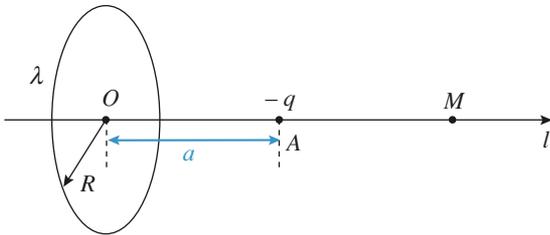
Conseils

Il faut ici raisonner sur les dipôles élémentaires, comme on l'a fait par ailleurs pour les charges élémentaires : chaque dipôle élémentaire $d\vec{p}$, associé à un élément de volume $d\tau$, crée en M un potentiel dV .

Pour un point M situé entre les deux plans, il faut considérer qu'une fraction du système se trouve au-dessus de M , et l'autre partie en dessous.

Quelle est la distribution de charges qui crée un champ uniforme dans tout l'espace $z > 0$?

7 Interaction circonférence chargée – charge et dipôle



Une circonférence de centre O , de rayon R , d'axe Oz porte une charge $+q$ uniformément répartie. Une charge $-q$ se trouve sur l'axe de la circonférence en A , tel que $OA = a$.

1 • Calculer le potentiel créé par l'ensemble en un point M de l'axe.

2 • Montrer que cette distribution, charge plus circonférence, se comporte comme un dipôle quand M est

suffisamment éloigné. Donner alors son moment dipolaire en fonction de q, R et a .

On place maintenant en A un dipôle rigide de moment $\vec{p} = p \vec{e}_z$, astreint à se déplacer sans frottement selon l'axe Oz .

3 • Calculer la force que le dipôle exerce sur la circonférence.

4 • Calculer la force que la circonférence exerce sur le dipôle en considérant qu'il est constitué de deux charges $-q'$ et $+q'$, situées respectivement en $\frac{z-d'}{2}$ et $\frac{z+d'}{2}$. Conclure.

5 • Retrouver ce résultat en passant par l'énergie potentielle d'interaction de la circonférence et du dipôle.

6 • Déterminer les positions d'équilibre du dipôle.

7 • Déterminer la pulsation des petites oscillations autour de la position stable.

Conseils

1) Appliquer le théorème de superposition.

2) Pour z très grand ($z \gg a$) on peut simplifier l'expression du potentiel et chercher à le mettre sous la forme du potentiel d'un dipôle. Il ne reste plus alors qu'à identifier au numérateur l'expression du

moment dipolaire puisque $V = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 z^2}$ en un point

de l'axe d'un dipôle.

3) Commencer par chercher la direction de la résultante des forces en considérant par exemple les forces qui s'exercent sur deux éléments de circonférence diamétralement opposés. Ensuite projeter le champ du dipôle sur cette direction.

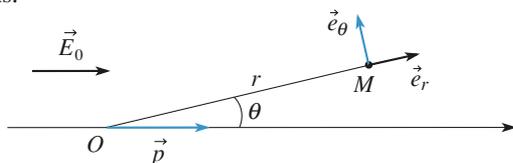
4) Sommer les forces exercées par les charges de la circonférence sur les deux charges qui constituent le doublet, puis d' étant très inférieur à z (approximation dipolaire) simplifier l'expression obtenue à l'aide des développements limités.

5) Le dipôle subit l'action du champ créé par la circonférence. La force qui s'exerce sur lui se calcule facilement à partir de l'énergie potentielle $-\vec{p} \cdot \vec{E}$. Les deux dernières questions se traitent à partir de l'énergie potentielle.

8 Un modèle de l'action d'un champ électrique uniforme sur une molécule

1 • Une molécule polaire peut être représentée électriquement par un dipôle électrostatique rigide constitué de deux

charges $+q(P)$ et $-q(N)$, de moment dipolaire $\vec{p} = q\overline{NP}$, avec $NP = a$. Cette molécule se trouve dans un champ électrostatique uniforme \vec{E}_0 , parallèle à \vec{p} et de même sens.



a) Calculer le potentiel V en un point M situé à une distance $r = OM$ de O (milieu de NP) très supérieure à a .

b) Calculer E_r et E_θ .

c) Montrer qu'il existe une surface Σ telle que $E_\theta = 0$ en chaque point de Σ .

Quelles sont ses caractéristiques géométriques ?

Que peut-on dire de cette surface du point de vue de ses propriétés électrostatiques ?

2 • On admet que rien n'est modifié en ce qui concerne la répartition des champs et des potentiels, à l'extérieur de Σ , si on remplace le dipôle par une sphère conductrice de charge totale nulle et dont la surface est confondue avec Σ .

a) Vérifier que le flux de \vec{E} à travers toute surface extérieure à Σ est bien identique pour les deux systèmes.

b) En l'absence de courant, le champ électrique est nul à l'intérieur d'un bloc conducteur.

Que dire du potentiel sur Σ pour les deux systèmes ? Conclure.

c) En admettant cette équivalence, montrer qu'il apparaît, sur la surface de la sphère conductrice, une charge surfacique σ telle que $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$.

Exprimer σ_0 et vérifier que la charge totale de la sphère conductrice est bien nulle.

3 • Soit une distribution de charges globalement neutre représentant une molécule dépourvue de moment dipolaire permanent. On la place dans un champ électrostatique extérieur E_0 ; la molécule acquiert alors un moment dipolaire induit \vec{p}_i .

Dans certaines conditions, on peut poser $\vec{p}_i = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0$.

a) Que désigne α ? Quelle est sa dimension ?

b) Dans un modèle « ancien », très simplifié, on assimile un atome à une sphère conductrice rigide de rayon r_0 , globalement neutre.

Que se passe-t-il lorsque cet atome est placé dans un champ E_0 ? En tenant compte des résultats du 1), montrer que cet atome est équivalent à un dipôle dont on précisera le moment dipolaire.

Pourrait-on écrire pour cet atome une relation du type $\vec{p}_i = \alpha \epsilon_0 \vec{E}_0$?

Exprimer α . À quelle grandeur caractéristique de cet atome α est-il relié ?

c) Donner un exemple lié à la chimie montrant l'importance de la notion de polarisabilité.

Conseils

1) a) Appliquer le principe de superposition et les résultats du cours.

c) Comment est orienté \vec{E} par rapport à la surface Σ ? Que peut-on dire de V en un point quelconque de cette surface ?

2) b) Le champ est nul à l'intérieur de la sphère conductrice; que peut-on en déduire pour le potentiel ? On rappelle que le potentiel est une fonction continue des coordonnées d'espace.

c) Quelle est l'expression de la discontinuité du champ électrostatique \vec{E} liée à la traversée d'une surface chargée ?

3) a) α caractérise l'aptitude de la distribution à se déformer sous l'action d'un champ extérieur (penser au cours de chimie sur l'atome et la molécule).

b) Raisonner qualitativement sur l'action du champ sur le cortège électronique.

c) Les exemples sur l'importance de cette notion sont nombreux, notamment en chimie organique.

9 Interaction dipôle permanent - dipôle induit



On considère un dipôle \vec{p}_0 , constant et rigide, modélisant une molécule polaire, dirigé selon Ox , placé en un point P_0 , en $x = a$.

En O ($x = 0$) se trouve une molécule polarisable, de polarisabilité α , c'est-à-dire que soumise à un champ E , elle acquiert un moment dipolaire $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$.

1 • Quelle est l'équation aux dimensions de α ?

2 • Calculer le moment dipolaire qu'induit, au niveau de la molécule polarisable, la molécule polaire.

3 • Calculer la force qui s'exerce sur la molécule polarisable, puis sur la molécule polaire.

4 • Justifier que l'on trouve une force d'attraction quelle que soit l'orientation du dipôle permanent.

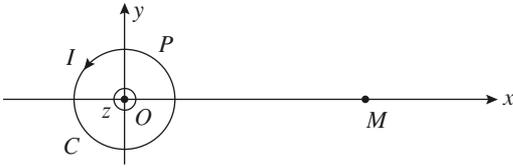
Conseils

1) On utilisera la définition d'un moment dipolaire, et l'expression du champ E créé par une charge ponctuelle pour trouver la dimension de α .

2) Attention : pour le point P_0 , $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$ et $\theta = \pi$.

3) Attention nous connaissons uniquement l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide (le cas de \vec{p}_0 et non de \vec{p}) placé dans un champ permanent.

10 Champ magnétique en un point du plan d'une spire



Une spire circulaire de centre O , de rayon a et d'axe (Oz) est parcourue par un courant d'intensité I . Un point courant P de la spire est repéré par l'angle que fait le vecteur \vec{OP} avec l'axe (Ox) de référence. Exprimer sous forme d'une intégrale le champ magnétique créé en un point M de l'axe (Ox) très éloigné de la spire $\left(\frac{x}{a} \gg 1\right)$.

Effectuer un développement limité en $u = \frac{a}{x}$ de l'intégrale et obtenir la partie principale du champ $\vec{B}(M)$. Vérifier que ce champ est bien celui créé par un dipôle magnétique au même point.

11 Champ magnétique créé par une sphère chargée en rotation (oral)

On considère une sphère isolante, de rayon R et de centre O , creuse, portant une charge Q uniformément répartie sur sa surface. Elle tourne autour d'un axe Oz avec une vitesse angulaire ω constante qui ne perturbe pas la répartition des charges.

- Déterminer le moment magnétique ainsi créé.
- Montrer que le champ magnétique créé n'a pas de composante selon \vec{e}_ϕ .
- Déterminer et représenter le champ créé loin de la sphère
 - en un point quelconque ;
 - en un point de l'axe Oz .

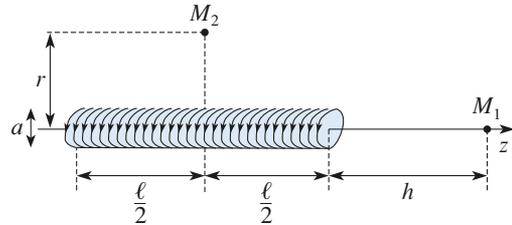
Conseils

- On a déjà vu à l'ex. 7 du chapitre précédent comment exprimer les courants surfaciques générés par le mouvement de la sphère : on décompose la sphère en spires de courant de largeur $Rd\theta$, de rayon $R \sin \theta$. On somme alors les moments magnétiques de toutes les spires en intégrant sur θ .
- Il faut utiliser le Principe de Curie, c'est-à-dire étudier les symétries, dès que ce genre de question est posée.

3) Loin de la sphère, celle-ci se comporte comme le dipôle dont on vient de calculer le moment. Il est alors très simple, dans un plan $\phi = \text{cte}$, de calculer l'expression du champ \vec{B} à partir des formules du dipôle. Pour représenter correctement le champ en un point, il faut tracer approximativement la ligne de champ du dipôle en ce point et correctement l'orienter. On pourra également tenter un calcul direct à partir des boucles de courant...

12 Champ magnétique créé par un solénoïde dans l'approximation dipolaire

Un solénoïde est constitué de N spires parcourues par un courant I , régulièrement bobinées sur un cylindre de section S (non nécessairement circulaire), de longueur ℓ et dont les génératrices sont parallèles à l'axe (Oz) .



- Déterminer le moment magnétique $d\vec{M}$ associé à une tranche de solénoïde de longueur élémentaire dz .
- Calculer le champ \vec{B} en un point M_1 situé sur l'axe (Oz) , à une distance h de l'extrémité du solénoïde, avec l'approximation $h \gg a$. Dans le cas d'un solénoïde à section circulaire, comparer avec l'expression obtenue sans cette approximation.
- Calculer le champ \vec{B} en un point M_2 situé sur le plan de symétrie, à une distance r de l'axe, avec l'approximation $r \gg a$. Étudier le cas limite du solénoïde infiniment long.

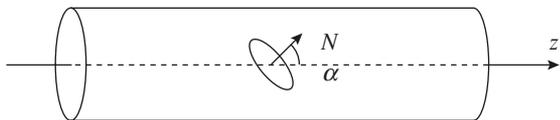
Conseils

- Combien de spires y a-t-il entre z et $z + dz$?
- Il s'agit ici bien évidemment d'exploiter le champ magnétique créé par le dipôle $d\vec{M}$. Comme il va falloir sommer les champs de tous les dipôles, on ne peut prendre l'origine au niveau du dipôle, on la prend donc au niveau du point M , fixe. Dans la formule, en coordonnées cylindriques r est la distance au dipôle, donc nécessairement positive. Selon la position de M sur l'axe par rapport au solénoïde $\theta = 0$ ou π .
- Quelles sont les éléments de symétrie de la distribution au point M_2 ? En déduire les composantes à sommer. Où choisir l'origine cette fois pour mener le calcul le plus simplement ?

13 Flux d'une petite spire à travers une grande spire

On considère une petite spire, de rayon a , parcourue par I , placée en O , telle que son moment magnétique soit $\vec{m} = \pi a^2 I \vec{e}_z$.

À une distance d sur l'axe Oz se trouve le centre C d'une grande spire de rayon $R \gg a$.



Calculer le flux φ , en fonction de a , d et R envoyé par la petite spire dans la grande.

Conseils

Quelles sont les invariances du problème ? En déduire les plans où sont contenus le champ magnétique créé par la spire. Dans un de ces plans faire un schéma où figurent explicitement les composantes de B du dipôle et le vecteur surface de la spire de rayon R . Bien regarder aussi les symétries et invariances pour le choix de la surface.

Le champ B étant un vecteur à flux conservatif, son flux à travers la spire de rayon R ne dépend pas du choix de la surface s'appuyant sur ce contour.

On peut obtenir des calculs simples en prenant une surface sphérique de centre O s'appuyant sur la spire. On pourra aussi vérifier le résultat précédent en prenant la surface plane de la spire ; dans ce dernier cas, les calculs sont plus laborieux...

1 Moments dipolaires moléculaires

1 • Si les atomes d'hydrogène portent chacun une charge partielle $\delta q = \frac{e}{3}$ alors l'atome d'O porte une charge $\delta q = -\frac{2e}{3}$

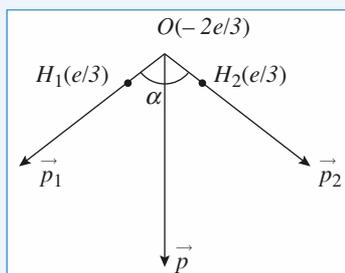
qui assure la neutralité de la molécule H_2O .

Chaque liaison possède un moment dipolaire $\vec{p}_i = \delta q \overrightarrow{\text{OH}_i}$

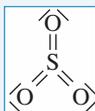
Le moment résultant est $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$

$$\text{Soit } p = 2 p_i \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \times \frac{e}{3} \times d \cos \frac{\alpha}{2}$$

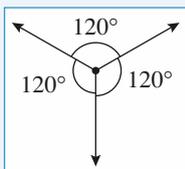
$$= 6,18 \cdot 10^{-30} \text{ C. m} = 1,85 \text{ D}$$



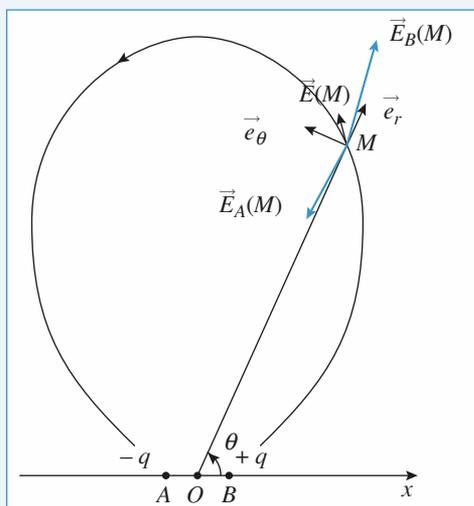
2 • SO_3 est du type AX_3 donc plane, telle que les liaisons $\text{S} = \text{O}$ forment entre elles des angles de 120° :



chaque liaison est polarisée avec un même moment ; le moment résultant est donc nul $\Sigma \vec{p}_i = \vec{0}$ par symétrie.



2 Positions de Gauss d'un dipôle



1 • $\vec{E}(M) = \vec{E}_A(M) + \vec{E}_B(M)$ avec $\|\vec{E}_B(M)\| > \|\vec{E}_A(M)\|$ car $BM < AM$.

2 • La ligne de champ issue de B vers A passant par M est évidemment tangente au champ $\vec{E}(M)$ (lignes de champ d'un dipôle). Elle est symétrique par rapport à Oy (non représenté sur la figure) $\perp Ox$.

3 • \vec{e}_r est le vecteur directeur de $\overrightarrow{\text{OM}}$; \vec{e}_θ est obtenu par rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct (orientation de θ).

4 • On cherche les points tels que $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_x$ sachant que $\vec{E}(M) = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_\theta$

Pour r donné :

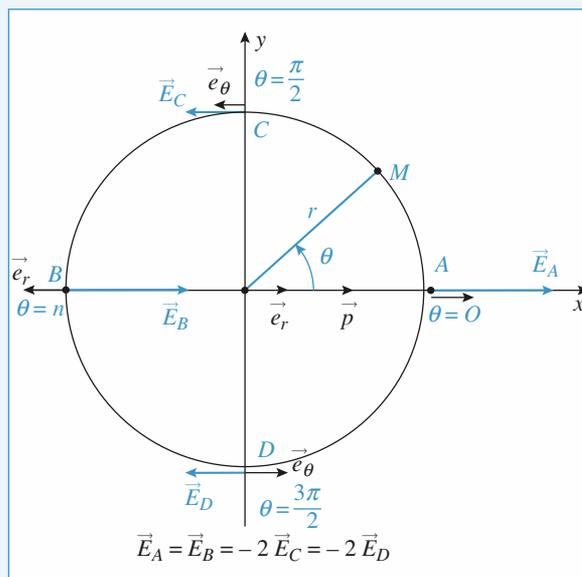
si $\theta = 0$ alors $E_\theta = 0$ $\vec{e}_r = \vec{e}_x$ et $\vec{E}_A = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_x$

si $\theta = \pi$ $E_\theta = 0$ $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$ $\vec{E}_B = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_x$

si $\theta = \frac{\pi}{2}$ $E_r = 0$ $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_x$ $\vec{E}_C = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_x$

si $\theta = -\frac{\pi}{2}$ $E_r = 0$ $\vec{e}_\theta = +\vec{e}_x$ $\vec{E}_D = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_x$

Donc les points sont situés dans les plans définis par $\theta = 0$ (plan $y = 0$) et par $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ (plan $x = 0$) en raison de l'invariance par rotation autour de Ox .



3 Validité de l'approximation dipolaire électrique

1 • En un point de l'axe (Ox) :

$$x = r, \theta = 0, \vec{e}_r = \vec{e}_x \quad (\vec{e}_\theta = \vec{e}_y).$$

L'expression générale du champ d'un dipôle s'écrit donc :

$$\vec{E}_0 = \frac{2qa}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_x.$$

2 • Il suffit d'additionner les champs électriques des deux charges :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2} \right) \vec{e}_x \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2ax}{\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)^2} \vec{e}_x \end{aligned}$$

On en tire $\vec{E}(x) = \vec{E}_0(x)f(x)$, avec $f(x) = \frac{1}{\left(1 - \frac{a^2}{4x^2}\right)^2}$.

3 • $f(x)$ est supérieur à 1 (dénominateur < 1).

$$f(x) \approx 1 \text{ à } 1\% \text{ près si } f(x) < 1 + 0,01.$$

Avec un développement limité à l'ordre 1 en $\frac{a^2}{4x^2}$, cette condition devient :

$$1 + \frac{a^2}{2x^2} < 1 + 0,01, \text{ soit } \frac{a}{|x|} < \sqrt{2 \cdot 10^{-2}}.$$

Elle est donc réalisée si $|x| > 7,1 a$.

4 • En un point de l'axe (Oy) :

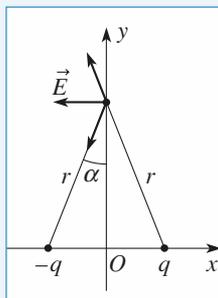
$$r = y, \theta = \frac{\pi}{2}, \vec{e}_\theta = -\vec{e}_x \text{ (et } \vec{e}_r = \vec{e}_y).$$

Le champ a donc pour expression :

$$\vec{E}_0 = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 y^3} \vec{e}_x.$$

Le plan $x = 0$ étant plan d'antisymétrie, le champ \vec{E} en tout point de l'axe (Oy) est orienté parallèlement à \vec{e}_x .

Il suffit donc de sommer les deux composantes selon \vec{e}_x des champs créés par les deux charges. Ces deux composantes sont égales :



$$E_x = -2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin \alpha, \text{ avec } \alpha = \frac{a}{r} \text{ d'où}$$

$$\vec{E} = -2 \frac{q \frac{a}{2}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{e}_x = -\frac{qa}{4\pi\epsilon_0 y^3} \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_x = g(y) \vec{E}_0(y).$$

$$g(y) = \frac{1}{\left(1 + \frac{a^2}{4y^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \text{ est inférieur à } 1;$$

$g(y) \approx 1$ à 1 % près si $g(y) > 1 - 0,01$.

Avec un développement limité, cette condition devient :

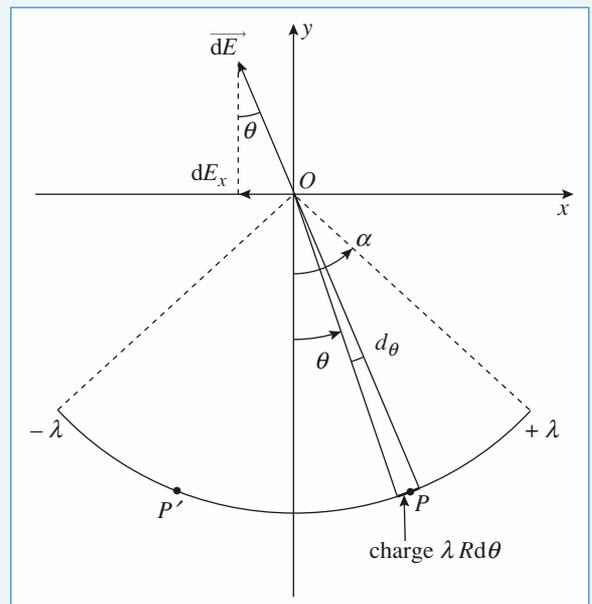
$$1 - \frac{3a^2}{8y^2} > 1 - 0,01, \text{ soit } |y| > 6,1 a.$$

Pour conclure, et en extrapolant à toutes les directions, l'approximation dipolaire est justifiée à mieux que 1 % près, pour des distances supérieures à moins de dix fois la distance entre les charges.

4 Arcs de cercle portant des densités de charges égales et opposées

1 • Le plan Oyz est plan d'antisymétrie de la distribution, donc $E(0)$ est selon \vec{e}_x seulement.

Deux points P et P' , symétriques par rapport à Oy contribuent donc également au champ résultant. Il suffira de calculer le champ dû au demi-arc positif seulement et de le multiplier par 2.



Le champ $d\vec{E}$ créé par l'élément de charge $dq = \lambda R d\theta$ centré sur P a pour norme $\|d\vec{E}\| = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2}$.

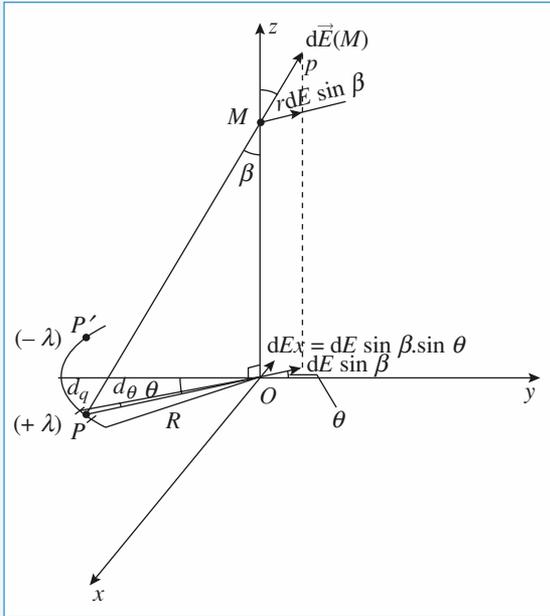
$$dE_x = - \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} \sin \theta.$$

Le champ dû à la distribution s'obtient donc selon

$$E_x = 2 \int_0^\alpha - \frac{\lambda R d\theta \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \left[\cos \theta \right]_0^\alpha = \frac{-\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} (1 - \cos \alpha)$$

d'où $\vec{E}(0) = - \frac{\lambda(1 - \cos \alpha)}{2\pi\epsilon_0 R} \vec{e}_x$; E_x est bien négatif.

2 •



Le plan (Oy, Oz) est un plan d'antisymétrie des charges, donc $\vec{E}(M) = E(M) \vec{e}_x$, M étant sur l'axe Oz .

La démarche est rigoureusement identique à celle du 1) mais il faut d'abord projeter le champ $d\vec{E}$ sur un plan horizontal (M, x, y) puis une seconde fois sur l'axe Ox .

$$\|d\vec{E}\| = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 P M^2} \text{ avec } P M = \sqrt{z_M^2 + R^2}$$

$$\text{et } dE_x = \frac{\lambda R d\theta}{4\pi\epsilon_0 P M^2} \sin \beta \sin \theta \text{ avec } \sin \beta = \frac{R}{P M}$$

donc $dE_x = - \frac{\lambda R^2 \sin \theta d\theta}{4\pi\epsilon_0 P M^3}$. Lorsque le point P décrit le demi-arc, $P M$ reste constant.

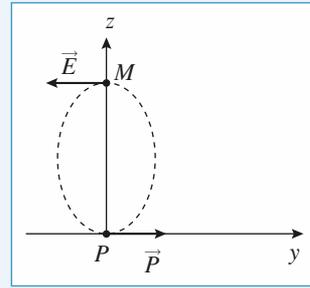
$$\text{Donc } E_x = \frac{-2 \lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 P M^3} \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = \frac{-2 \lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 P M^3} (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{Soit } \vec{E}(M) = \frac{-2 \lambda R^2}{4\pi\epsilon_0 P M^3} (1 - \cos \alpha)$$

$$\text{avec } P M^2 = R^2 + z_M^2.$$

3 • Quand $\alpha \rightarrow 0$ les deux demi-arcs se comportent comme deux charges ponctuelles $+\lambda R \alpha$ et $-\lambda R \alpha$ distantes de $R \alpha$. En un point tel que $z_M \gg R$ ces deux charges apparaissent

comme un dipôle de moment $\vec{p} = (\lambda R \alpha) R \alpha \vec{e}_x = \lambda (R \alpha)^2 \vec{e}_x$. Montrons que le champ trouvé en 2) tend bien vers le champ d'un tel dipôle.



$$\vec{E} = \frac{-\lambda R^2 (1 - \cos \alpha)}{2\pi\epsilon_0 P M^3} \vec{e}_x = \frac{2 \lambda R^2 \left(\frac{\alpha^2}{2}\right)}{4\pi\epsilon_0 P M^3} \vec{e}_x \text{ (d}\ell \text{ au 2}^\circ \text{ ordre de } \cos x)$$

$$= \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 z_M^3} \vec{e}_x = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 z_M^3} \text{ ce qui est bien correct. (} P M \approx z_M \text{ si } z_M \gg R \text{)}$$

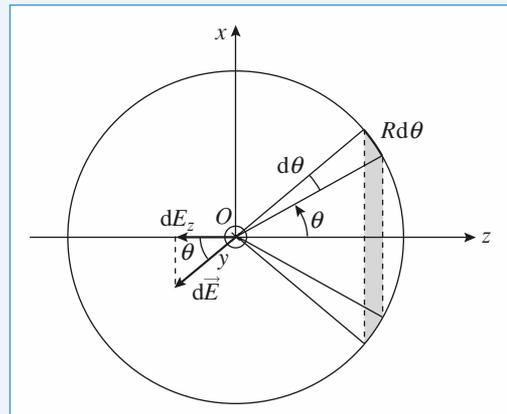
Il en est de même pour le champ $E(0)$. Pour se placer dans l'approximation dipolaire, il faut que $\alpha \ll 1$, soit $R \alpha \ll R$. On a toujours $\vec{p} = \lambda (R \alpha)^2 \vec{e}_x$

$$\vec{E}(0) = - \frac{2 \lambda}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{\alpha^2}{2} \vec{e}_x = \frac{-\lambda (R \alpha)^2 \vec{e}_x}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$= \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \text{ ce qui est encore correct.}$$

5 Passage d'une densité volumique à une densité surfacique

1 •



Tous les plans contenant Oz sont des plans de symétrie des charges donc $\vec{E}(0) = E_z \vec{e}_z$.

La contribution dE_z due aux charges situées entre θ et $\theta + d\theta$ est :

$$dE_z = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma d\Sigma}{R^2} \cos \theta$$

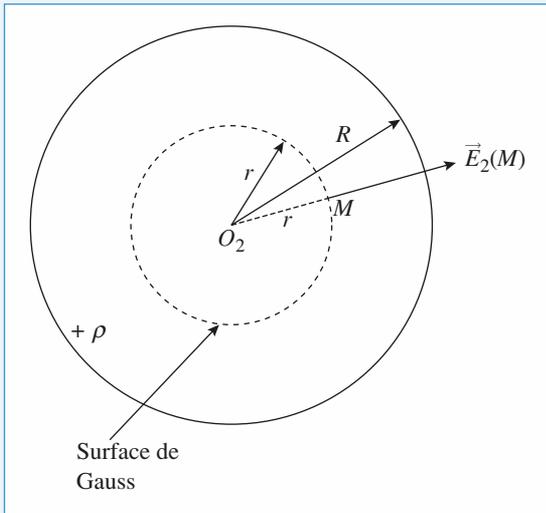
$$\text{avec } d\Sigma = 2\pi R^2 \sin \theta d\theta$$

ce qui donne pour θ variant de 0 à π :

$$E_z = -\frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi R^2}{R^2} \int_0^\pi \sin\theta \cos^2\theta d\theta = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_0^\pi$$

$$\text{soit donc } \vec{E}(0) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z.$$

2 • À l'intérieur de la sphère, \vec{E} est la superposition des champs créés par la sphère « $-\rho$ » de centre O_1 , et la sphère « $+\rho$ » de centre O_2 .



$\vec{E}_2(M)$ à l'intérieur de la sphère de centre O_2 est radial, de la forme $E_2(r) \vec{e}_r$, et s'obtient directement par le théorème de Gauss avec une surface de Gauss sphérique de centre O_2 .

$$E_2(r) 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ soit } E_2(r) = \rho \frac{O_2M}{3\epsilon_0},$$

$$\text{et donc : } \vec{E}_2(M) = \rho \frac{\overrightarrow{O_2M}}{3\epsilon_0}; \text{ de même } \vec{E}_1(M) = -\rho \frac{\overrightarrow{O_1M}}{3\epsilon_0}$$

$$\text{et } \vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\overrightarrow{O_2M} - \overrightarrow{O_1M}) =$$

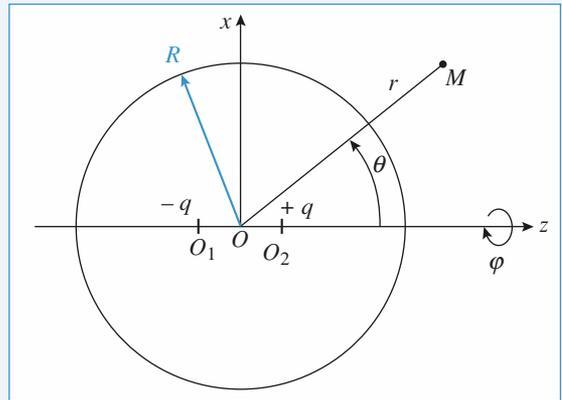
$$\frac{-\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1O_2}$$

$$\text{soit } \vec{E}(M) = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ car } \sigma_0 = \rho \cdot O_1O_2$$

le champ est bien uniforme dans la sphère.

5 • À l'extérieur de la sphère $\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$, le champ à l'extérieur de la sphère chargée $+\rho$ de centre O_2 est le même que celui créé par toute la charge q de la sphère en O_2 , avec $\frac{4}{3} \pi R^3 \rho$.

On obtient donc le système de charges suivant vu de l'extérieur des sphères :



Comme $O_1O_2 = a \ll R$, nous sommes dans l'approximation dipolaire, avec un dipôle de moment

$$\vec{p} = qa \vec{e}_z = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho a \vec{e}_z = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \vec{e}_z,$$

qui crée le potentiel : $V(M) = \frac{\vec{p} \cdot \overrightarrow{OM}}{4\pi\epsilon_0 OM^3}$, soit :

$$V(r, \theta) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} R^3 \frac{\cos\theta}{OM^2} = \frac{\sigma_0 R^3 \cos\theta}{\epsilon_0 r^2}$$

$r > R$

et donc :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{\text{grad}} V = \frac{2\sigma_0}{\epsilon_0} R^3 \frac{\cos\theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} R^3 \frac{\sin\theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

$$\text{ou } \frac{\sigma_0 R^3}{\epsilon_0 r^3} [2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta]$$

6 Dipôles répartis entre deux plans parallèles

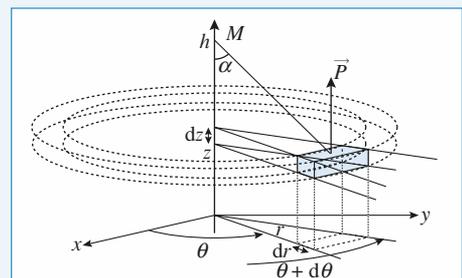
1 • $AM = \frac{r}{\sin\alpha}$. D'après l'expression du potentiel créé par un dipôle :

$$dV = \frac{d p \cos\alpha}{4\pi\epsilon_0 AM^2} = \frac{P d \tau \cos\alpha \sin^2\alpha}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

2 • On suppose $h > \frac{\ell}{2}$. $d\tau = r dr d\theta dz$.

Or $r = \tan\alpha(h-z)$, d'où :

$$dr = \frac{h-z}{\cos^2\alpha} d\alpha \text{ et } dV = \frac{P \sin\alpha}{4\pi\epsilon_0} d\alpha d\theta dz.$$



Pour décrire l'ensemble de la zone contenant les dipôles, il faut faire varier θ entre 0 et 2π , α entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et z entre $-\frac{e}{2}$ et $\frac{e}{2}$.

On obtient donc :

$$V(M) = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi/2} \int_{z=-e/2}^{e/2} \frac{P \sin \alpha}{4\pi \epsilon_0} d\alpha d\theta dz = \frac{Pe}{2\epsilon_0}.$$

Si $h > \frac{e}{2}$, le potentiel $V(M) = \frac{Pe}{2\epsilon_0}$ est uniforme et le champ électrique est nul.

Le potentiel reste défini à une constante additive près. On remarque qu'il n'est pas ici possible de choisir $V = 0$ à l'infini; cela est dû à la présence de dipôles à l'infini.

• Si $h < -\frac{e}{2}$, on peut reprendre le calcul précédent en changeant $\cos \alpha$ en $-\cos \alpha$.

Le potentiel $V(M) = -\frac{Pe}{2\epsilon_0}$ est uniforme et le champ électrique est nul.

• Si $-\frac{e}{2} < h < \frac{e}{2}$, la tranche d'épaisseur $\frac{e}{2} - h$, située « au-dessus » de M , crée en M un potentiel :

$$V_1(M) = -\frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{e}{2} - h \right).$$

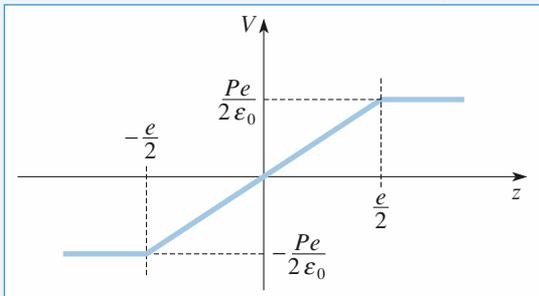
La tranche d'épaisseur $\frac{e}{2} + h$, située « en dessous » de M crée en M un potentiel :

$$V_2(M) = \frac{P}{2\epsilon_0} \left(\frac{e}{2} + h \right).$$

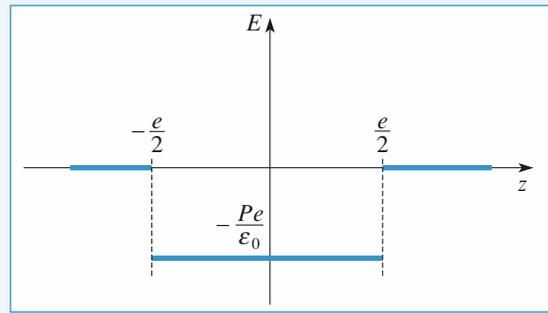
Le potentiel est donc :

$$V(M) = V_1(M) + V_2(M) = \frac{P}{\epsilon_0} h.$$

Le champ électrique est $\vec{E} = -\frac{dV}{dh} \vec{e}_z = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_z$.



Potentiel $V(z)$: on a choisi $V(0) = 0$



Champ électrique : $\vec{E} = E(z) \vec{e}_z$

3 • On sait qu'un plan uniformément chargé avec une densité surfacique uniforme σ créé un champ uniforme :

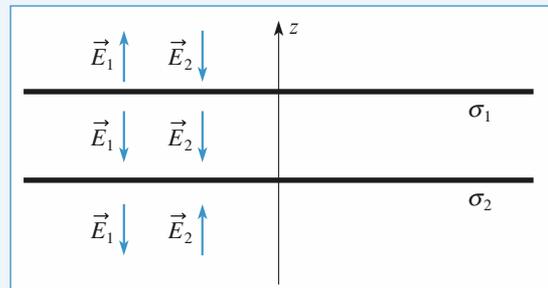
$$\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \text{ « au-dessus » et « en dessous ».}$$

On peut donc obtenir le même champ en tout point à partir de deux plans de charges surfaciques $\sigma_1 = P$ et $\sigma_2 = -P$, de cotes respectives $+\frac{e}{2}$ et $-\frac{e}{2}$.

Ces deux plans forment un condensateur et créent bien un

champ total nul si $|h| > \frac{e}{2}$,

et un champ $-\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_z$ si $|h| < \frac{e}{2}$.



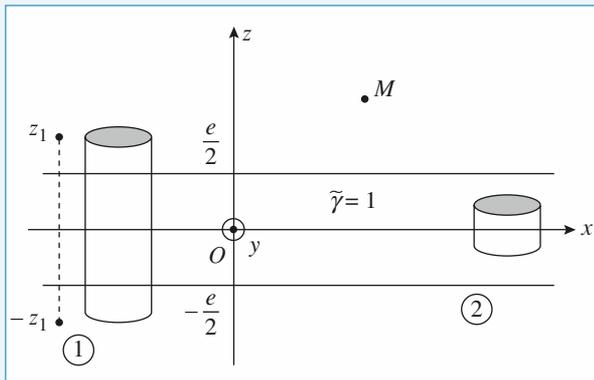
4 • Le potentiel $dV_{(M)}$ créé en M par un dipôle élémentaire $d\vec{p} = \vec{P} d\tau$ situé en A est donné par :

$$dV_{(M)} = \frac{\vec{P} d\tau \cdot \vec{AM}}{4\pi \epsilon_0 AM^3}$$

\vec{P} étant uniforme, cela donne $V(M) = \vec{P} \cdot \vec{E}(M)$

$$\text{avec } \vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \iiint_{\text{volume où existe } \vec{P}} \frac{d\tau \vec{AM}}{AM^3}$$

Ce champ a les caractéristiques, les propriétés d'un champ électrostatique mais n'est pas homogène à un champ électrostatique : ce serait un champ « électrostatique » créé par une densité volumique uniforme de « charge » : « $\tilde{\varphi} = 1$ », φ étant sans dimension !



Le système de « charge » est situé entre les deux plans

$z = -\frac{e}{2}$ et $z = \frac{e}{2}$; il est invariant par translation suivant

x et y donc $\vec{E} = \vec{E}(z)$.

Tous les plans parallèles à \vec{Oz} et passant par M sont des plans de symétrie des charges, donc :

$$\vec{E} = \vec{E}(z) \vec{e}_z$$

Le plan Oxy est un plan de symétrie des charges donc :

$$\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z).$$

L'application du théorème de Gauss à la surface ① de hauteur $2z_1$ donne :

$$\vec{E}(z_1)dS - \vec{E}(-z_1)dS = \frac{e dS}{\epsilon_0} \tilde{\varphi}$$

soit $\vec{E}(z_1) = \frac{e \tilde{\varphi}}{\epsilon_0} \vec{e}_z$, et donc :

$$z > \frac{e}{2} : \vec{E}(z) = \frac{\tilde{\varphi} e}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

$$z < -\frac{e}{2} : \vec{E}(z) = -\frac{\tilde{\varphi} e}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

pour la surface de Gauss ②, cela donne :

$$\vec{E}(z_2)dS - \vec{E}(-z_2)dS = \frac{2z_2 dS}{\epsilon_0} \tilde{\varphi}$$

$$\text{soit } \vec{E}(z_2) = \frac{z_2 \tilde{\varphi}}{\epsilon_0}$$

et donc

$$-\frac{e}{2} < z < +\frac{e}{2} : \vec{E}(z) = \frac{\tilde{\varphi} z}{\epsilon_0} \vec{e}_z$$

On en déduit donc le potentiel $V(M)$ (avec $\tilde{\varphi} = 1$)

$z > \frac{e}{2}$	$V(z) = \frac{Pe}{2\epsilon_0}$ uniforme
$-\frac{e}{2} < z < \frac{e}{2}$	$V(z) = \frac{Pz}{\epsilon_0}$
$z < -\frac{e}{2}$	$V(z) = -\frac{Pe}{2\epsilon_0}$ uniforme

Nous retrouvons bien les mêmes résultats.

7 Interaction circonférence chargée - charge et dipôle

1 • Les charges de la circonférence sont toutes à la même distance du point M à savoir $\sqrt{R^2 + z^2}$: elles créent donc en M un potentiel égal à $\frac{q}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{R^2 + z^2}}$.

La charge $-q$ en A crée un potentiel $\frac{-q}{4\pi \epsilon_0 (z - a)}$ en M .

En M le potentiel total vaut donc

$$\frac{q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{1}{z - a} \right).$$

2 • L'axe Oz est axe de symétrie de la distribution. Donc si la distribution se comporte comme un dipôle, on cherche le potentiel de ce dipôle en un point de son axe de symétrie, d'où $\cos \theta = 1$ dans l'expression générale du potentiel d'un dipôle en coordonnées polaires.

Si z est très grand

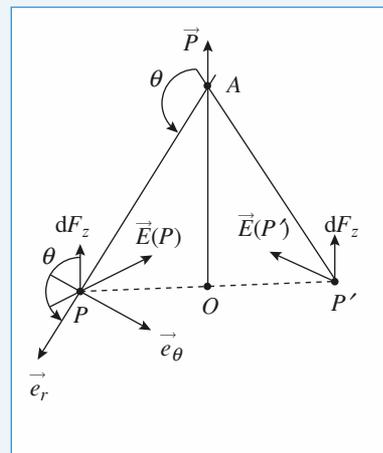
$$\frac{1}{\sqrt{R^2 + z^2}} \sim \frac{1}{z} \left(1 + \left(\frac{R}{z} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} \right)$$

$$\text{et } \frac{1}{z - a} = \frac{1}{z} \left(1 - \frac{a}{z} \right)^{-1} \sim \frac{1}{z} \left(1 + \frac{a}{z} \right)$$

$$\text{d'où } V \sim \frac{q}{4\pi \epsilon_0 z} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} - 1 - \frac{a}{z} \right] \sim \frac{qa}{4\pi \epsilon_0 z^2}$$

au 1^{er} ordre.

3 •



Considérons le champ créé par le dipôle en deux points diamétralement opposés de la circonférence : le plan qui passe par Oz perpendiculaire au diamètre PP' est plan de symétrie : les champs $\vec{E}(P)$ et $\vec{E}(P')$ sont donc symétriques par rapport à Oz (on aurait pu aussi raisonner sur la symétrie des lignes de champ du dipôle).

Les forces qui s'exercent sur les éléments de charge aux points P et P' sont donc également symétriques puisque la charge est uniformément répartie et que $d\vec{F} = dq(P) \vec{E}(P)$.

Le système est invariant par rotation autour de l'axe Oz : on voit bien que les composantes dans le plan de la circonférence s'annulent deux à deux. La résultante des forces que le dipôle exerce sur les charges de la circonférence est donc verticale dirigée vers les $z > 0$

$$\text{et vaut } F_z = \int_{\text{circonférence}} dq E_z = q E_z$$

$$\text{avec } E_z = E_r \cos \theta + E_\theta \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = E_r \cos \theta - E_\theta \sin \theta$$

$$\text{et } E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 PA^3} \quad E_\theta = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 PA^3}$$

il vient

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{2qp \cos^2 \theta}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{qp \sin^2 \theta}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{qp}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= \frac{qp}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ &= \frac{qp}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{3z^2}{R^2 + z^2} - 1 \right) \\ &= \frac{qp}{4\pi \epsilon_0} \frac{(2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

4 • Calculons le champ créé par la circonférence en un point de l'axe :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\text{grad} \left(\frac{q}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \\ &= \frac{-q}{4\pi \epsilon_0} \times \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{2z \vec{e}_z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \left(\frac{qz \vec{e}_z}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \end{aligned}$$

Si le dipôle est situé en z et que son moment vaut $q'd'$ la charge $-q'$ est à la cote $z - \frac{d'}{2}$ et la charge $+q'$ est à

la cote $z + \frac{d'}{2}$

$$\text{alors la charge } -q' \text{ subit la force } \frac{-qq' \left(z - \frac{d'}{2} \right) \vec{e}_z}{4\pi \epsilon_0 \left[R^2 + \left(z - \frac{d'}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{et la charge } +q' \text{ la force } \frac{+qq' \left(z + \frac{d'}{2} \right) \vec{e}_z}{4\pi \epsilon_0 \left[R^2 + \left(z + \frac{d'}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

La force totale qui s'applique sur le dipôle est alors égale à $\vec{F} = F_z \vec{e}_z$ avec :

$$F_z = \frac{qq'}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{z + \frac{d'}{2}}{\left[R^2 + \left(z - \frac{d'}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} - \frac{z - \frac{d'}{2}}{\left[R^2 + \left(z + \frac{d'}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Faisons un développement limité à l'ordre 1 en d' des deux termes, avec $d' \ll z$ et $d' \ll R$.

À l'ordre 1 en d' , cela donne :

$$\begin{aligned} \left[R^2 + \left(z + \frac{d'}{2} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} &= (R^2 + z^2 + zd')^{-\frac{3}{2}} \\ &= (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{zd'}{R^2 + z^2} \right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{zd'}{R^2 + z^2} \right) \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} &\frac{z - \frac{d'}{2}}{\left[R^2 + \left(z - \frac{d'}{2} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{d'}{2z} \right) \left(1 - \frac{3}{2} \frac{zd'}{R^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{z}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{d'}{2z} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2 + z^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{qq'}{4\pi \epsilon_0} \frac{d'}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{3z^2}{R^2 + z^2} \right) \\ &= \frac{qp}{4\pi \epsilon_0} \frac{(R^2 - 2z^2)}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \text{ avec } q'd' = p. \end{aligned}$$

On trouve une force égale mais opposée à celle que le dipôle exerce sur la circonférence, ce qui traduit bien le principe de l'action et de la réaction.

5 • L'énergie potentielle du dipôle soumis au champ de la circonférence est

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E} = \left(\frac{-qpz}{4\pi \epsilon_0 (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)$$

Le dipôle est donc soumis à la force $\vec{F} = -\text{grad} E_p$. Comme E_p ne dépend que de z , on trouve immédiatement que la force est selon \vec{e}_z .

$$\begin{aligned} F_z &= \frac{qp}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - z \times \frac{3}{2} (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \times 2z}{(R^2 + z^2)^3} \right] \\ &= \frac{-qp}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{3z^2 (R^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} - (R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}{(R^2 + z^2)^3} \right] \\ &= \frac{-qp}{4\pi \epsilon_0} (R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \left[\frac{3z^2}{(R^2 + z^2)} - 1 \right] \\ &= \frac{-qp}{4\pi \epsilon_0} \frac{(2z^2 - R^2)}{(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

On comprend bien l'intérêt, ici, de calculer la force à partir de l'énergie potentielle.

6 • Les positions d'équilibre sont données par les extremas de l'énergie potentielle :

on cherche z_{eq} telle que $\left(\frac{dE_p}{dz}\right)_{z_{eq}} = 0$

(ou $F_z = 0$ en $z = z_{eq}$ en d'autres termes !)

D'après ce qui précède on trouve :

$$2z^2_{eq} = R^2 \Leftrightarrow z_{eq} = \pm \frac{R}{\sqrt{2}}$$

7 • Considérons le développement limité à l'ordre 2 de E_p autour de $z = z_{eq}$.

$$E_p \approx E_p(z_{eq}) + \left(\frac{d^2 E_p}{dz^2}\right)_{z_{eq}} \left(\frac{z - z_{eq}}{2}\right)^2$$

puisque $\left(\frac{dE_p}{dz}\right)_{z_{eq}} = 0$

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dz^2}\right)_{z_{eq}} = -\frac{d}{dz}(F_z)$$

$$= \frac{qp}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{4z(R^2 + z^2)^{\frac{5}{2}} - (2z^2 - R^2) \times \frac{5}{2}(R^2 + z^2) \times 2z}{(R^2 + z^2)^5} \right]$$

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dz^2}\right)_{z_{eq}} = \frac{qp}{4\pi\epsilon_0} \times \frac{4z_{eq}}{\left(3\frac{R^2}{2}\right)^{\frac{5}{2}}} \text{ puisque } 2z^2_{eq} = R^2 !$$

si $z_{eq} = -\frac{R}{\sqrt{2}}$ la position d'équilibre est instable

si $z_{eq} = +\frac{R}{\sqrt{2}}$ la position d'équilibre est stable et

$$\left(\frac{d^2 E_p}{dz^2}\right)_{z_{eq}} = k > 0$$

Les petits écarts à la position d'équilibre obéissent à l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\frac{k}{m}$, m étant la masse du dipôle.

Posons $x = z - z_{eq}$; l'équation différentielle d'évolution de x est :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{dE_p(z)}{dz} = -\left(\frac{d^2 E_p}{dz^2}\right)_{z=z_{eq}} x$$

ou encore $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$ dont la pulsation ω_0

d'évolution harmonique (ou sinusoïdale) est $\omega_0^2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

8 *Un modèle de l'action d'un champ électrique uniforme sur une molécule

1 • a) Soit $V_0(M)$ le potentiel associé au champ uniforme \vec{E}_0 .

$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x = -\vec{\text{grad}} V_0$; V_0 ne dépend donc que de la coordonnée cartésienne x , avec $E_0 = -\frac{dV_0}{dx}$; d'où :

$$V_0 = -E_0 x + \text{cte};$$

ou encore, en coordonnées sphériques :

$$V_0 = -E_0 r \cos \theta + \text{cte}.$$

Le potentiel créé par le dipôle est $V_{\text{dipôle}} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Par superposition, le potentiel en M est donc :

$$V(M) = \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} - E_0 r \cos \theta + \text{cte}.$$

b) $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta$; d'où :

$$E_r = \cos \theta \left(\frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} + E_0 \right)$$

$$\text{et } E_\theta = \sin \theta \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \right).$$

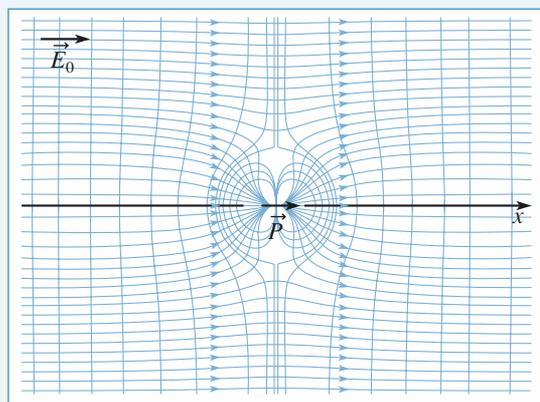
c) $E_\theta = 0$ si $\sin \theta = 0$, soit $\theta = 0$ ou π , c'est-à-dire sur l'axe (Ox) ou si $\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} = E_0$.

La seconde relation conduit à $R = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{\frac{1}{3}}$;

il s'agit, dans le plan du schéma, de l'équation d'un cercle de rayon R ; comme le système est invariant par rotation autour de l'axe (Ox) , la surface Σ recherchée est la réunion d'une **sphère** de centre O et de rayon R , et le plan passant par O perpendiculaire à \vec{p} .

En tout point de Σ , $E_\theta = 0$ et donc $\vec{E} = E_r \vec{e}_r$; \vec{E} est normal à Σ . Comme les surfaces équipotentielles sont les surfaces normales au champ, on peut en déduire que Σ est une surface équipotentielle.

Remarque : Ce résultat se retrouve directement à partir de l'expression de $V(M)$.



Lignes de champ dues à la superposition de \vec{E}_0 et du champ du dipôle.

2 • a) Soit Σ' une surface extérieure à Σ et Φ le flux de \vec{E} à travers Σ' .

- La sphère conductrice possède une charge totale nulle; d'après le théorème de Gauss, $\Phi = 0$.
- Le dipôle possède une charge totale nulle; d'après le théorème de Gauss, $\Phi = 0$.

Vis-à-vis de l'application du théorème de Gauss, les champs créés par les deux systèmes sont bien équivalents à l'extérieur de Σ .

b) • Cas de la sphère conductrice : Le potentiel est uniforme dans un domaine où le champ est nul. V a donc la même valeur en tout point de la sphère conductrice; le potentiel étant une fonction continue des grandeurs d'espace, V est uniforme sur toute la surface Σ considérée comme la limite extérieure de la sphère.

• Cas du dipôle : Le potentiel est uniforme sur toute la surface Σ .

• Conclusion : Du point de vue de la propriété « potentiel uniforme sur Σ », les deux systèmes sont équivalents. On admet que l'équivalence est totale pour tous les points extérieurs à Σ .

c) À l'extérieur de la sphère ($r \approx R^+$), \vec{E} a la même valeur pour les deux systèmes :

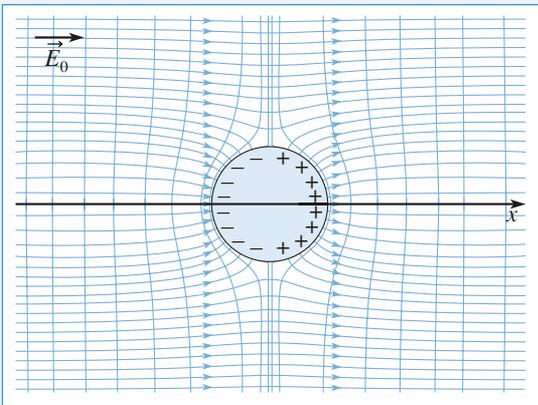
$$E_r = \cos \theta \left(\frac{2p}{4\pi \epsilon_0 r^3} + E_0 \right) \text{ et } E_0 = \frac{p}{4\pi \epsilon_0 R^3}$$

d'où $E_r(R^+) = 3E_0 \cos \theta \vec{e}_r$
 $\vec{E} = 3E_0 \cos \theta \vec{e}_r$.

À l'intérieur de la sphère, $\vec{E} = \vec{0}$.

On sait par ailleurs que la discontinuité du champ est liée à la densité de charges par :

$$\vec{E}(R^+, \theta) - \vec{E}(R^-, \theta) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r.$$



Lignes de champ créées par la sphère conductrice chargée avec σ .

On en déduit que la densité superficielle de charge est $\sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$. D'où $\sigma_0 = 3 \epsilon_0 E_0$.

Si $E_0 > 0$, $\sigma > 0$ sur la demi-sphère $x > 0$, et $\sigma < 0$ sur la demi-sphère $x < 0$. La charge totale est nulle.

3 • a) α rend compte de l'aptitude du nuage électronique de la molécule à se déformer sous l'effet de \vec{E}_0 . C'est la polarisabilité de la distribution de charge. Son unité SI est le m^3 .

• Cette grandeur a été rencontrée dans le cours de chimie; plus le nuage électronique est « diffus », plus il est déformable et plus la molécule est polarisable. L'unité de α est en rapport direct avec cette remarque.

b) On a vu en 2 qu'une sphère conductrice chargée en surface avec $\sigma = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$ se comporte comme un dipôle de moment $\vec{p} = 4\pi \epsilon_0 r^3 \vec{E}_0$ lorsqu'elle est placée dans un champ uniforme \vec{E}_0 . L'atome placé dans \vec{E}_0 voit donc son nuage électronique se déformer et acquiert un moment dipolaire :

$$\vec{p}_i = 4\pi \epsilon_0 r_0^3 \vec{E}_0,$$

soit une polarisabilité $\alpha = 4\pi r_0^3$.

Pour un atome, $r_0 \approx 10^{-10}$ m, et $\alpha \approx 10^{-29}$ m^3 .

α est relié aux caractéristiques géométriques de l'atome.

9 Interaction dipôle permanent - dipôle induit

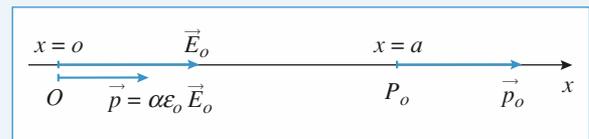
1 • Sachant que $p = qa$, $[p] = QL$.

Sachant que $\vec{E} = \frac{q \vec{OM}}{4\pi \epsilon_0 OM^3}$, $[\epsilon_0 E] = QL^{-2}$

Sachant que $\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$, $[\alpha] = \frac{QL}{QL^{-2}} = L^3$

α est donc homogène à un volume.

2 •



Soit le dipôle \vec{p}_0 en $P_0(x = a)$. Le champ créé en O par ce

dipôle est : $\vec{E}_0 = \frac{2p_0}{4\pi \epsilon_0 a^3} \vec{e}_x$.

En effet, en coordonnées polaires avec origine en $x = a$, le point O se trouve dans la direction $\theta = \pi$, le champ est selon $\vec{e}_r = -\vec{e}_x$ et $\cos \theta = -1$.

Ainsi la molécule polarisable en O acquiert le moment

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 E_0 = \frac{\alpha \epsilon_0 2p_0}{4\pi \epsilon_0 a^3} \vec{e}_x$$

soit $\vec{p} = \frac{2\alpha}{4\pi a^3} \vec{p}_0$.

Remarquons que α est bien homogène à un volume.

3 • Nous connaissons l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle rigide (c'est le cas de \vec{p}_0 ; p n'est pas un dipôle rigide) placé dans un champ permanent (celui créé par \vec{p}). Si \vec{p}_0 est placé en P de coordonnée x , l'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = -\vec{p}_0 \cdot \vec{E} \quad \text{avec} \quad \vec{p}_0 = p_0 \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x \quad \text{le champ créé en}$$

$$P \quad \text{par} \quad \vec{p} = p \vec{e}_x$$

$$E_p = -\frac{2pp_0}{4\pi\epsilon_0 x^3}$$

et la force s'exerçant sur le dipôle \vec{p}_0 situé en $x = a$ est égale à :

$$\vec{F} = (-\text{grad}_{x=a} E_p) = -\frac{6pp_0}{4\pi\epsilon_0 a^4} \vec{e}_x, \quad \text{et en remplaçant } p$$

par son expression :

$$\vec{F} = -\frac{12 \times p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 a^7} \vec{e}_x$$

$$\vec{p} \rightarrow \vec{p}_0$$

Nous aurons de même d'après le principe des actions réciproques :

$$\vec{F} = -\frac{12 \times p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 a^7} \vec{e}_x$$

$$\vec{p}_0 \rightarrow \vec{p}$$

Remarque :

Nous aurions pu faire un calcul direct : notons $\vec{E}(x)$ le champ créé par le dipôle \vec{p} en O :

$$\vec{E}(x) = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 x^3} \vec{e}_x$$

Le dipôle \vec{p}_0 est constitué de 2 charges :

$$\left\{ \begin{array}{l} -q_0 \text{ en } a - \frac{\epsilon}{2} \\ +q_0 \text{ en } a + \frac{\epsilon}{2} \end{array} \right\} \quad \text{avec} \quad q_0 \epsilon = p_0$$

Ce dipôle est donc soumis à 2 forces :

$$\vec{F} = -q_0 \vec{E}\left(a - \frac{\epsilon}{2}\right) + q_0 \vec{E}\left(a + \frac{\epsilon}{2}\right)$$

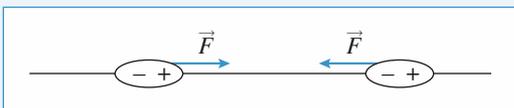
$$= q_0 \left(\frac{d\vec{E}}{dx}\right)_{x=a} \epsilon = p_0 \left(\frac{dE}{dx}\right)_{x=a} \vec{e}_x$$

$$\text{or} \quad \left(\frac{dE}{dx}\right)_{x=a} = \left(\frac{-6p}{4\pi\epsilon_0 x^4}\right)_{x=a} = \frac{-6p}{4\pi\epsilon_0 a^4}$$

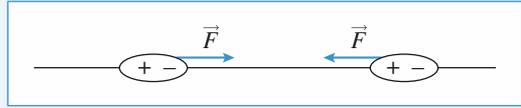
et ainsi $\vec{F} = -\frac{6pp_0}{4\pi\epsilon_0 a^4} \vec{e}_x$, ce qui conduit à nouveau à :

$$\vec{F} = -\frac{12\alpha p_0^2}{16\pi^2 \epsilon_0 a^7} \vec{e}_x$$

4 •

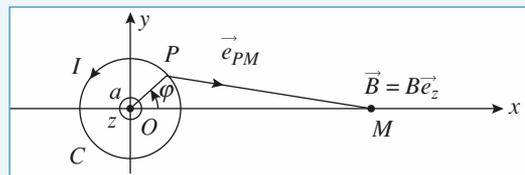


Le dipôle présentant la charge positive vers la molécule polarisable déforme le nuage en attirant les électrons, entraînant l'attraction entre les charges de signes contraires.



Si le dipôle présente la charge < 0 vers la molécule polarisable, le nuage se déforme en repoussant les électrons, entraînant l'apparition de charges positives, par défaut, vers le dipôle permanent : il y a encore attraction entre charges de signes contraires.

10 Champs magnétiques en un point du plan d'une spire



$$1 \bullet \vec{B}(M) = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi} d\vec{P} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} \quad \text{est porté par } (Oz)$$

(le plan xOy est un plan de symétrie des courants)

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} a \cos \varphi \\ a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{PM} = \begin{pmatrix} x - a \cos \varphi \\ -a \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}; \quad d\vec{P} = \begin{pmatrix} -a \sin \varphi d\varphi \\ a \cos \varphi d\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons

$$d\vec{P} \wedge \frac{\vec{PM}}{PM^3} = \frac{a \cos \varphi (a \cos \varphi - x) + (a \sin \varphi)^2}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \vec{e}_z$$

puis

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi x^3} \vec{e}_z F(u) = \int_0^{2\pi} \frac{u^2 - u \cos \varphi}{(1 - 2u \cos \varphi + u^2)^{\frac{3}{2}}} d\varphi$$

2 • En se limitant aux termes en u^2 :

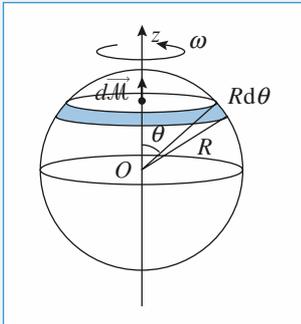
$$F(u) = \int_0^{2\pi} [-u \cos \varphi + u^2(I - 3 \cos^2 \varphi)] d\varphi = -\pi u^2$$

$$\text{soit} \quad \vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I \pi a^2}{4\pi x^3} \vec{e}_z = -\frac{\mu_0 M}{4\pi x^3} \vec{e}_z$$

Ce qui correspond bien au cas du dipôle ($\theta = \frac{\pi}{2}$).

11 Champ magnétique créé par une sphère chargée en rotation

1 • Les charges, solidaires de la sphère en mouvement créent des courants circulaires selon les parallèles de la sphère :



Utilisons les coordonnées sphériques d'axe (Oz) et découpons la sphère en spires de largeur $Rd\theta$. L'intensité parcourant cette spire, associée au mouvement de rotation, est, en comptant la charge traversant une section droite $Rd\theta$ par unité de temps (cf. ex. 7, chap. 2) :

$$dI = \frac{q\omega \sin\theta d\theta}{4\pi}$$

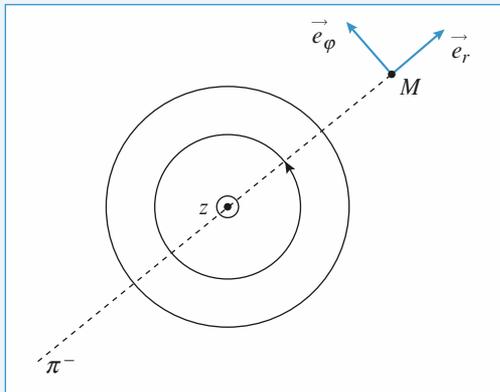
Le moment élémentaire $d\vec{M}$ associé à cette spire est $d\vec{M} = \pi R^2 \sin^2\theta dI \vec{e}_z$, soit :

$$d\vec{M} = \frac{\omega q}{4} R^2 \sin^3\theta d\theta \vec{e}_z$$

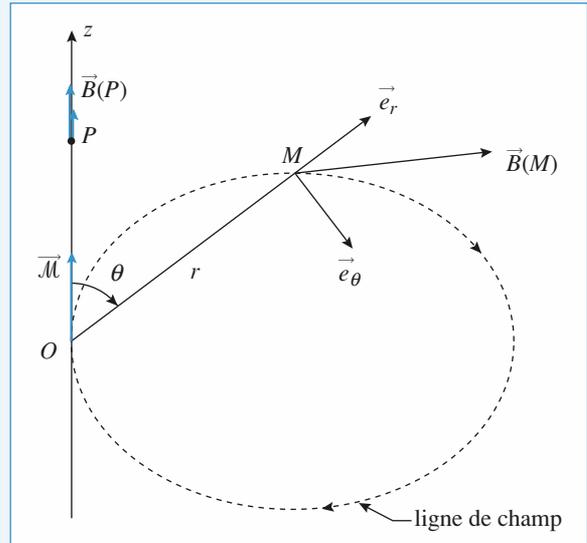
Comme $\int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$, le moment résultant est :

$$\vec{M} = \frac{\omega q R^2}{3} \vec{e}_z$$

2 • Tous les plans (\vec{e}_r, \vec{e}_z) sont plans d'antisymétrie de la distribution de courants : le champ \vec{B} appartient à ces plans il n'a donc pas de composante selon \vec{e}_φ :



3 • a)



Les composantes de $\vec{B}(M)$ sont :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} 2M \cos\theta \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi r^3} M \sin\theta \vec{e}_\theta$$

b) En un point P de l'axe $Oz(\overline{OP} = z)$:

$$z > 0 : \vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{z^3} \vec{e}_z \text{ (car } \vec{e}_r = \vec{e}_z, \theta = 0 \text{ et } r = z)$$

$$z < 0 : \vec{B}(P) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{z^3} \vec{e}_z \text{ (car } \vec{e}_r = -\vec{e}_z, \theta = \pi \text{ et } r = -z)$$

or $M = \frac{\omega q R^2}{3}$ d'où, pour $z > 0$

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0 \omega q R^2}{6\pi z^3} \vec{e}_z \text{ : on retrouve bien le résultat obtenu à l'ex. 7 du chap. 2.}$$

12 Champ magnétique créé par un solénoïde dans l'approximation dipolaire

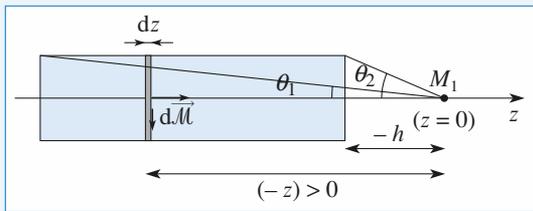
1 • Une spire possède un moment magnétique $\vec{m} = IS \vec{e}_z$.

Entre z et $z + dz$ il y a $\frac{N}{\ell} dz$ spires qui contribuent donc au moment magnétique total pour

$$d\vec{M} = \frac{N}{\ell} dz \vec{m}$$

Cette tranche élémentaire possède donc un moment magnétique élémentaire $d\vec{M} = NIS \frac{dz}{\ell} \vec{e}_z$.

2 •



On suppose M_1 « à droite » du solénoïde, comme sur la figure, et on fixe en M_1 l'origine des z . La **distance** entre la spire et M_1 est alors égale à $(-z)$. Si on utilise l'expression du champ créé par un dipôle magnétique ($h \gg a$) en coordonnées polaires, on a alors $r = -z$, $\theta = 0$ et $\vec{e}_r = \vec{e}_z$ et le champ créé en M_1 par la tranche de cote z a pour expression :

$$d\vec{B} = 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{M}}{(-z)^3} = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi \ell (-z)^3} dz \vec{e}_z.$$

Le champ total est obtenu par intégration : $\vec{B}(M_1) = \int_{z=-(h+\ell)}^{-h} d\vec{B}$

$$\text{soit : } \vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 N I S}{4\pi \ell} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{(h+\ell)^2} \right) \vec{e}_z.$$

Si M_1 est « à gauche » du solénoïde, on a alors :

$$r = +z, \cos\theta = -1 \text{ et } \vec{e}_r = -\vec{e}_z.$$

L'expression finale de $\vec{B}(M_1)$ est inchangée, ce qui est en accord avec le fait que le plan médian perpendiculaire à l'axe Oz du solénoïde est un plan de symétrie pour les courants.

Dans le cas particulier du solénoïde à section circulaire de rayon R , $S = \pi R^2$ et la valeur approchée du champ en M_1 est :

$$\vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 N I}{4\ell} \left(\frac{R^2}{h^2} - \frac{R^2}{(h+\ell)^2} \right) \vec{e}_z$$

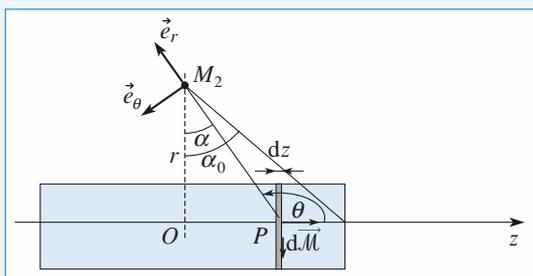
$$\vec{B}(M_1) = \frac{\mu_0 N I}{4\ell} (\tan^2 \theta_2 - \tan^2 \theta_1) \vec{e}_z.$$

À grande distance, θ_1 et θ_2 tendent vers 0, et à l'ordre 2 en θ_1 , et θ_2 , on a :

$$\cos\theta_1 - \cos\theta_2 \approx \frac{1}{2}(\theta_2^2 - \theta_1^2) \approx \frac{1}{2}(\tan^2 \theta_2 - \tan^2 \theta_1).$$

La valeur approchée et la valeur exacte sont bien équivalentes à grande distance.

3 •



Le plan passant par M_2 et perpendiculaire à Oz est un plan de symétrie des courants, donc \vec{B} est orthogonal à ce plan :

$$\vec{B}(M_2) = B_z \vec{e}_z.$$

On place cette fois l'origine O des coordonnées dans le plan de symétrie.

La tranche de cote z se comporte comme un dipôle ($r \gg a$) et crée en M_2 un champ :

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 N I S dz}{4\pi \ell P M_2^3} (2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta).$$

Avec les notations précisées sur le schéma :

$$P M_2 = \frac{r}{\cos\alpha}; z = r \tan\alpha, \text{ d'où } dz = \frac{r}{\cos^2\alpha} d\alpha; \theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$(2 \cos\theta \vec{e}_r + \sin\theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = 2 \sin^2\alpha - \cos^2\alpha.$$

On ne calcule que la composante dB_z :

$$dB_z = \frac{\mu_0 N I S \cos\alpha d\alpha}{4\pi \ell r^2} (2 \sin^2\alpha - \cos^2\alpha).$$

Par intégration $\vec{B} = \int_{\alpha=-\alpha_0}^{\alpha_0} dB_z \vec{e}_z$,

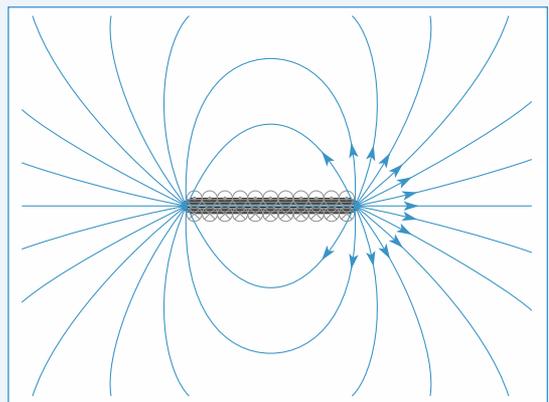
$$\text{soit : } \vec{B} = \frac{\mu_0 N I S}{2\pi \ell r^2} (\sin^3\alpha_0 - \sin\alpha_0) \vec{e}_z.$$

$$= \frac{\mu_0 N I S}{2\pi \ell r^2} \sin\alpha_0 (-\cos^2\alpha_0) \vec{e}_z.$$

$$= -\frac{2\mu_0 N I S}{\pi (4r^2 + \ell^2)^{3/2}} \vec{e}_z.$$

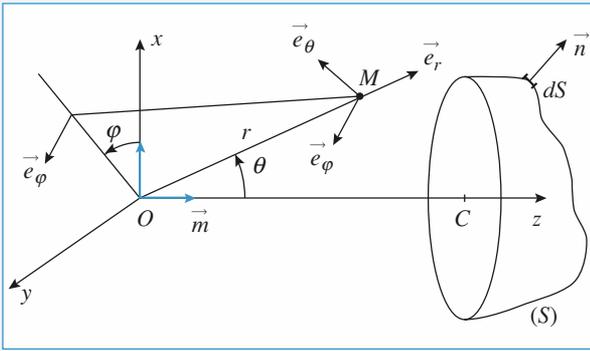
Si $\ell \ll r$, le solénoïde se comporte comme un dipôle de moment magnétique NIS .

Si $\ell \gg r$, on retrouve le modèle du solénoïde infiniment long, pour lequel le champ \vec{B} est nul à l'extérieur.



13 Flux d'une petite spire à travers une grande spire

1 • Soit une spire de rayon R d'axe Oz , de centre C et un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m} = m \vec{e}_z = I \pi a^2 \vec{e}_z$ placé en O . On pose $OC = d$.



Doc. 1

Calculons le flux de \vec{B} créé par le dipôle à travers la spire avec les orientations choisies sur le schéma (doc. 1).

Choisissons une surface (S) quelconque s'appuyant sur la spire : en effet \vec{B} étant un vecteur à flux conservatif, le résultat est donc indépendant de la surface (S) mais ne dépend que du contour (Γ) sur lequel elle s'appuie.

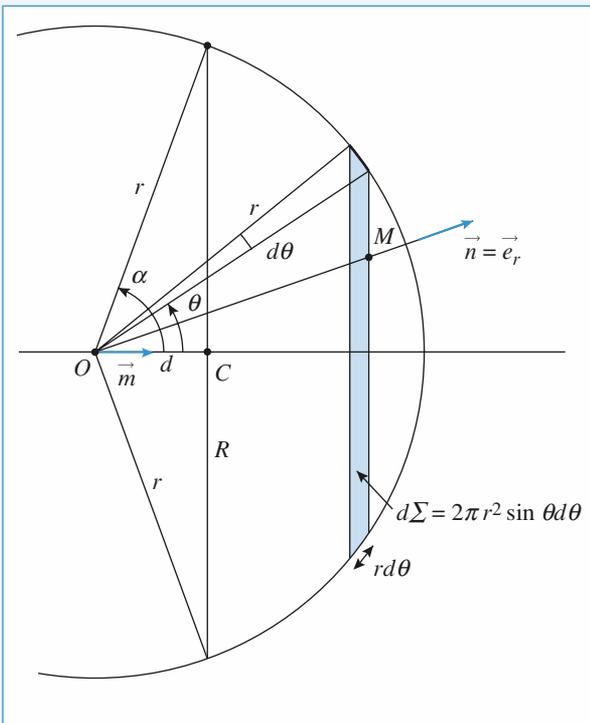
Soit un point M de l'espace repéré en coordonnées sphériques : $M(r, \theta, \varphi)$. Nous savons que le champ magnétique créé par un dipôle magnétique placé en O (avec $\vec{m} = m \vec{e}_z$) est :

$$\vec{B}(r, \theta, \varphi) = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta$$

Nous devons calculer l'intégrale suivante :

$$\Phi = \iint_S \left(\frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^3} \vec{e}_\theta \right) \cdot \vec{n} \, dS.$$

Premier choix de surface



Choisissons une surface telle que $\vec{e}_\theta \cdot \vec{n} = 0$ et $\vec{e}_r = \vec{n}$, c'est-à-dire une surface sphérique de centre O s'appuyant sur la spire de rayon R ; ainsi $r = (R^2 + d^2)^{\frac{1}{2}} = \text{constante}$.

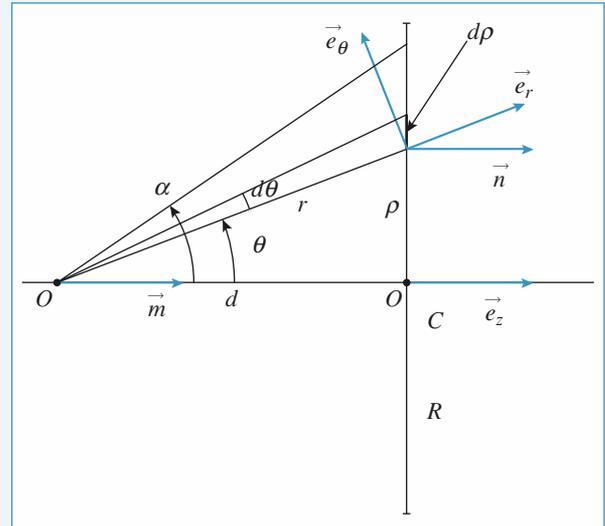
La surface $d\Sigma$ vue sur la sphère entre θ et $\theta + d\theta$ est : $d\Sigma = 2\pi r^2 \sin \theta \, d\theta$, et ainsi

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} 2\pi r^2 \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= \frac{\mu_0 m}{2r} \sin^2 \alpha = \frac{\mu_0 m R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ car } \sin \alpha = \frac{R}{r} ; \end{aligned}$$

soit $\Phi = \frac{\mu_0 I \pi a^2 R^2}{2(R^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Second choix de surface

Prenons la surface plane de la spire :



Doc. 2

Avec les notations du doc. 2 ci-dessus :

$$d\Phi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m}{r^3} 2\pi \rho \, d\rho (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta) \cdot \vec{n}$$

avec $\vec{n} = \vec{e}_z$; $\vec{e}_r \cdot \vec{n} = \cos \theta$; $\vec{e}_\theta \cdot \vec{n} = -\sin \theta$; $\cos \theta = \frac{d}{r}$

$$\tan \theta = \frac{\rho}{d}, \text{ ce qui donne } \rho = d \tan \theta \text{ et}$$

$$d\rho = + \frac{d}{\cos^2 \theta} \, d\theta ;$$

$$\begin{aligned} d\Phi &= \frac{\mu_0}{4\pi} m \frac{\cos^3 \theta}{d^3} \times 2\pi d \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \frac{d}{\cos^2 \theta} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{m}{d} (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \theta \, d\theta \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{m}{d} (3 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \, d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_0^\alpha d\Phi = \frac{\mu_0 m}{2d} [-\cos^3 \theta + \cos \theta]_0^\alpha \\ &= \frac{\mu_0 m}{2d} (\cos \alpha - \cos^3 \alpha) = \frac{\mu_0 m}{4\pi d} \sin^2 \alpha \cos \alpha \end{aligned}$$

Sachant que $\sin \alpha = \frac{R}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$ et $\cos \alpha = \frac{d}{(d^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}}$,

nous avons :

$$\Phi = \frac{\mu_0 m}{2d} \frac{R^2 d}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 m R^2}{2(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et donc : $\Phi = \frac{\mu_0 I \pi a^2 R^2}{2(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$

Le résultat est bien le même, mais le calcul beaucoup plus laborieux...

LES OBJECTIFS

- Mouvements de particules chargées dans \vec{E} ou \vec{B} .
- Force de Laplace.
- Effet Hall.
- Loi d'Ohm locale.

LES PRÉREQUIS

- Champ \vec{E} et \vec{B} .
- Mécanique du point matériel.

LES OUTILS MATHÉMATIQUES

- Nombres complexes.
- Résolution d'équations différentielles.
- Produit vectoriel.

ESSENTIEL

◀ La force de Lorentz

La force subie par une particule de charge q , de masse m , se trouvant à l'instant t au point M d'un référentiel galiléen \mathcal{R} , en présence d'un champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et dans un champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ est :

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(M, t) + \vec{v}(M, t)_{/\mathcal{R}} \wedge \vec{B}(M, t) \right),$$

où $\vec{v}(M, t)_{/\mathcal{R}}$ est la vitesse de la particule dans le référentiel \mathcal{R} .

Cette force est appelée « force de Lorentz ». La force gravitationnelle est pratiquement toujours négligeable devant la force de Lorentz.

La partie magnétique de la force de Lorentz $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ est orthogonale à la vitesse donc au déplacement : sa puissance est nulle, et donc son travail est nul ; elle ne peut que dévier les particules.

Donc l'énergie cinétique d'une particule soumise uniquement à un champ magnétique est constante, la norme de la vitesse ne varie donc pas au cours du mouvement.

Si la particule est soumise aussi à un champ électrique \vec{E} , le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\mathcal{E}_K + qV = \text{cte},$$

où V est le potentiel électrostatique associé à \vec{E} ($\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$).

◀ Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme et constant

La force qui agit sur la particule est $\vec{F}_e = q\vec{E}$, elle est constante : le mouvement de la particule est formellement identique à celui d'un point matériel dans le champ de pesanteur terrestre uniforme. Le rôle du champ électrique est, en général, d'accélérer les particules chargées.

◀ Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme et constant

- Le mouvement le plus général est hélicoïdal, composition d'un mouvement rectiligne uniforme le long de la direction du champ magnétique et d'un mouvement circulaire uniforme dans un plan orthogonal au champ magnétique.
- Dans le cas particulier où la vitesse initiale est orthogonale au champ magnétique, le mouvement est un cercle de rayon $R = \frac{mv_0}{|q|B}$ parcouru à la vitesse angulaire $\omega_c = \frac{|q|B}{m}$, appelée « pulsation cyclotron ».

◀ Mouvement d'ensemble, loi d'Ohm locale

- La loi d'Ohm est relative au transport du courant dans la matière : sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , les porteurs de charges mobiles se déplacent à l'intérieur d'un réseau ; ils ont un mouvement d'ensemble caractérisé par le vecteur vitesse \vec{v} (vitesse moyenne des porteurs ou vitesse de dérive).
- Le vecteur densité volumique de courant électrique \vec{j} est défini par $\vec{j} = nq\vec{v}$, où n représente le nombre moyen de porteurs de charges mobiles par unité de volume et q la charge de chacun des porteurs.

Le flux de \vec{j} à travers une surface \mathcal{S} , $\iint_{M \in \mathcal{S}} \vec{j}(M) d\vec{S}_M$, représente la charge qui traverse \mathcal{S} par unité

de temps, c'est l'intensité du courant électrique à travers cette surface.

Attention : j , la densité volumique de courant s'exprime en A.m^{-2} (et non en A.m^{-3} !).

Sous l'action d'un champ électrique \vec{E} , la vitesse d'ensemble des porteurs de charge (q, m) est donnée par :

$$\vec{v} = \mu \vec{E},$$

où μ est la mobilité des porteurs (μ et q ont le même signe).

- Dans un modèle microscopique simple, où on assimile l'effet des chocs exercés par le réseau sur les porteurs mobiles (collisions) à celui d'une force de frottement fluide $\vec{f} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$, la mobilité est égale à $\mu = q \frac{\tau}{m}$ (τ est le temps de relaxation de conduction, il est lié au temps moyen entre deux chocs consécutifs subis par un électron de conduction).

Le vecteur densité volumique de courant \vec{j} est relié au champ électrique appliqué (qui est la cause du courant électrique) par la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

où γ est la conductivité électrique du milieu, son expression est $\gamma = nq^2 \frac{\tau}{m}$. Elle s'exprime en S.m^{-1} ou encore en $\Omega^{-1}.\text{m}^{-1}$. Pour un bon métal conducteur (le cuivre, par exemple) elle est de l'ordre de 10^7 à 10^8 S.m^{-1} . (Dans ces conditions $\tau \approx 10^{-14} \text{ s}$.)

Remarque : La loi d'Ohm pour les métaux reste valable pour des courants de fréquences hertziennes et industrielles (inférieures à 10^{14} Hz environ) ; cette propriété sera justifiée en seconde année.

Effet Hall (PCSI)

- La généralisation de la loi d'Ohm locale lorsque le conducteur est placé dans un champ électrique \vec{E} et dans un champ magnétique \vec{B} s'écrit :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} + R_H (\vec{j} \wedge \vec{B}),$$

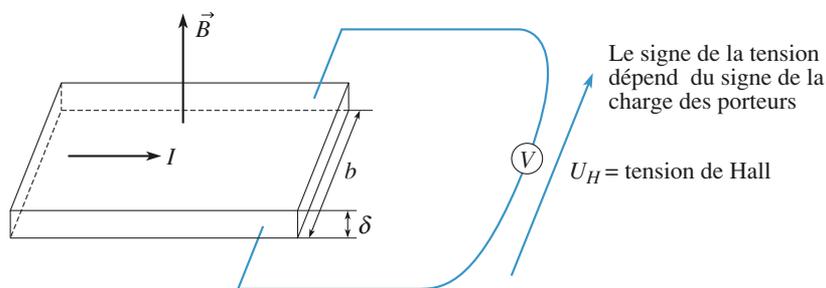
où R_H est la constante de Hall, égale à $\frac{1}{nq}$.

Dans les conducteurs usuels on peut négliger le 2^e terme en $R_H(\vec{j} \wedge \vec{B})$ devant $\gamma \vec{E}$.

Dans un semi-conducteur ces deux termes peuvent être du même ordre de grandeur.

- Dans le cas d'un conducteur filiforme et rectangulaire, d'épaisseur δ , de largeur b , parcouru dans le sens de sa longueur par un courant d'intensité I , il apparaît, en régime permanent, une différence de potentiel entre les faces arrière et avant du conducteur, appelée « tension de Hall », égale à :

$$U_H = \frac{BI}{nq\delta}.$$



Force de Laplace (PCSI)

La force de Laplace à laquelle est soumis un élément de longueur $d\ell$ d'un conducteur filiforme parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique \vec{B} est donné par :

$$d\vec{F} = I d\vec{\ell} \wedge \vec{B},$$

avec $d\vec{\ell} = d\ell \vec{\tau}$, $\vec{\tau}$ étant un vecteur unitaire tangent à l'élément de conducteur, dirigé selon le sens choisi pour repérer le courant.

- Pour une portion AB d'un circuit (C) , la force de Laplace s'écrit :

$$\vec{F} = \int_A^B I d\vec{\ell}_M \wedge \vec{B}(M).$$

La résultante des forces s'exerçant sur un circuit fermé placé dans un champ magnétique uniforme est nulle.

Conseils et pièges à éviter

- Une particule en mouvement dans un champ magnétique permanent possède une énergie cinétique constante. Le module de sa vitesse est constant.
- Dans un champ magnétique uniforme B , la projection du mouvement d'une particule (q, m) dans un plan perpendiculaire à ce champ est toujours un cercle de rayon $R = \frac{mv}{qB}$, où $v = |\vec{v}|$ est le module de la vitesse.
- Dans un champ électromagnétique permanent défini par \vec{E} et \vec{B} , la vitesse de dérive de particules $\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$ est indépendante de la charge des particules.
- Pour établir correctement les équations différentielles du mouvement, se souvenir que le vecteur vitesse évolue.

1 Accélération d'une particule chargée par une différence de potentiel

Une particule de charge q , de masse m , de vitesse initiale nulle, issue d'un point O , est accélérée par une différence de potentiel V_0 établie entre deux grilles planes parallèles distantes de $L = 5 \text{ cm}$.

1 • Exprimer la vitesse v de la particule au moment de son passage à travers la deuxième grille. Quels sont les signes respectifs possibles de q et de V_0 si la particule est un électron ?

2 • Calculer numériquement v :

a) $V_0 = 100 \text{ V}$, $q = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ (électron);

b) $V_0 = -3\,000 \text{ V}$, $q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et $m = 6,64 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$ (ion argon).

Conseils

Utiliser la conservation de l'énergie de la particule. La force électrique est dirigée dans le sens des potentiels décroissants si et seulement si q est positive. En effet le champ électrique \vec{E} est toujours orienté vers les potentiels décroissants.

2 Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

Un électron (de masse m et de charge $-e$) se déplace sous l'action d'un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

Il se trouve à $t = 0$ au point O avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

1 • Montrer que l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon ρ_c , à la vitesse angulaire ω_c .

2 • Établir les expressions de ρ_c et de ω_c en fonction des données.

3 • Calculer la fréquence ν_c associée à ω_c et le rayon ρ_c .
Données: L'énergie cinétique de l'électron est $\mathcal{E}_K = 5,1 \cdot 10^{-3} \text{ eV}$, sa masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, sa charge $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, le champ magnétique vaut $B_0 = 0,55 \text{ T}$.

Conseils

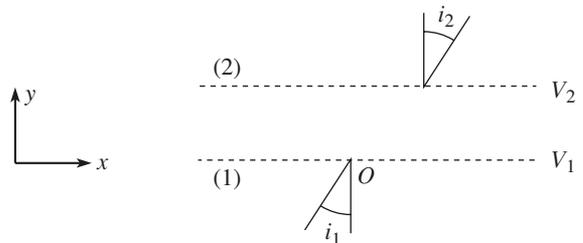
1) Quelles sont les propriétés d'un mouvement circulaire uniforme ?

2) L'électron étant dévié, le vecteur vitesse ne reste pas selon \vec{e}_x . Le vecteur vitesse a donc deux composantes à un instant quelconque. Il faut projeter le principe fondamental de la dynamique sur \vec{e}_x et \vec{e}_y . On adopte ensuite soit une méthode de substitution pour déterminer v_x et v_y ou on se ramène à une équation différentielle du 1^{er} ordre à une variable μ , en posant $\mu = v_x + i v_y$.

Une fois v_x et v_y déterminés à l'aide des conditions initiales on intègre une nouvelle fois pour trouver x et y .

3 Déviation d'un électron

Les grilles (1) et (2) sont portées aux potentiels $V_1 = 0$ et $V_2 = U$. Entre les grilles, que l'on considère d'extension spatiale infinie, le champ électrique est uniforme. Un électron de masse m arrive en O avec une vitesse de norme v_1 , sous l'incidence i_1 .



1 • Calculer la norme de sa vitesse v_2 , quand il arrive sur (2), en fonction de U , v_1 , m et e , où e désigne la charge élémentaire.

2 • À quelle condition l'électron atteint-il la grille (2) ?

3 • Quelle relation lie i_2 à i_1 ?

Conseils

1) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique ou la conservation de l'énergie mécanique.

2) Dans la mesure où l'on considère les plaques infinies, c'est la composante v_y de la vitesse de l'électron qui importe dans cette question: il ne faut pas que la vitesse v_y s'annule avant que l'électron ait atteint (2).

Conseils

La force qui s'exerce sur l'électron entre les grilles n'a pas de composante selon \vec{e}_x : quelle en est la conséquence sur la composante selon x de la vitesse de l'électron ?

On pourra examiner les cas $U > 0$ et $U < 0$.

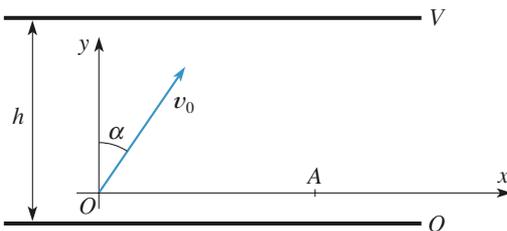
3) L'angle d'incidence est déterminé par la direction du vecteur vitesse de l'électron qui dépend de l'importance relative de ses composantes.

4 Particule chargée dans un condensateur

D'après ENSET A3.

Une particule de masse m et de charge q est lancée avec une vitesse initiale \vec{v}_0 en un point O situé entre les armatures d'un condensateur plan.

\vec{v}_0 est situé dans un plan perpendiculaire aux armatures et fait un angle α avec la direction du champ \vec{E} uniforme. La totalité de la portion de trajectoire étudiée est située à l'intérieur du condensateur.



1 • La différence de potentiel V et la distance h entre les armatures ont été choisies de manière que la trajectoire recoupe l'axe (Ox) , en un point A .

Calculer l'abscisse du point A . Indiquer les signes respectifs de q et V .

On rappelle que le champ électrique à l'intérieur du condensateur plan est uniforme et vaut $\vec{E} = -\frac{V}{h}\vec{e}_y$.

2 • Montrer que pour un pinceau de faible ouverture $\Delta\alpha$, constitué de particules identiques issues du même point O et lancées avec une vitesse de norme v_0 au voisinage d'une direction particulière $\alpha = \alpha_0$, les trajectoires se recoupent toutes en un même point d'abscisse x_0 . Calculer α_0 et x_0 .

3 • Le pinceau de particules lancées en O , au voisinage de α_0 , est constitué maintenant de deux types de particules de masse m_1 et m_2 , de même charge q et de vitesse initiale de norme v_0 .

Calculer v_0 pour que les intersections A_1 et A_2 soient distantes de 1 cm dans le cas où les particules sont des ions argon, portant tous la charge $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C et obtenus à partir des deux isotopes de l'argon de nombre de masse 38 et 40.

Données : $V = 1\,000$ V, $h = 10$ cm. On rappelle la valeur du nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ mol $^{-1}$.

Conseils

1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique et la projeter sur les axes (Ox) et (Oy) . Intégrer les équations du mouvement en tenant compte des conditions initiales.

2) Assimiler la dérivée $\frac{dx_A}{d\alpha}$ au rapport des petites variations $\frac{\Delta x_A}{\Delta\alpha}$.

Cet exercice se traite comme l'étude du mouvement d'un point matériel dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme (tir balistique).

5 Mouvement d'une particule dans le champ d'un fil infini chargé (oral)

Un fil infini, chargé uniformément avec $\lambda > 0$, est confondu avec l'axe Oz . Une particule P , de masse m , de charge $-q$ avec $q > 0$, repérée par ses coordonnées cylindriques, se trouve à $t = 0$ en $r = r_0$, $\theta = 0$, $z = 0$ avec une vitesse dont les coordonnées sont

$$\dot{r} = 0; \quad r\dot{\theta} = v_0; \quad \dot{z} = 0.$$

On introduit $\alpha = \sqrt{\frac{\lambda q}{2\pi \epsilon_0 m}}$ et $\beta = \frac{v_0}{\alpha}$.

1 • Retrouver rapidement le champ d'un fil uniformément chargé λ .

2 • Quelles sont les dimensions de α et β ?

3 • Montrer que le mouvement est plan et obéit à la loi des aires. Quelle approximation usuelle a-t-on faite pour arriver à cette conclusion ?

4 • Représenter l'allure du début de la trajectoire ainsi que les vecteurs de base polaire, la vitesse de P et son accélération.

5 • Trouver une relation entre v^2 , β et r .

6 • En déduire que \dot{r}^2 vérifie $\dot{r}^2 + v_0^2 U(r) = 0$, et donner l'expression de $U(r)$.

7 • Tracer l'allure de $U(r)$. En déduire l'évolution de la particule.

Conseils

- 1) C'est du cours incontournable !!
- 2) $\frac{\lambda q}{2\pi \epsilon_0}$ est homogène à une énergie potentielle puisque λ est une charge linéique (on pourra aussi utiliser l'expression précédente de E), le reste suit.
- 3) Il est facile de justifier ici, par des raisons de symétrie, que le mouvement est à force centrale, qui possède donc ses deux caractéristiques : mouvement plan et loi des aires.
- 4) Dès qu'il s'agit de v et à plus forte raison de v^2 , il faut penser à appliquer le théorème de l'énergie cinétique.
- 5) La vitesse v ne se réduit pas à sa composante radiale; mais on «élimine» facilement la composante orthoradiale, qui dépend de $\frac{d\theta}{dt}$, en utilisant la

loi des aires.

- 6) i^2 est nécessairement positif: les seules valeurs possibles pour $U(r)$ sont donc négatives. On en déduit la nature des trajectoires selon les valeurs de α et β en suivant le raisonnement vu dans le problème à deux corps.

6 Cyclotron

D'après Concours Communs Polytechnique.

On étudie un cyclotron destiné à accélérer des protons. Les protons sont injectés au centre avec une énergie cinétique négligeable. Un générateur permet d'appliquer entre les dees une tension alternative à haute fréquence :

$u_c = U_c \sin(\omega t + \varphi)$, créant un champ électrique uniforme,

$$\vec{E} = \frac{u_c}{g} \vec{e}_x.$$

On admettra que les protons sont accélérés une première fois sur la distance g avant de décrire le premier demi-cercle.

- 1 • Sachant que la masse du proton est m_p et sa charge $+e$, calculer la fréquence ν_c du champ électrique.

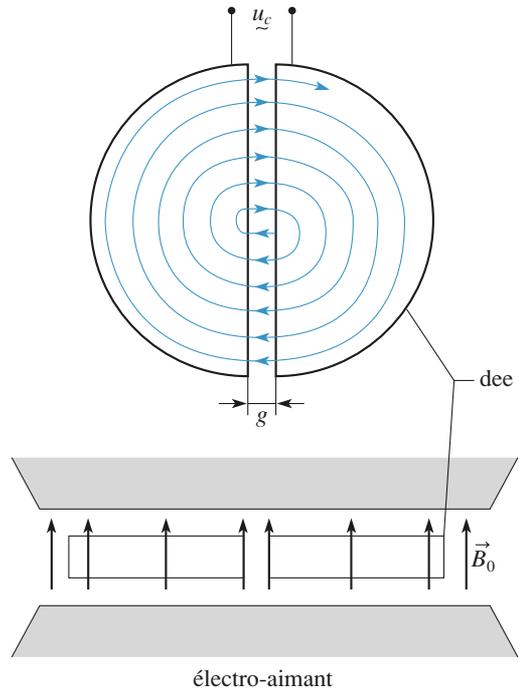
Données : $m_p = 1,6 \cdot 10^{-27}$ kg ; $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $B_0 = 1,5$ T.

- 2 • En négligeant l'épaisseur g de l'espace accélérateur, calculer le rayon r_n du $n^{\text{ième}}$ demi-cercle décrit par les protons. On suppose qu'à la sortie de la source, ils traversent l'espace accélérateur lorsque $u_c = U_c$.

Données : $U_c = 50$ kV ; $n = 400$.

- 3 • En réalité les protons traversent le plan médiateur de l'espace accélérateur à un instant t_c tel que $\omega t_c = 0$ à π

près et avec une phase ϕ_0 . Cet espace a une largeur g de l'ordre de 1 cm, et il est nécessaire de tenir compte, au cours de sa traversée, de la variation du champ accélérateur.



- a) Montrer que le gain en énergie pour une orbite située à une distance r du centre du cyclotron est :

$$W = eU_c \frac{\sin\left(\frac{g}{2r}\right)}{\frac{g}{2r}} \sin \phi_0,$$

en admettant que, dans l'espace accélérateur :

$\left(-\frac{g}{2} \leq x \leq \frac{g}{2}\right)$, on peut écrire $x = vt$, où $v = \omega r$ est la vitesse des protons sensiblement constante dans l'intervalle g ($g < r$).

- b) Quelle valeur s'efforcera-t-on d'obtenir pour ϕ_0 ?

c) En faisant les approximations convenables, calculer l'énergie cinétique \mathcal{E}_K obtenue à la sortie du cyclotron, c'est-à-dire après la $n^{\text{ième}}$ demi-orbite avec la valeur de ϕ_0 obtenue à la question 3) b). On l'exprimera en joules, puis en mégaelectronvolts (symbole : MeV).

d) Les protons arrivent à la sortie par paquets séparés les uns des autres par le même intervalle de temps, alors que l'injection se fait de façon continue au centre de l'accélérateur.

Expliquer l'origine de ces paquets.

Calculer l'intervalle de temps séparant deux paquets de protons. On garde les valeurs numériques de la question 2).

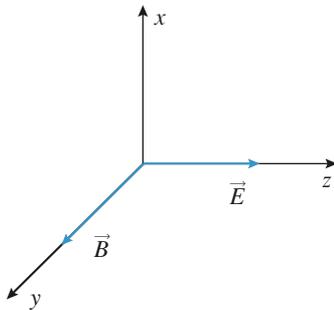
Conseils

- 1) Utiliser les résultats du cours.
- 2) Quand le proton est sur le $n^{\text{ième}}$ demi-cercle, combien de fois a-t-il traversé la zone accélératrice ? Quelle énergie a-t-il gagné à chaque passage ? En déduire la vitesse du proton sur le $n^{\text{ième}}$ demi-cercle puis le rayon de ce demi-cercle.
- 3) a) Calculer le travail de la force électrique au cours de la traversée de la zone accélératrice en tenant compte des hypothèses du texte.
- c) Évaluer les valeurs extrêmes du terme :

$$\frac{\sin\left(\frac{g}{2r}\right)}{\frac{g}{2r}} = \text{sinc}\left(\frac{g}{2r}\right). \text{ Conclure.}$$

7 Déviation dans \vec{E} et \vec{B} croisés (oral) (écrit – centrale 2001)

On considère une particule de masse m de charge q . On la place dans les champs uniformes $\vec{E} = E \vec{e}_z$ et $\vec{B} = B \vec{e}_y$. La particule est initialement en O avec une vitesse nulle. On pose $\omega_c = \frac{qB}{m}$ et on néglige le poids.



- 1 • Montrer que la vitesse s'écrit

$$v_x = \frac{E}{B} (\cos \omega_c t - 1) \quad v_y = 0 \quad v_z = \frac{E}{B} \sin \omega_c t$$

- 2 • Quelle est la nature de la trajectoire obtenue ? La tracer approximativement pour un électron puis pour un proton.
- 3 • On définit A comme le point où z atteint son premier extremum. Déterminer les coordonnées de A .
- 4 • Cette fois-ci la vitesse initiale est selon Ox . Trouver une condition sur E et B pour que le mouvement soit exclusivement selon Ox .

Conseils

- 1) Le champ E accélère la particule qui acquiert une vitesse : elle est alors déviée par le champ B . Pour écrire convenablement les équations du mouvement il faut se placer à un instant quelconque et considérer que la vitesse de la particule a, *a priori*, trois composantes différentes de zéro. La projection de la relation fondamentale de la dynamique sur les trois axes donne trois équations différentielles. Les deux équations différentielles en v_x et v_z sont couplées : une méthode rapide et élégante consiste à introduire la variable $\vec{u} = \vec{v}_x + i \vec{v}_z$.
- 2) Intégrer v_x et v_z pour obtenir $x(t)$ et $z(t)$. Ne pas oublier les constantes d'intégration qu'on détermine grâce aux conditions initiales.
- 4) Pour que la particule garde son vecteur vitesse selon Ox à un instant ultérieur, il faut qu'aucune force ne l'accélère selon Oz .

8 * Électron dans un piège de Penning

D'après ENSI M.

Des expériences récentes de physique atomique ont pu porter sur un électron unique. Le but de cet exercice est d'expliquer sommairement comment il est possible de piéger un électron dans une toute petite région de l'espace par un « piège de Penning ».

Grâce à un dispositif approprié, on crée dans une petite région de l'espace, au voisinage d'un point O , un champ électrostatique défini en coordonnées cartésiennes par :

$$\vec{E}(M) = \frac{U_0}{2R^2} (-x \vec{e}_x - y \vec{e}_y + 2z \vec{e}_z).$$

Un électron (masse m , charge $-e$) est mobile autour du point O .

- 1 • Montrer que O est une position d'équilibre de l'électron et discuter sa stabilité pour un mouvement le long de l'axe (Oz) ou dans le plan (xOy).

On posera $\omega_z^2 = \frac{eU_0}{mR^2}$.

Données : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C ; $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg ; $U_0 = 9,3$ V ; $R = 4,8$ mm.

Calculer la fréquence ν_z associée à la pulsation ω_z .

- 2 • Pour stabiliser la trajectoire de l'électron, on superpose au champ électrostatique précédent un champ magnétique uniforme, indépendant du temps, parallèle à l'axe (Oz), $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$.

On pose $\omega_c = e \frac{B_0}{m}$.

a) Montrer que le mouvement suivant (Oz) n'est pas modifié par rapport à celui de la question 1).

b) On étudie maintenant le mouvement projeté dans le plan (xOy) . Montrer que l'électron n'est piégé que si B_0 est supérieur à une certaine valeur B_c à déterminer en fonction des données de l'exercice (on établira pour cela l'équation différentielle vérifiée par $\rho = x + iy$). Effectuer l'application numérique.

Dans la suite du problème, on prendra $B_0 = 0,55 \text{ T}$.

c) Résoudre alors l'équation en ρ sans chercher à déterminer les constantes d'intégration. Mettre en évidence deux pulsations: l'une, voisine de ω_c , que l'on notera ω'_c , et l'autre notée ω_m et appelée « pulsation magnétron ».

Calculer la fréquence magnétron ν_m associée à ω_m et la fréquence ν'_c associée à ω'_c . Conclure.

d) On peut alors considérer le mouvement de l'électron dans le piège comme la superposition de trois mouvements:

- oscillations suivant l'axe (Oz) ;
- entraînement ou dérive sur un cercle de rayon ρ_m à la fréquence magnétron dans le plan (xOy) ;
- rotation cyclotronique de rayon ρ_c ; on admet que ρ_c est beaucoup plus faible que ρ_m .

Représenter ces trois mouvements sur un même schéma, puis essayer de tracer l'allure de la trajectoire de l'électron.

Conseils

1) Utiliser la relation fondamentale de la dynamique projetée sur les trois axes et raisonner sur l'allure des solutions des équations différentielles obtenues. Il est délicat ici de raisonner sur l'énergie potentielle, car c'est une fonction de trois variables. Attention au signe de la charge.

2) Utiliser la méthode habituelle: projeter la relation fondamentale de la dynamique sur les axes (Ox) et (Oy) (équations (1) et (2)). Effectuer (1) + i (2) pour déterminer l'équation différentielle vérifiée par ρ . L'électron ne sera piégé que si le module de ρ est borné.

9 Spectromètre de masse

D'après ENAC.

Dans la plupart des spectromètres de masse et des analyseurs, les particules chargées, dont on veut déterminer les caractéristiques (charge spécifique $\frac{q}{m}$, énergie), se déplacent dans une région de l'espace où règnent des champs statiques et uniformes croisés de vecteurs \vec{E} et

\vec{B} . Souvent, les particules sont émises dans la direction perpendiculaire à \vec{E} et \vec{B} .

Le dispositif présenté ici offre la particularité d'une injection de particules qui se fait principalement dans la direction de \vec{B} (s'il est couplé à une source d'ions où règne un champ magnétique intense, la dispersion des vitesses lors de l'injection est réduite). L'espace est rapporté au référentiel galiléen $\mathcal{R}(O; x, y, z)$. Les champs magnétique et électrique sont $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et $\vec{E} = -E\vec{e}_x$, E et B étant deux constantes positives. Des ions de charge électrique q positive et de masse m sont injectés à l'instant $t = 0$ à l'origine du référentiel avec le vecteur vitesse:

$$\vec{v}_0(v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}).$$

On pose $\omega = \frac{qB}{m}$ (pulsation cyclotron) et $\vec{v}_d = \frac{E}{B}\vec{e}_y$.

1 • a) Déterminer les expressions en fonction du temps des composantes v_x , v_y et v_z du vecteur vitesse $\vec{v}(P)_{\mathcal{R}}$ d'un ion P de coordonnées x , y et z , les paramètres étant ω , v_d , v_{0x} , v_{0y} et v_{0z} .

b) En déduire les expressions de x , y et z en fonction du temps.

c) Compte tenu du dispositif et du fait que l'injection se fait principalement dans la direction des z , on a:

$$|v_{0x}| \ll v_d - v_{0y} < v_{0z},$$

condition que l'on supposera remplie dans toute la suite. Donner l'allure de la trajectoire de H , projection orthogonale de P dans le plan (xOy) .

Déterminer en particulier l'écart maximal de la courbe par rapport à l'axe (Oy) . On constatera que la mesure de cet écart permet la détermination de la charge spécifique $\frac{q}{m}$ des ions.

Que dire du choix de E et B pour que cette mesure ne dépende pas en pratique des conditions d'injection des ions?

d) Soit \mathcal{R}' le référentiel $(O'; x', y', z')$ déduit de \mathcal{R} par la translation de vecteur \vec{v}_d . Sachant que \mathcal{R}' coïncide avec \mathcal{R} à l'instant $t = 0$, établir l'équation cartésienne de la projection sur $(x'O'y')$ de la trajectoire de P dans \mathcal{R}' .

2 • D'après la question précédente, l'étude du mouvement dans \mathcal{R}' conduit à des résultats plus simples que dans \mathcal{R} . On se propose de montrer que ces résultats peuvent être obtenus de manière plus directe.

a) Donner l'expression vectorielle de \vec{v}_d en fonction de \vec{E} et \vec{B} .

Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R} à l'aide du vecteur $\vec{v}(P)_{\mathcal{R}}$ de P dans \mathcal{R}' . Quel constat peut-on dresser?

b) Dans ces conditions, retrouver rapidement le type de trajectoire que décrit P .

Conseils

Remarquons que v_d est la vitesse de dérive. C'est la dérive dans laquelle s'effectue la « dérive » des particules quelle que soit leur charge. Cette vitesse est égale à $\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$, ce qui donne ici :

$$\vec{v}_d = \frac{-E\vec{e}_x \wedge B\vec{e}_z}{B^2} = \frac{E}{B} \vec{e}_y$$

1) Écrire la relation fondamentale de la dynamique sous la forme d'une équation différentielle en \vec{v} , la projeter sur les trois axes.

Introduire la variable $u = x + iy$.

2) Remplacer, dans la relation fondamentale de la dynamique, \vec{E} par son expression vectorielle en fonction de \vec{v}_d et B . En déduire l'équation du mouvement dans le référentiel \mathcal{R}' .

On remarquera que \mathcal{R}' est un référentiel galiléen.

10 Réfraction d'électrons

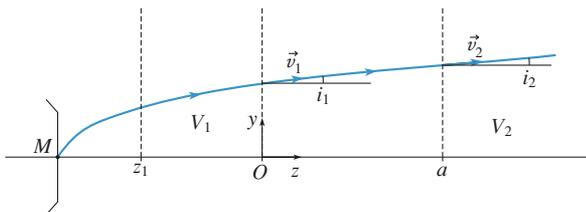
D'après ESEM C.

Des électrons, de masse m , de charge $-e$, sont émis avec une vitesse initiale négligeable par une source M . Les forces de gravitation qui s'exercent sur eux sont complètement négligeables devant les forces d'origine électrique. Le potentiel de la source M est choisi comme origine des potentiels.

1 • Des électrodes créent la répartition de potentiel suivante :

- le potentiel varie continûment de 0 à V_1 entre la source M et le plan d'équation $z = z_1 < 0$;
- pour $z_1 < z < 0$, $V(x, y, z) = V_1$ constante positive ;
- pour $z > a > 0$, $V(x, y, z) = V_2$ constante $> V_1$;
- dans la zone intermédiaire $0 \leq z \leq a$, le potentiel varie linéairement entre les valeurs V_1 et V_2 , et reste indépendant de x et de y .

On considère un électron qui se déplace dans le plan (Oyz) . Il arrive en $z=0$ avec une vitesse \vec{v}_1 faisant l'angle i_1 avec (Oz) , puis passe en $z=a$ avec une vitesse \vec{v}_2 faisant l'angle i_2 avec (Oz) .



On rappelle que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, ce qui s'écrit ici :

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dz} \vec{e}_z$$

a) Établir une relation entre le module v de la vitesse de cet électron et le potentiel V au point où il se trouve.

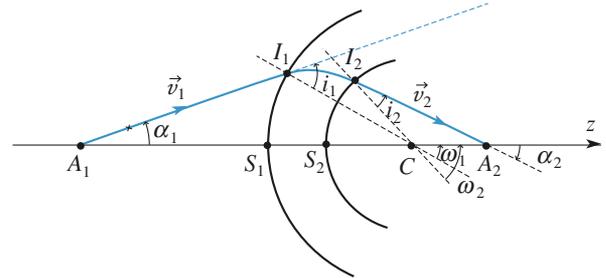
b) Déterminer la relation entre V_1, V_2, i_1 et i_2 .

c) Faire une analogie avec les lois de Descartes en optique géométrique. Quelle grandeur joue ici le rôle de l'indice de réfraction n ?

2 • Dans cette question, les surfaces équipotentielles sont maintenant des calottes sphériques de même centre C , de rayon r et d'axe de symétrie (Oz) .

On suppose que $V = V_1$ pour $r \geq R_1$ et $V = V_2$ pour $r \leq R_2, V(r)$ variant de façon continue de V_1 à V_2 pour $R_1 \geq r \geq R_2$ avec $0 < V_1 < V_2$.

La trajectoire d'un électron coupe l'axe (Oz) en A_1 dans le milieu de potentiel V_1 et recoupe cet axe en A_2 dans le milieu de potentiel V_2 . Elle « perce » les calottes de centre C , de rayons R_1 et R_2 dont les sommets sur l'axe sont S_1 et S_2 , respectivement en I_1 et I_2 .



Dans ce cas, $\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$ (en coordonnées sphériques).

a) On reprend l'étude pour un électron ayant une vitesse \vec{v}_1 dans un plan méridien des calottes sphériques (celui de la figure ci-dessus).

Montrer que le moment cinétique en C de cet électron est constant.

En déduire une relation entre R_1, R_2, V_1, V_2 et les angles i_1 et i_2 définis sur la figure ci-dessus.

b) On suppose que $S_1 S_2 \ll R_1$ et $S_1 S_2 \ll R_2$, et on admet que S_1 et S_2 se confondent en un seul point S , de même I_1 et I_2 sont alors confondus en un point I . Par ailleurs, on suppose que les vitesses sont peu inclinées sur l'axe.

Déterminer les relations entre i_1, ω_1 et α_1 puis entre i_2, ω_2 et α_2 , angles orientés définis sur la figure.

Montrer que $\frac{\sqrt{V_2}}{SA_2} - \frac{\sqrt{V_1}}{SA_1} = K$, où K est une constante

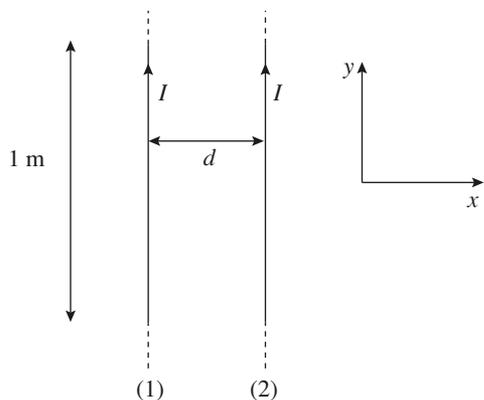
que l'on déterminera. Quelle analogie peut-on faire avec l'optique géométrique ?

Conseils

- 1) a) Utiliser la conservation de l'énergie.
- b) Comment est dirigée la force qui agit sur la particule ? Que peut-on en conclure ?
- 2) a) Que vaut le moment de la force électrique ?
- b) Utiliser le triangle A_1I_1C pour déterminer la relation entre les angles i_1 , α_1 et ω_1 .
Exprimer ensuite la tangente de l'angle α_1 et celle de ω_1 en confondant S et la projection orthogonale de I sur (Cz) . Procéder de même pour les angles i_2 , α_2 , etc. Les vitesses étant peu inclinées par rapport à l'axe, tous ces angles sont petits.

11 Force de Laplace entre deux fils

Deux fils parallèles, rectilignes, considérés comme infinis, distants de d , sont parcourus par un courant I dans le même sens.



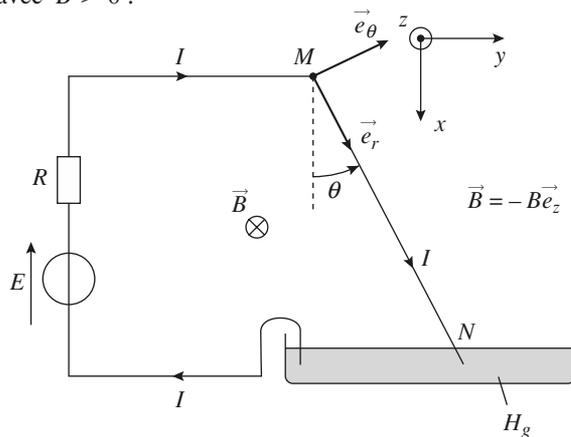
- 1 • Représenter la force de Laplace que l'un des fils exerce sur une unité de longueur de l'autre fil.
- 2 • Les deux fils ont-ils tendance à se rapprocher ou s'éloigner ?
- 3 • Rappeler la définition de l'ampère.

Conseils

Chaque fil est soumis au champ magnétique créé par l'autre fil.
On peut adopter soit les coordonnées cartésiennes, soit les coordonnées polaires. La force de Laplace, est définie par un produit vectoriel. Rappelons les « règles » du produit vectoriel : soit une base « directe » e_i, e_j, e_k alors $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_k = -\vec{e}_k \wedge \vec{e}_i = -\vec{e}_j$, $\vec{e}_j \wedge \vec{e}_i = -\vec{e}_k$ et $\vec{e}_i \wedge \vec{e}_k = -\vec{e}_k \wedge \vec{e}_i = -\vec{e}_j$.
Il faut connaître par cœur le champ magnétique créé par un fil infini (cela fait partie des INCONTOURNABLES), et savoir dans quel sens il s'enroule autour du courant.

12 Tige conductrice soumise à la force de Laplace

On considère le dispositif suivant où une tige conductrice, supposée de résistance nulle, est libre de pivoter autour d'un axe Mz orthogonal à la figure. Son autre extrémité N baigne dans un bain de mercure : on suppose que le mercure (liquide métallique, excellent conducteur) n'introduit aucune résistance mécanique au mouvement de la barre.
L'ensemble est dans un champ magnétique $B = -B e_z$, avec $B > 0$.



- 1 • Exprimer la résultante F des forces de Laplace sur la tige conductrice. La représenter sur le schéma.
- 2 • Montrer que le point d'application A de la résultante se trouve au milieu de la tige en calculant le moment résultant \vec{T}_M des forces de Laplace en M .
- 3 • Exprimer l'angle θ à l'équilibre.
- 4 • A.N. : $E = 2 \text{ V}$; $R = 4 \Omega$; $B = 1 \text{ T}$; $m = 100 \text{ g}$; $l = 1 \text{ m}$; $g \approx 10 \text{ m.s}^{-2}$

Conseils

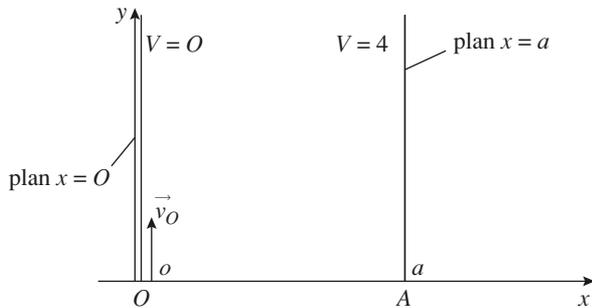
- 1) On pourra travailler en coordonnées cylindriques d'axe Mz . Le courant qui traverse la tige est dirigé vers les « r » croissants donc le sens et la direction de la force de Laplace est donnée par le produit vectoriel $\vec{e}_r \wedge (-\vec{e}_z) = \vec{e}_\theta$.
- 2) Les actions de Laplace sont réparties sur toute la tige de manière uniforme puisque le courant y est rectiligne et constant. Mais le moment des forces de Laplace qui s'applique sur un élément $d\vec{\ell} = dr \vec{e}_r$ de la tige dépend de la distance au point M : il n'a pas même valeur pour chaque élément de la tige. Il faut donc procéder à une somme intégrale. Une fois le moment résultant trouvé, on cherche à le mettre sous la forme $\vec{MA} \wedge \vec{F}$: par identification on en déduit la position du point A .
- 3) À l'équilibre la somme des moments en M de toutes les forces appliquées est nulle.

13 Mouvement dans un champ électrique

D'après ESIGETEL MP 99.

Deux plans conducteurs parfaits infinis d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$ sont portés aux potentiels respectifs $V(x = 0) = 0$ et $V(x = a) = U > 0$.

L'espace interconducteur est vide.



1 • Montrer que le champ électrique E , dans le vide, est uniforme.

2 • Calculer E et $V(x)$.

A.N. : Calculer E avec $U = 10 \text{ kV}$ et $a = 1 \text{ m}$.

3 • Un électron entre à l'instant initial en $x = 0$ avec une vitesse initiale $v_0 = v_0 u_y$, avec $v_0 > 0$. Montrer que son poids est négligeable devant la force électrique.

4 • Exprimer sa vitesse à tout instant et déterminer sa trajectoire. À quelle condition sur U son mouvement s'effectue-t-il dans l'espace interconducteur ?

5 • À quelle date sort-il de l'espace interconducteur ? Exprimer alors sa vitesse \vec{v}_1 et sa position.

6 • On place en $y = y_0$ et $x = a$ une fente très fine. Montrer que ce dispositif permet de sélectionner des électrons de vitesse v_0 donnée. Relier v_0 à y_0 .

Données : $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

et masse de l'électron $m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Conseils

1) Dans un premier temps montrer que E ne dépend que d'une seule variable d'espace en étudiant les invariances du problème. Appliquer ensuite le théorème de Gauss à une surface convenablement choisie.

2) Les seules données du problème sont les potentiels en $x = 0$ et en $x = a$. Mais comme on a démontré que E est uniforme, on peut calculer sa valeur en exprimant sa circulation entre $x = 0$ et $x = a$. Il faut bien détailler les calculs avec les grandeurs vectorielles pour ne pas commettre d'erreur de signe.

Conseils

3) Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron en tenant compte de l'approximation qui découle de la question précédente. Ne pas oublier les constantes d'intégration.

4) L'électron est accéléré dans un sens opposé à celui du champ E puisqu'il est chargé négativement, E est toujours dirigé vers les potentiels décroissants.

14 * Conduction dans le germanium. Effet Hall

D'après Mines d'Albi, Alès, Douai, Nantes.

1 • Un électron, de charge $-e$, de masse m , est émis avec une vitesse initiale nulle dans une région de l'espace où règne un champ électrique uniforme et constant \vec{E}_0 . L'électron est, en outre, soumis à l'action d'une force de frottement (de type fluide) due à l'action du milieu dans lequel il se déplace :

$$\vec{F} = -\frac{m\vec{v}}{\tau}$$

Son mouvement est décrit dans un référentiel galiléen $(O; x, y, z)$, de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ dans lequel $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_x$. On néglige l'action de la pesanteur.

a) Écrire l'équation différentielle du mouvement de l'électron. Quelle est l'unité de la constante τ ?

b) Donner l'expression du vecteur vitesse \vec{v} en fonction du temps.

Montrer qu'il tend vers une limite \vec{v}_∞ que l'on exprimera. Exprimer le temps au bout duquel l'électron atteint cette vitesse limite à 1% près.

2 • Le germanium est un bon isolant électrique. Lorsqu'on introduit des impuretés en très faible concentration, par exemple de l'antimoine (Sb), la conductivité électrique du germanium augmente fortement : on obtient un semi-conducteur « dopé », noté Ge:Sb dont les propriétés électriques dépendent à la fois du nombre d'atomes Sb introduits par unité de volume, N , et de la température T .

On propose le modèle suivant de conduction dans le germanium dopé : dans Ge pur, tous les électrons sont engagés dans des liaisons chimiques et ne peuvent participer à la conduction électrique.

On suppose que lorsqu'on dope Ge par Sb, à raison de N atomes de Sb par unité de volume, à température ambiante, chaque atome Sb « libère » un électron du réseau cristallin. Sous l'action d'un champ électrique uniforme \vec{E}_0 , les charges libres sont animées d'un mouvement de vitesse \vec{v} . On modélise l'action des atomes ou des ions du réseau sur ces charges par une force de frottement du type précédent.

a) Exprimer, en régime permanent, le vecteur densité de courant \vec{j} . En déduire l'expression de la résistivité électrique ρ_e de Ge:Sb en fonction de m , N , e et τ .

b) Données

On mesure la résistivité $\rho_e = 1,22 \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}$ pour un échantillon de « concentration » $N = 1,6 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

Calculer le nombre d'atomes de germanium par m^3 d'échantillon.

En déduire le taux d'atomes d'antimoine, c'est-à-dire le nombre d'atomes de Sb par atome de Ge.

Calculer τ dans le cadre du modèle précédent. Que pensez-vous du résultat obtenu à la question 1) b) ?

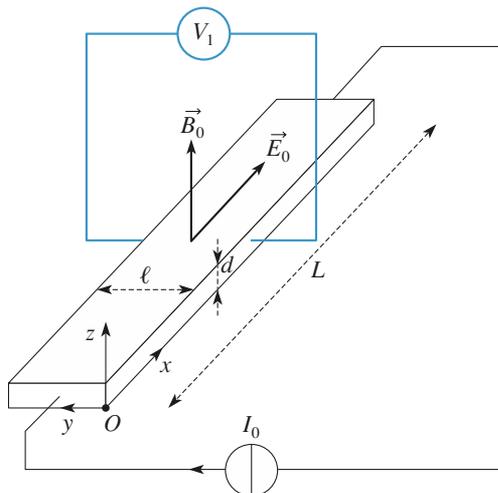
Données

- nombre d'Avogadro: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$;
- charge élémentaire: $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$;
- masse d'un électron: $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$;
- masse atomique du germanium: $M = 72,6 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$;
- masse volumique du germanium: $\mu = 5,32 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

3 • On s'intéresse maintenant à la conduction électrique de l'échantillon de Ge:Sb, étudié précédemment, dans un champ électrique et un champ magnétique croisés. On se replace dans le cadre du modèle décrit à la question 2).

On découpe Ge:Sb sous forme d'un ruban de longueur $L = 20 \text{ mm}$ parallèle à l'axe (Ox) , de section rectangulaire de largeur $\ell = 1 \text{ mm}$ parallèle à (Oy) et d'épaisseur $d = 0,2 \text{ mm}$ parallèle à (Oz) .

Un générateur de courant délivrant un courant d'intensité constante I_0 disposé en série suivant la ligne de plus grande longueur crée un champ électrique uniforme \vec{E}_0 d'axe (Ox) . On place l'échantillon dans un champ magnétique \vec{B}_0 constant d'axe (Oz) colinéaire à l'épaisseur.



a) Montrer que $E_0 = \frac{\rho_e I_0}{\ell d}$

b) Montrer qualitativement que la vitesse de dérive des électrons libres entraîne l'apparition d'une distribution de charges sur les bords du matériau. Cette distribution crée alors un champ électrique \vec{E}_1 , considéré comme uniforme, colinéaire à l'axe (Oy) .

c) En régime permanent, les conditions aux limites du matériau imposent que le vecteur densité de courant \vec{j} soit colinéaire à l'axe de plus grande longueur (Ox) . Écrire l'équation du mouvement d'un électron libre. En déduire l'expression du champ \vec{E}_1 en fonction des données de l'exercice.

d) A. N.: Calculer la différence de potentiel V_1 (donnée par $V_1 = -E_{1y}\ell$) que l'on peut mesurer entre les deux bords de l'échantillon, de part et d'autre de sa largeur, pour $I_0 = 10 \text{ mA}$ et $B_0 = 0,1 \text{ T}$.

Quelle application voyez-vous du phénomène étudié ?

Conseils

1) Utiliser la relation entre \vec{j} et \vec{v} pour déterminer la relation entre \vec{j} et \vec{E} , donc la résistivité.

Pour l'application numérique, faire attention aux unités de masse.

2) La relation « classique » $\vec{E} = \rho \vec{j}$ n'est vraie qu'en l'absence de champ magnétique.

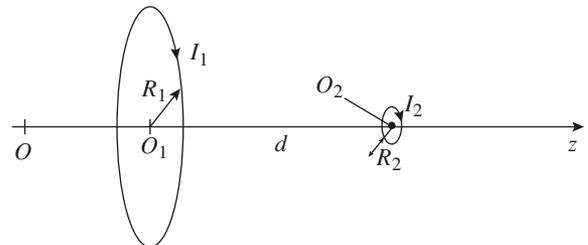
15 Interaction de deux bobines

On considère une bobine plate (1) de N_1 spires, de rayon R_1 , de centre O_1 , d'axe Oz , parcourue par un courant d'intensité I_1 .

À une distance d de O_1 sur l'axe Oz une deuxième bobine plate (2) de N_2 spires, de rayon R_2 , de centre O_2 , de même axe Oz , parcourue par un courant I_2 de même sens.

On notera z_1 et z_2 les cotes respectives de O_1 et O_2 .

On supposera que $R_1 \gg R_2$ et $d \gg R_2$.



Doc 1

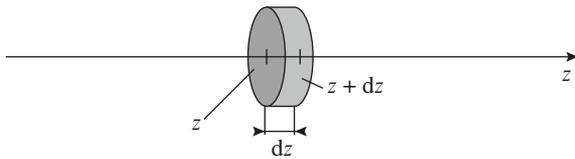
A) Champ de la bobine (1)

1 • Rappeler l'expression du champ créé par une spire en un point de son axe.

2 • En déduire le champ B_1 créé par la bobine (1) en un point de l'axe.

3 • On se place en coordonnées cylindriques d'axe Oz ; en un point au voisinage de l'axe Oz , le champ \vec{B} possède deux composantes $B_r(r, z)$ et $B_z(r, z)$. En exprimant que le flux de B à travers la surface cylindrique de hauteur dz et de rayon $r \ll R_1$ est nul, montrer que

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dr}$$



Doc 2

En déduire le champ B créé au voisinage de l'axe Oz par la bobine (1). On ne cherchera pas à exprimer $B_z(r, z)$.

B) Champ de la bobine (2)

Rappeler le champ créé par un dipôle magnétique en un point quelconque de l'espace.

C) Force d'interaction entre les bobines

- 1 • Calculer la force magnétique exercée par (1) sur (2).
- 2 • Calculer la force magnétique exercée par (2) sur (1).
- 3 • a) Calculer l'énergie potentielle de la bobine (2) dans le champ magnétique de la bobine (1).
b) en déduire la force magnétique exercée par (1) sur (2).

Conclure.

Conseils

A) 1) Toujours cette situation incontournable....

3) On exprimera B_r en fonction de B sur l'axe.

B) Toujours cette situation incontournable....

C) 1) et 2) On calculera directement la somme des forces de Laplace élémentaires.

Pour 2) on montrera que seule la contribution de B_r existe. Celle de B_z est nulle.

3) Le dipôle rigide M_2 étant dans un champ permanent, il n'y a aucun problème pour calculer l'énergie potentielle E_p de (2) dans le champ magnétique de (1).

La force cherchée s'en déduit en calculant « moins » le gradient de cette expression par rapport aux coordonnées de (2).

1 Accélération d'une particule chargée par une différence de potentiel (méthode)

1 • L'énergie potentielle d'une particule de charge q dans un potentiel V est $\mathcal{E}_p = qV$. La conservation de l'énergie entre les deux grilles s'écrit donc :

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 + qV_0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{-2qV_0}{m}},$$

le produit qV_0 doit être négatif.

Donc pour un électron $q = -e < 0$ et $V_0 > 0$.

2 • a) Pour un électron :

$$v = 5,9 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$$

b) Pour un ion argon :

$$v = 1,2 \cdot 10^5 \text{ m.s}^{-1}$$

On remarque que, dans les deux cas, $v \ll c$ ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$), l'approximation de la mécanique classique est bien valable.

2 Particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1 • La force qui agit sur l'électron est $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$. Elle est constamment orthogonale au mouvement : son travail est nul. L'énergie cinétique de l'électron est donc constante, et v , module du vecteur vitesse, l'est aussi.

La vitesse initiale étant perpendiculaire à \vec{B}_0 , le mouvement a lieu dans le plan (xOy) ; en effet $\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ est orthogonal à \vec{B}_0 donc \vec{F} est un vecteur du plan (xOy) et comme l'électron a son vecteur vitesse selon \vec{e}_x , il reste dans le plan xOy : la relation fondamentale de la dynamique projetée sur (Oz) donne :

$$\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = \text{cte} = 0 \Rightarrow z = \text{cte} = 0$$

d'après les conditions initiales.

La force est à chaque instant perpendiculaire à la vitesse en raison du produit vectoriel. La trajectoire est donc circulaire uniforme (pas d'accélération tangentielle qui augmenterait la vitesse de rotation).

2 • Dans le référentiel C , $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ lié au centre de la trajectoire circulaire \vec{v} est selon $\vec{\mu}_\theta$ et \vec{B}_0 selon τ_z donc $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}_0 = -ev B_0 \vec{e}_r = -m\rho_c \omega_c^2 \vec{e}_r$ d'après l'expression de l'accélération radiale, et $\vec{v} = \rho_c \omega_c \vec{e}_\theta$.

$$\rho_c \omega_c^2 = \frac{v^2}{\rho_c} \text{ d'où } ev B_0 = m \frac{v^2}{\rho_c} \text{ soit}$$

$$\rho_c = \frac{mv}{eB_0} \text{ et } \omega_c = \frac{v_0}{\rho_c} = \frac{eB_0}{m},$$

$$\text{la fréquence } \nu_c = \frac{eB_0}{2\pi m}.$$

3 • A. N. : $v_0 = \sqrt{\frac{2e\mathcal{E}_K}{m}} = 41,9 \text{ km.s}^{-1}$, d'où $\rho_c = 0,43 \mu\text{m}$ et $\nu_c = 15,4 \text{ GHz}$.

3 Déviation d'un électron

1 • Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants où l'électron quitte (1) pour arriver en (2) :

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -e(V_1 - V_2) \Rightarrow v_2^2 = v_1^2 + 2meU$$

soit $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2meU}$ lorsque l'électron arrive en (2).

2 • Nous savons que $v_1^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2$ et $v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$ ce qui donne :

$$v_{2x}^2 + v_{2y}^2 = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + 2meU.$$

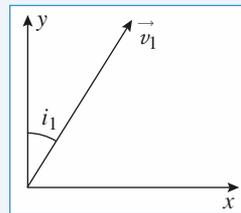
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron donne :

$$m\vec{a} = -e\vec{E} = -eE \vec{e}_y.$$

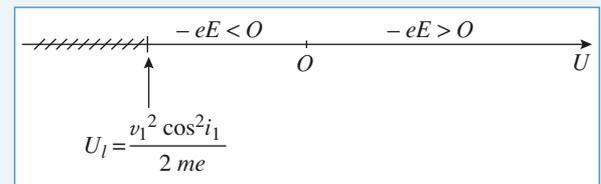
Donc l'accélération de l'électron est nulle suivant \vec{e}_x , ce qui conduit à $v_{1x} = v_{2x}$ et donc :

$$v_{2y}^2 = v_{1y}^2 + 2meU.$$

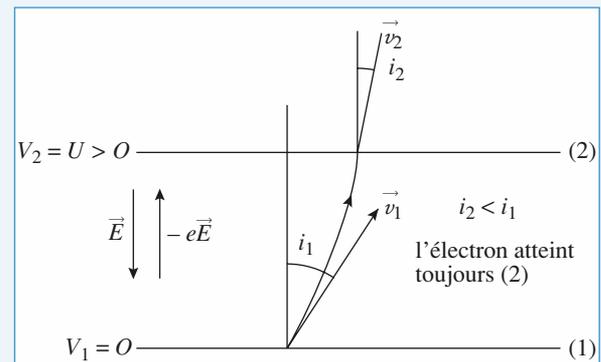
L'électron atteindra la plaque (2) si $v_{2y} \geq 0$; il faut donc que $v_{1y}^2 + 2meU \geq 0$ soit :



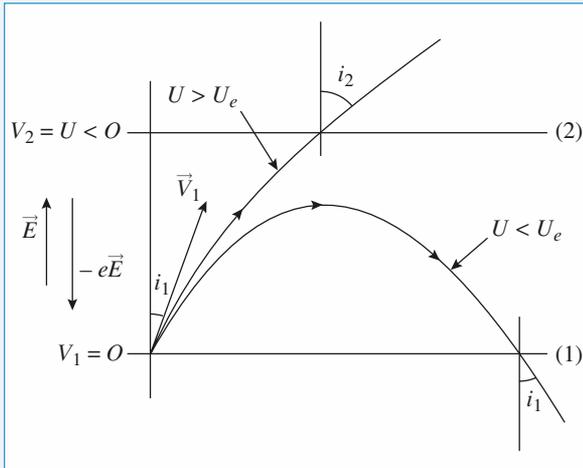
$$\begin{aligned} v_{1y}^2 &\geq -2meU \\ v_1^2 \cos^2 i_1 &\geq -2meU \\ U &\geq -\frac{v_1^2 \cos^2 i_1}{2me}. \end{aligned}$$



Cas où $U > 0$



Cas où $U < 0$



3 • Nous avons vu que l'électron n'est pas accéléré suivant \vec{e}_x puisque le champ \vec{E} est selon \vec{e}_y (champ d'un condensateur plan), donc $v_{2x} = v_{1x}$.

$$\sin i_1 = \frac{v_{1x}}{v_1} ; \sin i_2 = \frac{v_{2x}}{v_2}$$

d'où $v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2$, loi qui ressemble à une loi de réfraction en optique...

$$\sin i_2 = \sin i_1 \frac{v_1}{v_2} = \sin i_1 \frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + 2m eU}}$$

si $U > 0$ $i_2 < i_1$

si $U < 0$ $i_2 > i_1$ quand la particule arrive sur (2).

4 Particule chargée dans un condensateur

1 • La relation fondamentale de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = q\vec{E}$. En projection sur les axes (Ox) et (Oy) , on obtient, en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -\frac{qV}{h} \end{cases}, \text{ d'où } \begin{cases} \dot{x} = v_0 \sin \alpha \\ \dot{y} = -\frac{qV}{mh}t + v_0 \cos \alpha \end{cases}$$

et
$$\begin{cases} x = v_0 \sin \alpha t \\ y = -\frac{qV}{2mh}t^2 + v_0 \cos \alpha t \end{cases}$$

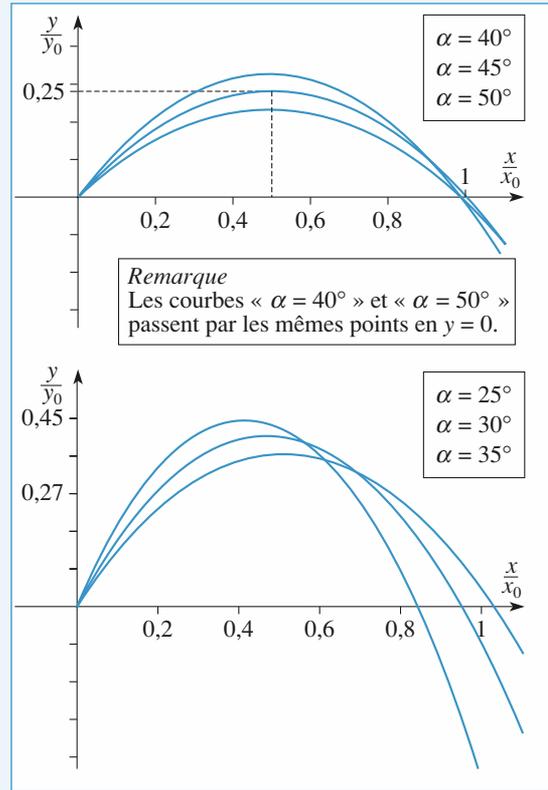
La particule recoupe l'axe (Ox) au point A à l'instant t_1 tel que $y(t_1) = 0$ (mais $t_1 \neq 0$).

On obtient $t_1 = v_0 \cos \alpha \frac{2mh}{qV}$, d'où, en reportant dans l'ex-

pression de $x(t)$: $x_A = v_0^2 \sin(2\alpha) \frac{mh}{qV}$.

t_1 étant nécessairement positif, q et V sont de même signe.

2 • On en déduit $\frac{dx_A}{d\alpha} = 2v_0^2 \cos(2\alpha) \frac{mh}{qV}$.



En assimilant $\frac{dx_A}{d\alpha}$ à $\frac{\Delta x_A}{\Delta \alpha}$ (car $\Delta \alpha$ et Δx_A sont petits),

on obtient :

$$\Delta x_A = 2v_0^2 \cos(2\alpha) \frac{mh}{qV} \Delta \alpha.$$

On veut $\Delta x_A = 0$ (mais $x_A \neq 0$) pour $\alpha = \alpha_0$ alors que $\Delta \alpha \neq 0$, ce qui est vérifié pour $\cos(2\alpha_0) = 0$, soit $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$.

On en déduit $x_0 = v_0^2 \frac{mh}{qV}$.

Remarque : Cette question est à rapprocher du calcul classique de la portée maximale d'un tir balistique.

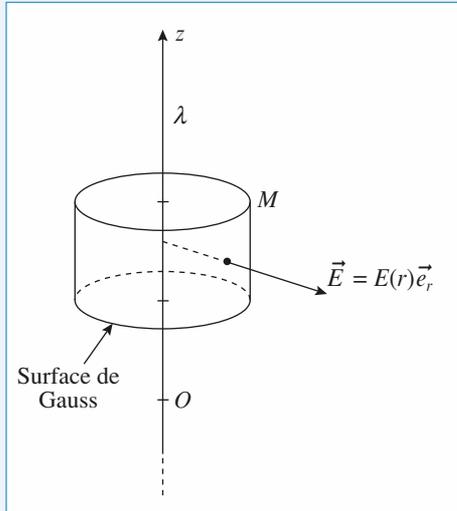
3 • En appliquant la relation ci-dessus aux particules de masse m_1 et à celles de masse m_2 , on obtient :

$$\Delta x_0 = v_0^2 \frac{h}{qV} (m_2 - m_1), \text{ soit } v_0 = \sqrt{\frac{qV \Delta x_0}{h(m_2 - m_1)}}.$$

Avec $\Delta x_0 = 1 \text{ cm}$ et $m_2 - m_1 = (40 - 38)10^{-3} N_A$, on calcule : $v_0 = 69,4 \text{ km.s}^{-1}$.

5 Mouvement d'une particule dans le champ d'un fil infini chargé

1 • Soit un fil infini portant une densité uniforme de charges λ . Les symétries et invariances conduisent à la recherche d'un champ radial de la forme $\vec{E}(M) = E(r)\vec{e}_r$ en coordonnées cylindriques.



Le théorème de Gauss appliqué à la surface ci-dessus donne

$$E(r)2\pi rh = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\text{soit : } \vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\vec{e}_r}{r}$$

2 • $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ est homogène à $E.r$ donc à des volts.

$\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0}$ est donc homogène à qV , donc à une énergie.

$\frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0 m}$ est donc homogène à une vitesse au carré

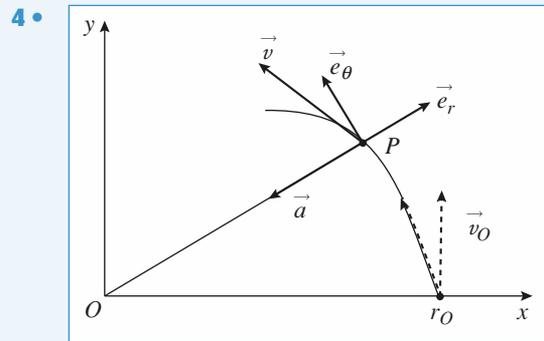
$$\text{car } E_k = \frac{1}{2}mv^2.$$

3 • P est soumise à la force électrique $q\vec{E}$, où \vec{E} est le champ créé par le fil infini. \vec{E} est radial donc à chaque instant la force est radiale, donc le support passe par le point O : le mouvement est donc un mouvement à force centrale. La trajectoire reste dans le plan perpendiculaire à l'axe Oz du fil car la vitesse initiale est orthogonale à cet axe. Ce mouvement peut être repéré soit en coordonnées polaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, soit en coordonnées cartésiennes (\vec{e}_x, \vec{e}_y) . Cette trajectoire obéit à la loi des aires.

Remarque : On a négligé le poids devant la force électrique. Cela suppose que $qE \gg mg$ soit $E \gg \frac{mg}{e}$

avec $m = 9.10^{-31}$ kg, $g = 10$ m.s $^{-2}$ et $e = 1,6.10^{-19}$ C, on obtient : $E \gg \frac{9.10^{-31} \times 10}{1,6.10^{-19}} \sim 10^{-10}$ V.m $^{-1}$, ce qui est

souvent largement vérifié.



4 • $\vec{a} = -\frac{q}{m}\vec{E}$ (avec $q > 0$) donc \vec{a} est centripète, la vitesse n'est plus *a priori* orthoradiale.

5 • Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre les instants où P est en $r = r_0$ et un instant quelconque :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = W = \int_{r_0}^r -q\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_0}^r -qE dr.$$

L'expression de \vec{E} est $\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{e}_r$

$$\text{d'où } \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{\lambda q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0}$$

$$\text{soit } v^2 = v_0^2 - 2\alpha^2 \ln \frac{r}{r_0} = v_0^2 \left(1 - 2\beta^2 \ln \frac{r}{r_0} \right)$$

6 • $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$ avec $\dot{\theta}$ tel que $r^2\dot{\theta} = \text{cste} = r_0v_0$ puisque le mouvement obéit à la loi des aires.

$$\text{Donc } \dot{r}^2 + \frac{r_0^2 v_0^2}{r^2} = v_0^2 \left(1 - 2\beta^2 \ln \frac{r}{r_0} \right)$$

$$\text{soit } \dot{r}^2 + v_0^2 \left[\frac{r_0^2}{r^2} - 1 - 2\beta^2 \ln \frac{r}{r_0} \right] = 0;$$

$$\text{on identifie } U(r) = \frac{r_0^2}{r^2} - 1 - 2\beta^2 \ln \frac{r}{r_0}.$$

7 • Traçons sommairement $U(r)$.

$$\text{Posons } x = \frac{r}{r_0}, \text{ soit } U(x) = \frac{1}{x^2} - 1 - 2\beta^2 \ln x.$$

On vérifie bien que $U(x) = 0$ pour $x = 1$.

Quand $x \rightarrow 0$, $U(x) \rightarrow \infty$; quand $x \rightarrow \infty$, $U(x) \rightarrow \infty$ comme $2\beta^2 \ln x$.

Étudions $\frac{dU}{dx} = -\frac{2}{x^3} + \frac{2\beta^2}{x} = \frac{2}{x} \left(\beta^2 - \frac{1}{x^2} \right)$:

en $x = 1$: $\frac{dU}{dx} = 2(\beta^2 - 1)$, du signe de $\beta - 1$.

$\frac{dU}{dx} = 0$ pour $x = \frac{1}{\beta}$ (et $U\left(\frac{1}{\beta}\right) = \beta^2 - 1 - 2\beta^2 \ln \beta$)

Les documents suivants montrent $U(x) < 0$ pour :

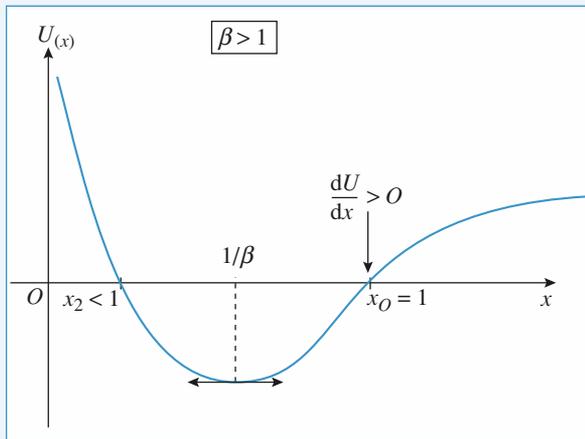
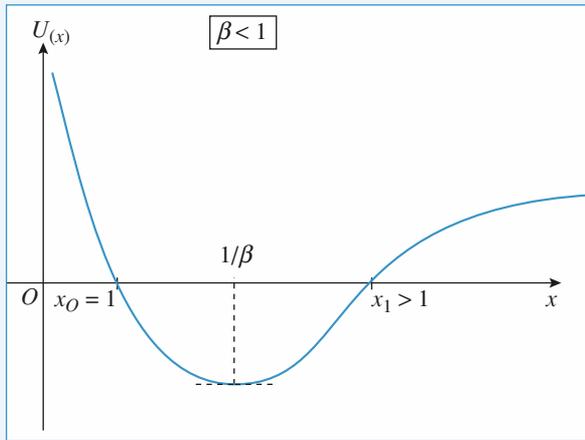
si $\beta < 1$ $x_0 = 1 < x < x_1$ avec $x_1 > 1$

$\beta > 1$ $x_2 < x < x_0 = 1$ avec $x_2 < 1$

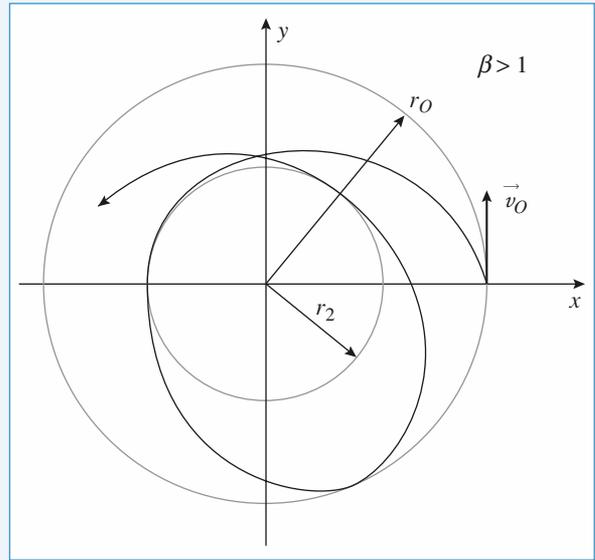
Sachant que $\dot{r}^2 + v_0^2 U(r) = 0$, les mouvements possibles sont obtenus pour $U(r) < 0$, et donc suivant les valeurs de β :

$\beta < 1$: $r_0 < r < r_1 = x_1 r_0$

$\beta > 1$: $r_2 = x_2 r_0 < r < r_0$



Le mouvement est donc en permanence limité dans l'espace et aura l'allure suivante :



6 Cyclotron

1 • Les protons décrivent, à l'intérieur des dees, des demi-cercles à la fréquence $\nu_c = \frac{eB_0}{2\pi m_p}$. Pour que les protons

soient effectivement accélérés à chaque passage dans l'espace entre les dees, il faut que la fréquence du champ électrique soit accordée sur celle du champ magnétique. On obtient :

$$\nu_c = 23,9 \text{ MHz.}$$

2 • Le rayon de la trajectoire du proton est $r = \frac{m_p v}{eB_0}$.

Quand le proton décrit le $n^{\text{ième}}$ demi-cercle, il a été accéléré n fois, or à chaque demi-tour son énergie cinétique augmente de eU_c , au bout de n demi-cercles, elle est donc égale à neU_c . La vitesse du proton sur ce demi-cercle est alors :

$$v_n = \sqrt{\frac{2enU_c}{m_p}}$$

On en déduit :
$$r_n = \sqrt{\frac{2nm_p U_c}{eB_0^2}}$$

Pour $n = 400$, on obtient $r_{400} = 42,2 \text{ cm}$.

3 • Le travail de la force électrique à la traversée de

l'espace accélérateur est $W = \int_{-\frac{g}{2}}^{\frac{g}{2}} eE dx$ avec :

$$E = \frac{U_c}{g} \sin(\omega t + \phi_0) \quad \text{et} \quad dx = v dt = \omega r dt.$$

On en déduit :
$$W = \frac{eU_c}{g} \omega r \int_{-\frac{g}{2\omega r}}^{\frac{g}{2\omega r}} \sin(\omega t + \phi) dt$$

$$W = \frac{eU_c r}{g} \left(\cos\left(-\frac{g}{2r} + \phi_0\right) - \cos\left(\frac{g}{2r} + \phi_0\right) \right)$$

$$W = eU_c \frac{\sin\left(\frac{g}{2r}\right)}{\frac{g}{2r}} \sin \phi_0.$$

b) Pour que le gain en énergie soit maximal, il faut que

$$\phi_0 = \frac{\pi}{2}.$$

c) On calcule tout d'abord la quantité $a = \frac{\sin\left(\frac{g}{2r}\right)}{\frac{g}{2r}} = \text{sinc}\left(\frac{g}{2r}\right)$

pour le rayon minimum (r_1) et pour le rayon maximum (r_{400}) : $r_1 = 2,1$ cm et $a = 0,991$; $r_{400} = 42,2$ cm et $a = 1 - 2 \cdot 10^{-5}$: on pourra prendre $a = 1$ pour le mouvement du proton dans le cyclotron.

D'autre part, le temps mis par le proton pour parcourir chaque demi-cercle est constant, le déphasage est donc le même à chaque passage dans la zone accélératrice. L'énergie du proton à la sortie du cyclotron est donc égale à :

$$E = nW = neU_c = 3,2 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 20 \text{ MeV}.$$

d) Les protons sont accélérés uniquement s'ils traversent la zone accélératrice en phase avec le champ électrique. Il sort donc du cyclotron un paquet de protons à chaque période, donc toutes les 42 ns.

7 Déviation dans \vec{E} et \vec{B} croisés (oral) (écrit - centrale 2001)

1 • À un instant quelconque, la particule a été accélérée par le champ \vec{E} , puis déviée par le champ \vec{B} , c'est-à-dire que sa vitesse s'écrit dans le cas général :

$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$; et la force à laquelle elle est soumise :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -q v_z B \\ 0 \\ qE + q v_x \times B \end{bmatrix}$$

Le principe fondamental appliqué à la particule permet d'établir les équations différentielles vérifiées par les composantes de la vitesse :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -q v_z B \\ m\dot{v}_y = 0 \\ m\dot{v}_z = qE + q v_x \times B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x = -\omega_c v_z \\ \dot{v}_y = 0 \\ \dot{v}_z = q \frac{E}{m} + \omega_c v_x \end{cases}$$

$\dot{v}_y(t) = 0 \Rightarrow v_y(t) = \text{cste} - v_y(0) = 0$: le vecteur vitesse reste dans le plan xOz , de même que la trajectoire ; la trajectoire est plane.

Pour trouver $v_x(t)$ et $v_z(t)$ posons $u = v_x + i v_z$.

$$\text{Alors } \dot{u} = \dot{v}_x + i \dot{v}_z = -\omega_c v_z + i \frac{qE}{m} + i \omega_c v_x =$$

$$i\omega(v_x + i v_z) + i \frac{qE}{m} \text{ car } i^2 = -1.$$

$$u \text{ est solution de } \dot{u} - i\omega_c u = i \frac{qE}{m}$$

$$\text{soit } u(t) = A e^{i\omega_c t} - \frac{E}{B},$$

$$\text{comme } u(0) = v_x(0) + i v_z(0) = 0 : A = \frac{E}{B}$$

$$\text{d'où } u(t) = \frac{E}{B} \left(\cos \omega_c t + i \sin \omega_c t - \frac{E}{B} \right)$$

et comme $v_x(t) = \Re u(t)$ et $v_z(t) = \Im u(t)$ on trouve

$$v_x(t) = \frac{E}{B} (\cos \omega_c t - 1) \text{ et } v_z(t) = \frac{E}{B} \sin \omega_c t$$

2 • On obtient $x(t)$ et $z(t)$ par intégration par rapport à t

$$x(t) = \frac{E}{B} \left[\frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} - t \right] + K_1(t) = -\frac{E}{B} \frac{\cos \omega_c t}{\omega_c} + K_2$$

$$\text{à } t = 0 \quad x(0) = 0 \quad K_1 = 0$$

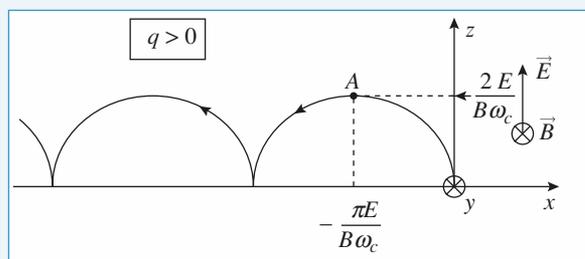
$$z(0) = 0 \quad K_2 = \frac{E}{B\omega_c}$$

$$\text{d'où } x(t) = \frac{E}{B} \left[\frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} - t \right] \text{ et } z(t) = \frac{E}{B} \left[1 - \frac{\cos \omega_c t}{\omega_c} \right]$$

On reconnaît l'équation horaire d'une cycloïde, la « dérive » s'opérant dans le sens des $x < 0$.

$$q > 0 (\omega_c > 0) : \text{ alors } x(t) = \frac{E}{B} \left(\frac{\sin \omega_c t}{\omega_c} - t \right) < 0$$

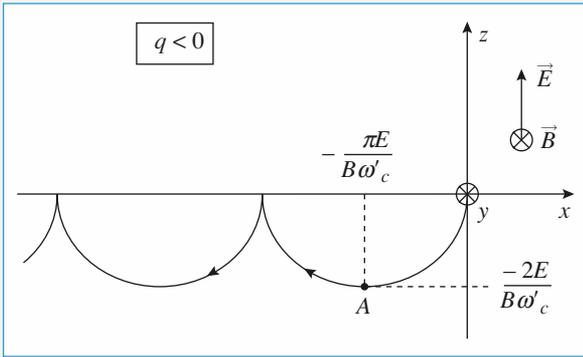
$$\text{et } z(t) = \frac{E}{B} \left(1 - \frac{\cos \omega_c t}{\omega_c} \right) > 0$$



$q < 0$; posons $\omega'_c = -\omega_c > 0$

$$\text{alors : } x(t) = \frac{E}{B} \left(\frac{\sin \omega'_c t}{\omega_c} - t \right) < 0$$

$$z(t) = -\frac{E}{B} \left(\frac{1 - \cos \omega'_c t}{\omega'_c} \right) < 0$$



Remarquons que nous avons bien une dérive dans le sens de $x < 0$ pour les deux particules; en effet dans le cas général, la vitesse de dérive est $\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$ quel que soit le signe de la charge.

3 • $z(t)$ s'annule la première fois par $\omega_c t = 2\pi$. Le point A est donc atteint à une date telle que :

$$\omega_c t = \pi, \text{ soit } z_A = \frac{E}{B} \left(\frac{1 - \cos \pi}{\omega_c} \right) = \frac{2E}{B\omega_c};$$

$$\text{et donc : } |z_A| = \frac{2E}{B|\omega_c|}.$$

$$x_A = -\frac{\pi E}{B|\omega_c|}.$$

4 • Nous avons $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$. Pour avoir un mouvement suivant x , il faut que l'accélération suivant z soit nulle, soit :

$$E + v_x B = 0, \text{ soit } v_x = -\frac{E}{B}.$$

Nous retrouvons la vitesse de dérive $\vec{v}_x = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$, indépendante du signe de la charge de la particule.

8 * Électron dans un piège de Penning

1 • En O , le champ électrique est nul, l'électron est donc en équilibre. La relation fondamentale de la dynamique projetée sur les axes (Ox) , (Oy) et (Oz) donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eU_0 x}{2R^2} \\ m\ddot{y} = \frac{eU_0 y}{2R^2} \\ m\ddot{z} = -\frac{eU_0 z}{R^2}. \end{cases}$$

Le mouvement sur les axes (Ox) et (Oy) est exponentiel, celui sur l'axe (Oz) est sinusoïdal, de pulsation :

$$\omega_z = \sqrt{\frac{eU_0}{mR^2}}.$$

Le mouvement le long de l'axe (Oz) est stable (l'électron est rappelé vers sa position d'équilibre), il est instable dans le plan (xOy) (l'électron s'éloigne de O).

A. N. : $\nu_z = 42,4$ MHz.

2 • a) L'équation du mouvement est :

$$m\vec{a} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La force magnétique est dans le plan (xOy) , le mouvement sur (Oz) est donc le même que celui de la question 1), c'est-à-dire un mouvement oscillatoire de fréquence ν_z .

b) Sur les axes (Ox) et (Oy) , on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eU_0}{2R^2}x - eB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = \frac{eU_0}{2R^2}y + eB_0\dot{x} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = \frac{eU_0}{2R^2}x - eB_0\dot{y} \\ m\ddot{y} = \frac{eU_0}{2R^2}y + eB_0\dot{x} \end{cases} \quad (2)$$

On pose $\rho = x + iy$ et on effectue (1) + i (2), l'équation différentielle vérifiée par ρ est alors :

$$\ddot{\rho} - i\omega_c \dot{\rho} - \frac{\omega_z^2}{2}\rho = 0.$$

Les solutions sont de la forme $\rho = Ae^{at} + Be^{bt}$, où A et B sont des constantes complexes, et a et b les racines de l'équation caractéristique.

L'électron ne sera piégé que si le module de ρ est borné. Pour cela, il faut et il suffit que les parties réelles de a et de b soient négatives ou nulles.

Le discriminant de l'équation caractéristique est :

$$\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_z^2.$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\frac{1}{2} (i\omega_c \pm \sqrt{\Delta}) \text{ si } \Delta > 0,$$

$$\frac{1}{2} (i\omega_c \pm i\sqrt{|\Delta|}) \text{ si } \Delta < 0,$$

$$\frac{1}{2} i\omega_c \text{ si } \Delta = 0.$$

Si $\Delta > 0$, une des deux racines a une partie réelle positive, le mouvement ne sera alors pas borné.

L'électron n'est piégé que si $\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_z^2 \leq 0$,

$$\text{ce qui équivaut à } B_0 \geq B_c = \sqrt{\frac{2mU_0}{eR^2}}.$$

A.N. : $B_c = 2,14 \cdot 10^{-3}$ T. Si on choisit $B_0 = 0,55$ T, la condition ci-dessus est vérifiée.

c) Les racines de l'équation caractéristique sont :

$$a = i\omega_1 = \frac{i}{2} \left(\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right)$$

et

$$b = i\omega_2 = \frac{i}{2} \left(\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2} \right).$$

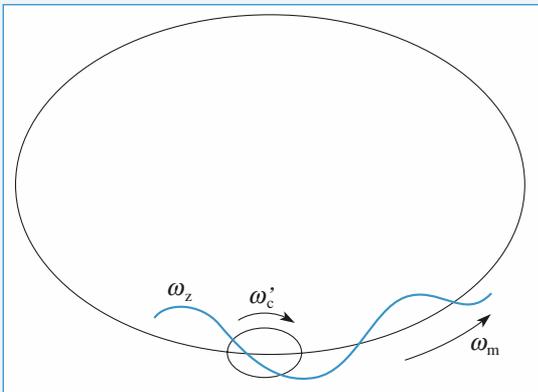
Or $\nu_c = 15,4 \text{ GHz} \gg \nu_z$, ω_1 est donc très proche de ω_c : c'est la pulsation appelée ω_c' dans l'énoncé, ω_2 est donc la pulsation ω_m .

On a alors $\rho(t) = Ae^{i\omega_1 t} + Be^{i\omega_2 t}$, A et B étant des constantes complexes déterminées par les conditions initiales de mouvement. L'équation de la trajectoire est donnée par $x(t) = \text{Re}(\rho(t))$ et $y(t) = \text{Im}(\rho(t))$.

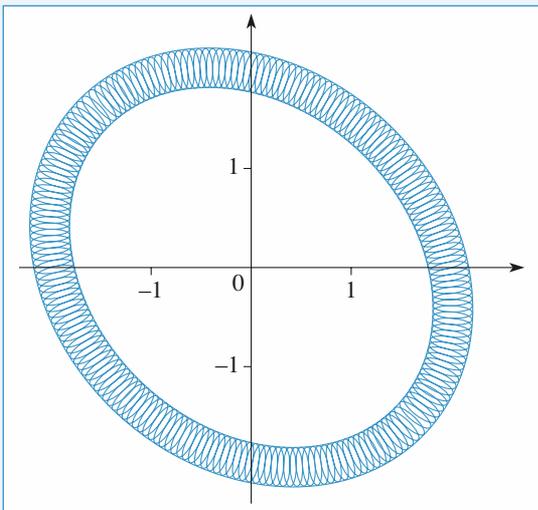
A.N. : $\nu_c' = 15,4 \text{ GHz}$ et $\nu_m = 58,4 \text{ kHz}$.

On remarque que $\nu_m \ll \nu_z \ll \nu_c'$.

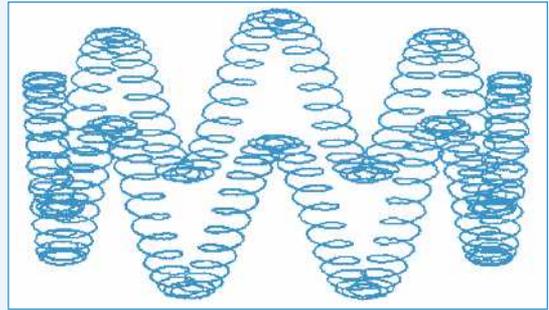
d) Le mouvement de l'électron dans le piège est la superposition des trois mouvements représentés ci-dessous :



La trajectoire de l'électron a l'allure suivante dans le plan (xOy) :



La trajectoire a, en 3D, l'allure ci-dessous :



9 Spectromètre de masse

1 • a) La relation fondamentale de la dynamique :

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}),$$

s'écrit en projection sur les trois axes :

$$\begin{cases} m\dot{v}_x = -qE + qBv_y \\ m\dot{v}_y = -qBv_x \\ m\dot{v}_z = 0 \end{cases}$$

(on l'écrit sous cette forme, car l'énoncé demande v_x , v_y et v_z).

En faisant apparaître v_d et ω les deux premières équations

deviennent :

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega(v_y - v_d) \\ \dot{v}_y = -\omega v_x. \end{cases}$$

La résolution de ces équations par une des méthodes habituelles (introduction de la variable $u = x + iy$ ou élimination de v_x entre les deux équations en dérivant la seconde) donne, compte tenu des conditions initiales :

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \cos(\omega t) + (v_{0y} - v_d) \sin(\omega t) \\ v_y(t) = (v_{0y} - v_d) \cos(\omega t) - v_{0x} \sin(\omega t) + v_d. \end{cases}$$

La troisième équation donne simplement $v_z = v_{0z}$.

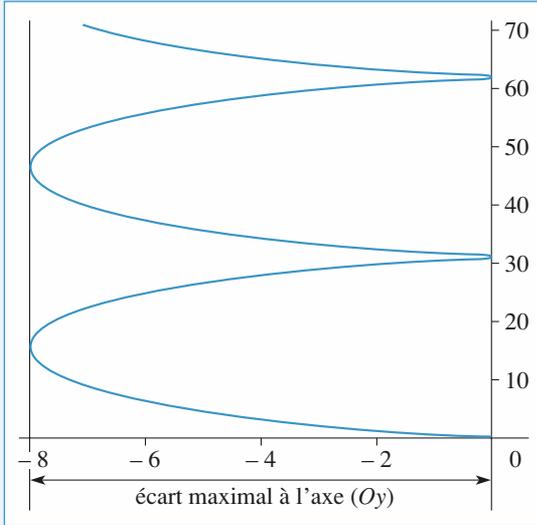
b) On intègre ces équations en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \\ y(t) = \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{v_{0x}}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) + v_d t \\ z(t) = v_{0z} t. \end{cases}$$

c) On néglige les termes en v_{0x} devant les autres termes. Les coordonnées du point H sont donc :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \\ y(t) = \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} \sin(\omega t) + v_d t. \end{cases}$$

La trajectoire de H est une cycloïde représentée ci-dessous :



L'écart maximal de la courbe par rapport à l'axe des y est :

$$|x|_{\max} = 2 \frac{v_d - v_{0y}}{\omega}, \text{ (d'après l'énoncé, } v_d > v_{0y} \text{).}$$

Pour que cette mesure ne dépende pas des conditions initiales, il faut que $v_d \gg v_{0y}$, soit $E \gg Bv_{0y}$.

Dans ce cas, l'écart maximal est égal à :

$$\frac{2v_d}{\omega} = \frac{m}{q} \frac{2E}{B^2} :$$

sa mesure permet bien de déterminer la valeur de $\frac{q}{m}$.

d) $\vec{O'H} = \vec{OH} - \vec{v}_d t$. Les coordonnées de H dans \mathcal{R}' sont

$$\text{donc } \begin{cases} x'(t) = \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} (1 - \cos(\omega t)) \\ y'(t) = \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} \sin(\omega t) . \end{cases}$$

Sa trajectoire est le cercle d'équation :

$$\left(x' - \frac{v_{0y} - v_d}{\omega} \right)^2 + y'^2 = \left(\frac{v_{0y} - v_d}{\omega} \right)^2 .$$

2 • a) $\vec{v}_d = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{B^2}$, ou encore $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{v}_d$.

(Bien remarquer l'homogénéité de cette formule.)

La relation fondamentale de la dynamique dans \mathcal{R}' s'écrit :

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = q(\vec{v} - \vec{v}_d) \wedge \vec{B}, \text{ ou encore :}$$

$$m\vec{a}(P)_{\mathcal{R}'} = q\vec{v}(P)_{\mathcal{R}'} \wedge \vec{B} .$$

Ainsi, dans \mathcal{R}' , le mouvement de la particule est celui d'une particule soumise uniquement au champ magnétique \vec{B} .

b) La trajectoire de P dans \mathcal{R}' est donc une hélice. La trajectoire de H est la combinaison de la trajectoire circulaire de H' et du mouvement de translation selon (Oy) de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

10 Réfraction d'électrons

1 • a) L'énergie mécanique est constante :

$$\mathcal{E}_M = \frac{1}{2}mv^2 + qV = 0, \text{ car au point de départ } M, v = 0 \text{ et}$$

$V = 0$ (on note que q est négative).

b) La force électrique est portée par \vec{e}_z : la composante de la vitesse sur \vec{e}_y est constante, d'où :

$$v_1 \sin i_1 = v_2 \sin i_2, \text{ soit } \sqrt{V_1} \sin i_1 = \sqrt{V_2} \sin i_2$$

(en utilisant la relation précédente pour exprimer les vitesses en fonction des potentiels).

c) Cette expression est analogue à la loi de Descartes sur la réfraction: $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ (cf. *H-Prépa, 1^{re} année partie Optique*). Le rôle de l'indice n est joué par \sqrt{V} .

2 • a) La force électrique est colinéaire à \vec{e}_r , donc à \vec{CM} (où M est la position de l'électron à un instant donné), son moment en C est donc nul: le moment cinétique en C est une constante. On en déduit :

$$\vec{CI}_1 \wedge \vec{v}_1 = \vec{CI}_2 \wedge \vec{v}_2, \text{ soit } R_1 v_1 \sin i_1 = R_2 v_2 \sin i_2 .$$

En remplaçant les vitesses par leur expression en fonction du potentiel, on obtient :

$$R_1 \sqrt{V_1} \sin i_1 = R_2 \sqrt{V_2} \sin i_2 .$$

b) Dans le triangle $A_1 I_1 C$: $\alpha_1 + (\pi - i_1) + \omega_1 = \pi$, soit :

$$i_1 = \alpha_1 + \omega_1 . \text{ On obtient de même } i_2 = \alpha_2 + \omega_2 .$$

Les vitesses étant peu inclinées par rapport à l'axe, tous les angles sont petits (en optique géométrique, c'est le cadre de l'approximation de Gauss). De plus, le sommet S peut être confondu avec la projection H de I sur l'axe (Cz) (l'arc de cercle SI est confondu avec le segment HI). On en déduit :

$$\tan \alpha_1 = \alpha_1 = \frac{\overline{SI}}{A_1 S} \text{ et } \tan \omega_1 = \omega_1 = \frac{\overline{SI}}{SC} .$$

On a des relations analogues avec l'indice 2.

En reportant dans les expressions de i_1 et de i_2 , on obtient

$$i_1 = \overline{SI} \left(\frac{1}{SC} - \frac{1}{SA_1} \right), \text{ de même pour } i_2 .$$

En reportant dans l'équation établie à la question 2) a), il vient, après simplification par R (R_1 et R_2 sont à peu près confondus) et \overline{SI} :

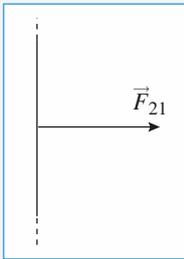
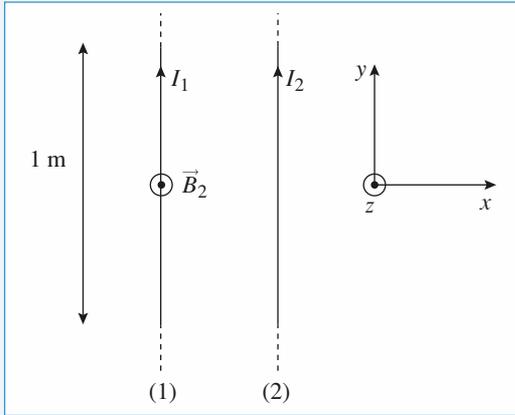
$$\sqrt{V_1} \left(\frac{1}{SC} - \frac{1}{SA_1} \right) = \sqrt{V_2} \left(\frac{1}{SC} - \frac{1}{SA_2} \right)$$

$$\text{ou encore } \frac{\sqrt{V_2}}{SA_2} - \frac{\sqrt{V_1}}{SA_1} = K = \frac{\sqrt{V_2} - \sqrt{V_1}}{SC} .$$

Cette relation est l'analogue de la formule de conjugaison d'un dioptre sphérique, qui n'est pas au programme mais que l'on peut établir par une démonstration tout à fait identique à celle-ci.

11 Force de Laplace entre deux fils

1 • Cherchons \vec{F}_{21} la force que (2) exerce sur l'unité de longueur de (1).



Le champ créé par (2) a même valeur en tout point de (1) :

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi d} \vec{e}_z$$

alors $\vec{F}_{21} = I \vec{\ell}_1 \vec{B}_2$ avec $\vec{\ell} = \ell \vec{e}_y$
d'où $\vec{F}_{21} = I \ell B_2 \vec{e}_x$ avec $\ell = 1$
 $= I B_2 \vec{e}_x$ avec $\ell = 1$.

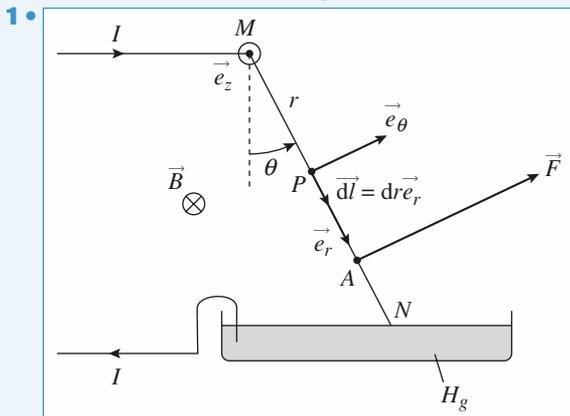
2 • La même analyse conduit à $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ puisque \vec{B}_1 champ créé par (1) en tout point de (2) $= -\vec{B}_2$.

Les deux fils se rapprochent donc, soumis à la force $F = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$ par unité.

3 • Si $I = 1$ A et $d = 1$ m, comme $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I
 $F = 2 \cdot 10^{-7}$ N.

La définition de l'ampère est : deux fils infinis rectilignes parcourus par des courants de 1 A distants de 1 m, sont soumis à une force de $2 \cdot 10^{-7}$ N par unité de longueur.

12 Tige conductrice soumise à la force de Laplace



Travaillons en coordonnées cylindriques d'axe \vec{M}_z . Soit un élément de courant $I d\vec{\ell} = I dr \vec{e}_r$ en P ; il est soumis à la force $d\vec{F} = I d\vec{\ell} \vec{e}_r \wedge \vec{B} = I dr B \vec{e}_r \wedge (-\vec{e}_z)$
soit $d\vec{F} = IB dr \vec{e}_\theta$.

En intégrant sur la barre de longueur ℓ , cela donne :
 $\vec{F} = IB \ell \vec{e}_\theta$.

2 • Calculons le moment $\vec{\Gamma}_M$ en M de toutes les forces de Laplace élémentaires :

$$\vec{\Gamma}_M = \int_M^N \vec{MP} \wedge d\vec{F} = \int_0^\ell r \vec{e}_r \wedge IB dr \vec{e}_\theta$$

$$= IB \frac{\ell^2}{2} \vec{e}_z.$$

Si on note A le point d'application de la force \vec{F} , cela donne :

$$IB \frac{\ell^2}{2} \vec{e}_z = \vec{MA} \wedge IB \ell \vec{e}_\theta,$$

soit donc : $\vec{MA} = \frac{\ell}{2} \vec{e}_r$.

Le point d'application de la force F est en A, milieu de MN.

3 • Le moment en M de toutes les forces (forces de Laplace, force de pesanteur, force de liaison en M) est :

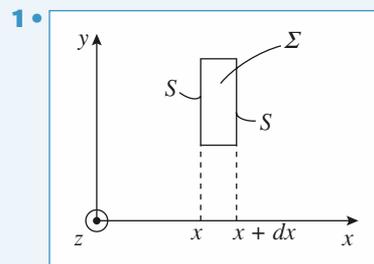
$$\vec{\Gamma}_M = IB \frac{\ell^2}{2} \vec{e}_z + \vec{MA} \wedge m\vec{g}$$

$$= \left(IB \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell}{2} mg \sin \theta \right) \vec{e}_z$$

La barre est en équilibre pour $\sin \theta = \frac{IB\ell}{mg}$, avec $I = \frac{E}{R}$.

A.N. : $\sin \theta_e = \frac{EB\ell}{mgR} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{0,1 \cdot 10 \cdot 4} = 0,5$, soit donc $\theta_e = 30^\circ$.

13 Mouvement dans un champ électrique



L'espace $0 < x < a$ étant compris entre deux conducteurs infinis il y a invariance par translation selon y ou z : E ne dépend, comme V, que de x.

$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$ est donc nécessairement selon \vec{e}_x .

Appliquons le théorème de Gauss à une surface fermée élémentaire par deux surfaces planes en x et x + dx.

Le flux sortant des parois latérales à travers Σ est donc nul

et $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = [E(x + dx) - E(x)]S = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$. Or l'espace

interconducteur est vide donc $q_{\text{int}} = 0$ donc $E(x + dx) = E(x)$: le champ est uniforme.

2 • La circulation du champ \vec{E} de $x = 0$ à $x = a$ est égale à la différence de tension $V(0) - V(a)$:

$$\int_0^a \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cdot a = \int_0^a -\text{grad } V \cdot d\vec{\ell} = \int_{V(0)}^{V(a)} -dV = V(0) - V(a) = -U \text{ donc } E = -\frac{U}{a}$$

d'où $\vec{E} = -\frac{U}{a}\vec{e}_x$. \vec{E} est bien dirigé dans le sens des potentiels décroissants.

On en déduit par intégration $V = \frac{Ux}{a} + \text{cste}$; avec les conditions aux limites $V(0) = 0$ et $V(a) = U$ cste = 0 d'où $V = \frac{Ux}{a}$.

A.N.: $E = -10^4 \text{ V.m}^{-1}$.

3 • $\frac{\|m\vec{g}\|}{\| -e\vec{E}\|} \approx \frac{9 \cdot 10^{-30}}{10^{-15}} \sim 10^{-16}$

on a bien le poids tout à fait négligeable devant la force électrique.

4 • L'électron est accéléré par \vec{E} dans la direction des $x > 0$: il acquiert une vitesse selon \vec{e}_x qui obéit à l'équation différentielle $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$ puisqu'on néglige le poids en projetant sur \vec{e}_x : $\frac{dv_x}{dt} = -$, ce qui donne

$v_x(t) = -t$ puisque $v_x(0) = 0$

en projetant sur \vec{e}_y : $\frac{dv_y}{dt} = 0$, ce qui donne $v_y(t) = v_0$.

Pour déterminer sa trajectoire, calculons d'abord $x(t)$ et $y(t)$:

$v_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{eEt}{m}$, soit $x = -\frac{eEt^2}{2m}$ car $x(0) = 0$

$v_y = v_0 = \frac{dy}{dt}$, soit $y = v_0t$ car $y(0) = 0$.

Éliminons t : $t = \frac{y}{v_0}$ d'où $x = -\frac{eE}{2m v_0^2} y^2$ (arc de parabole).

Sachant que $U > 0$, alors $E < 0$ et $-eE > 0$: l'électron pénètre bien dans l'espace interconducteur avec ces hypothèses.

5 • Quand $x = a$ l'électron atteint les limites de l'espace interconducteur. Cela se produit à la date $t = \frac{\sqrt{2ma}}{-eE} = \frac{\sqrt{2ma^2}}{eU} \approx 3 \cdot 10^{-8} \text{ s}$

$\vec{v}_1 = v_{x1}\vec{e}_x + U y_1 \vec{e}_y$ avec $v_{x1} = -\frac{eE}{m} \times \frac{\sqrt{2ma}}{-eE} = \frac{\sqrt{2eU}}{m}$

et $v_{y1} = v_0$

$x(t_1) = a$ et $y(t_1) = v_0 \frac{\sqrt{2ma^2}}{eU}$.

6 • Les électrons dont le point d'impact sur le conducteur a pour coordonnée $y = y_0$ passeront à travers le conducteur, les autres non.

Si $y(a) = y_0$ alors v_0 est telle que

$a = -\frac{eE}{2m v_0^2}$ $y_0 = \frac{eU y_0}{2ma v_0^2}$

c'est-à-dire $v_0 = \frac{\sqrt{eU y_0}}{2ma^2}$. Nous sommes donc en présence d'un filtre de vitesse.

14 * Conduction dans le germanium. Effet Hall

1 • a) La relation fondamentale de la dynamique s'écrit:

$m\vec{a} = q\vec{E} - \frac{m\vec{v}}{\tau}$ (τ est homogène à un temps).

b) Cette équation s'intègre en:

$\vec{v}(t) = \frac{\tau q E_0}{m} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \vec{u}_x$

en tenant compte des conditions initiales.

Quand $t \rightarrow \infty$, $\vec{v} \rightarrow \vec{v}_\infty = \frac{\tau q E_0}{m} \vec{u}_x$.

L'électron atteint cette vitesse limite à 1% près à l'instant $t_1 = \tau \ln 100 = 4,6 \tau$.

2 • a) $\vec{j} = -Ne\vec{v}_\infty = \frac{Ne^2\tau}{m} \vec{E}_0 = \frac{1}{\rho_e} \vec{E}_0$ par définition de la résistivité. D'où $\rho_e = \frac{m}{Ne^2\tau}$.

b) Le nombre d'atomes de germanium par unité de volume est $N_{\text{Ge}} = \frac{\mu}{M} N_A = 4,4 \cdot 10^{28}$ atomes par m^3 (attention: les masses doivent être exprimées dans la même unité).

Le taux d'atomes d'antimoine est égal à $\frac{N}{N_{\text{Ge}}} = 3,6 \cdot 10^{-8}$

(c'est faible: il suffit de très peu d'impuretés pour augmenter la conductivité électrique du germanium).

D'autre part $\tau = \frac{m}{Ne^2\rho_e} = 1,8 \cdot 10^{-12} \text{ s}$; l'électron atteint sa

vitesse limite à 1% près au bout de $8,3 \cdot 10^{-12} \text{ s}$: on peut négliger le régime transitoire et considérer que le régime permanent (indépendant du temps) est atteint immédiatement.

3 • a) Par définition, $I_0 = jS = j\ell d$.

Or, $E_0 = \rho_e j = \frac{\rho_e I_0}{\ell d}$.

b) La dérive des électrons les entraîne vers les y négatifs: ils vont s'accumuler sur le plan d'équation $y = 0$, il apparaîtra donc une densité surfacique de charges négatives sur ce plan

et par conséquent, sur le plan $y = \ell$, le déficit en électrons se traduira par une densité surfacique de charge positives.

c) En régime permanent, l'équation du mouvement d'un électron libre est :

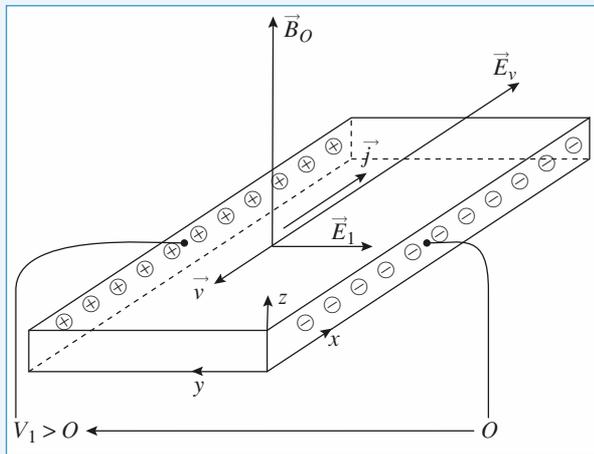
$$\vec{0} = -e(\vec{E}_0 + \vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B}) - \frac{m \vec{v}}{\tau},$$

avec $\vec{v} = -\frac{1}{Ne} \vec{j} = -\frac{1}{Ne} j \vec{u}_x$.

Sur (Ox) , on a $-e\vec{E}_0 - \frac{m \vec{v}}{\tau} = 0$, ce qui redonne la vitesse des électrons en régime permanent (cf. question 1)).

Sur (Oy) , on a $\vec{E}_1 + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, soit :

$$\vec{E}_1 = -\frac{B_0}{Ne} j \vec{u}_y = -\frac{B_0 I_0}{Ne \ell d} \vec{u}_y.$$

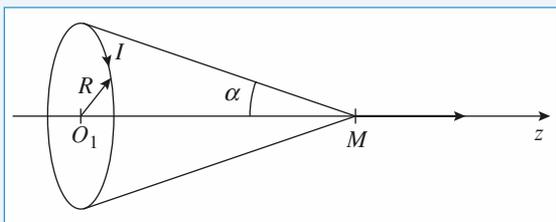


d) $V_1 = -E_1 \ell = \frac{B_0 I_0}{Ne d} = 19,5 \text{ mV}$. La mesure de V_1 permet d'accéder à la valeur de B_0 : c'est une méthode de mesure des champs magnétiques (sonde à effet Hall).

15 Interaction de deux bobines

A) Champ de la bobine (1)

1 •



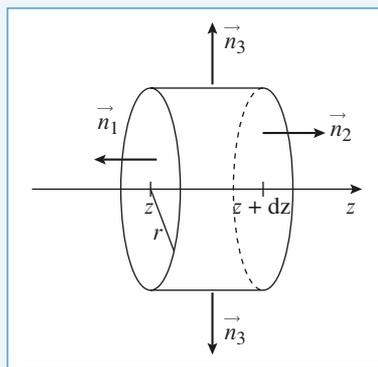
Nous savons que : $\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha$

2 • Pour la bobine (1), cela donne en M de cote z :

$$\vec{B}_1(M) : \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$$

$$\text{avec } \sin \alpha = \frac{R_1}{\sqrt{R^2 + (z - z_1)^2}}$$

3 •

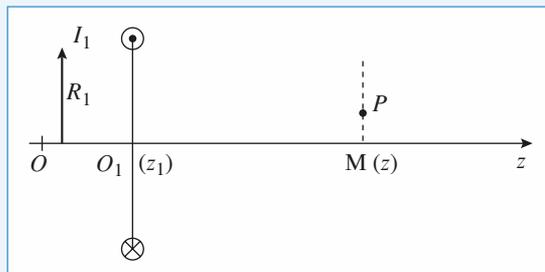


En première approximation le flux de B s'écrit :

$-B_z(0, z)\pi r^2 + B_z(0, z + dz)\pi r^2 + B_r(r, z)2\pi r dz = 0$
dont on déduit immédiatement :

$$Br(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{d}{dz} (B_z(0, z)).$$

Ce qui donne pour la bobine (1) :



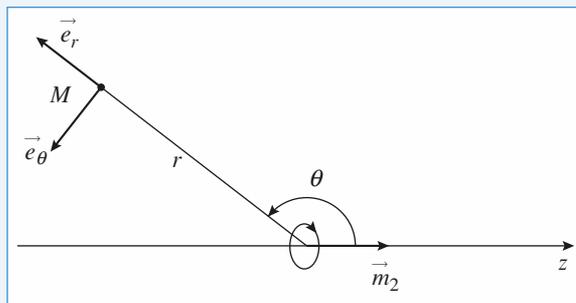
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \frac{R_1^3}{[R_1^2 + (z - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(P) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(z, z)\vec{e}_z, \text{ avec}$$

$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \left(-\frac{3}{2}\right) \frac{R_1^3}{[R_1^2 + (z - z_1)^2]^{\frac{5}{2}}} 2(z - z_1)$$

$$= \frac{3r}{4} \frac{\mu_0 N_1 I_1 R_1^2 (z - z_1)}{[R_1^2 + (z - z_1)^2]^{\frac{5}{2}}}$$

B) Champ de la bobine (2)



La bobine est assimilable à un dipôle magnétique de moment magnétique $\vec{m}_2 = N_2 I_2 \pi R_2^2 \vec{e}_z$.

Le champ magnétique créé en M est donc :

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{m_2 \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 m_2 \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

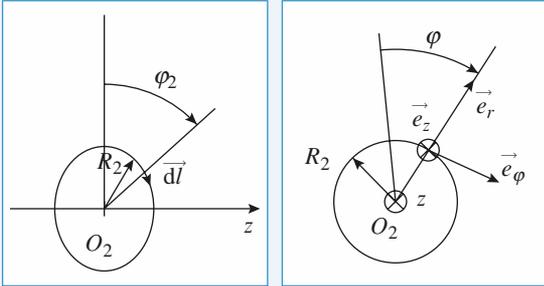
$$= \frac{2\mu_0}{4\pi} \frac{N_2 I_2 \pi R_2^2 \cos \theta}{r^3} \vec{e}_r + \frac{\mu_0 N_2 I_2 \pi R_2^2 \sin \theta}{4\pi r^3} \vec{e}_\theta$$

C) Force d'interaction entre les bobines

1 • $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = \oint I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1$ avec $d\vec{\ell}_2 = R_2 d\varphi \vec{e}_\varphi$

$$= N_2 I_2 \int_{\varphi=0}^{2\pi} R_2 d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (B_r(R_2, z) \vec{e}_r + B_z(R_2, z) \vec{e}_z)$$

$\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = -\vec{e}_z$ et $\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_r$



Soit :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = N_2 I_2 R_2 B_r(R_2, z) \int_0^{2\pi} (-\vec{e}_z) d\varphi + N_2 I_2 R_2 B_z(R_2, z) \int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\varphi$$

$\int_0^{2\pi} \vec{e}_z d\varphi = 2\pi \vec{e}_z$ mais $\int_0^{2\pi} \vec{e}_r d\varphi = 0$; en effet en prenant 2 points symétriques sur la spire (caractérisés par φ et $\varphi + \pi$) nous avons :

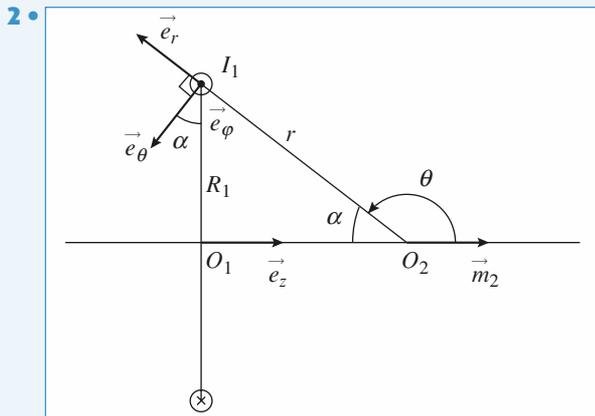
$$\vec{e}_r(\varphi) = -\vec{e}_r(\varphi + \pi),$$

donc la contribution globale sera nulle et ainsi :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -N_2 I_2 R_2 2\pi \left(+ \frac{3R_2}{4} \frac{\mu_0 N_1 I_1 R_1^2 (z_2 - z_1)}{(R_1^2 + (z_2 - z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} \right) \vec{e}_z$$

$$= - \frac{3\pi}{2} \frac{\mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 R_1^2 R_2^2 (z_2 - z_1)}{(R_1^2 + (z_2 - z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{e}_z$$

$$= - \frac{3\pi}{2} \frac{N_1 N_2 I_1 I_2 R_1^2 R_2^2 (z_2 - z_1)}{r^5} \vec{e}_z$$



Cherchons directement la composante z de la force exercée par (2) sur (1); pour un élément de courant $I_1 d\vec{\ell}_1 = I_1 R_1 d\varphi \vec{e}_\varphi$:

$$dF_{2 \rightarrow 1z} = (I_1 R_1 d\varphi \vec{e}_\varphi \wedge (B_r(r, \theta) \vec{e}_r + B_z(r, \theta) \vec{e}_\theta)) \cdot \vec{e}_z$$

$$(\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z = -\sin \alpha$$

$$(\vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z = +\cos \alpha$$

et en intégrant sur φ de 0 à $N_1 \times 2\pi$:

$$F_{2 \rightarrow 1z} = -I_1 R_1 2\pi N_1 \frac{2\mu_0}{4\pi} N_2 I_2 \pi R_2^2 \sin \alpha \frac{\cos \theta}{r^3}$$

$$+ I_1 R_1 2\pi N_1 \frac{\mu_0}{4\pi} N_2 I_2 \pi R_2^2 \cos \alpha \frac{\sin \theta}{r^3}$$

$\cos \theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$

$\sin \theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

ce qui donne :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{2\mu_0}{4\pi} 2\pi^2 N_1 N_2 I_1 I_2 R_1 R_2^2 \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^3} \vec{e}_z$$

$\sin \alpha = \frac{R_1}{r}$; $\cos \alpha = \frac{d}{r}$

et ainsi :

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{3\pi}{2} \mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 \frac{R_1^2 R_2^2 (z_2 - z_1)}{r^5} \vec{e}_z$$

3 • a) L'énergie potentielle de (2) dans le champ magnétique de (1) s'écrit :

$$E_p = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B}_1$$

$$= -N_2 \pi R_2^2 I_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \frac{R_1^3}{[R_1^2 + (z_2 - z_1)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Pour calculer la force exercée par (1) sur (2) il faut dériver cette expression par rapport à z_2 , cote des dipôles m_2 :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\text{grad}_{z_2} (E_p)$$

$$= +N_2 \pi R_2^2 I_2 \frac{\mu_0 N_1 I_1}{2R_1} \left(-\frac{3}{2} \right) \frac{R_1^3 \times 2(z_2 - z_1)}{(R_1^2 + (z_2 - z_1)^2)^{\frac{5}{2}}} \vec{e}_z$$

On retrouve bien :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = - \frac{3\pi}{2} \mu_0 N_1 N_2 I_1 I_2 \frac{R_1^2 R_2^2 (z_2 - z_1)}{r^5} \vec{e}_z = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

Fonctions de transfert élémentaires stables ($\tau > 0$ et $\sigma > 0$)

Ordre 1

1 • Passe-bas d'ordre 1

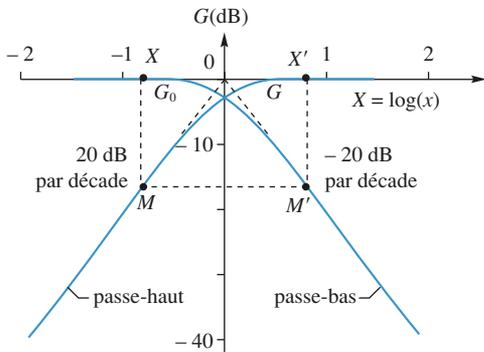
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- Pulsation de coupure à -3 dB : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$,
- décroissance en bande atténuée : 20 dB par décade,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$.

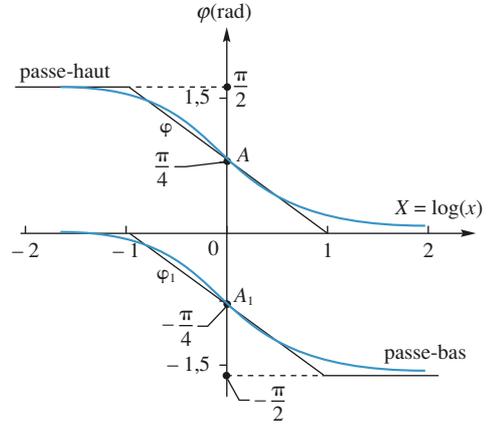
2 • Passe-haut d'ordre 1

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega\tau}}$$

- Pulsation de coupure à -3 dB : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$,
- décroissance en bande atténuée : 20 dB par décade,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$.



Doc. 1. La courbe G de réponse en gain d'un passe-haut d'ordre 1 et celle G_0 du passe-bas de même ordre sont symétriques par rapport à l'axe des gains.

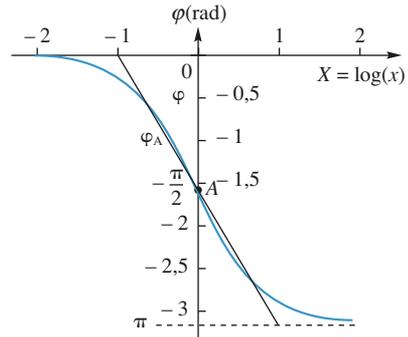


Doc. 2. Construction des courbes de réponse en phase φ d'un passe-haut d'ordre 1 et d'un passe-bas d'ordre 1 et de leurs diagrammes asymptotiques φ_A .

3 • Déphaseur d'ordre 1

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}$$

- $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\omega\tau$,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -\pi$,
- le gain est constant et égal à 1.



Doc. 3. Courbe de réponse en phase φ et diagramme asymptotique φ_A d'un déphaseur d'ordre 1.

Ordre 2

4 • Passe-bas d'ordre 2

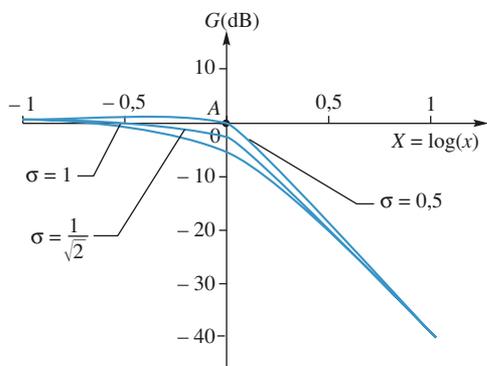
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \tau^2\omega^2}$$

- Pulsation de coupure pour le diagramme asymptotique :

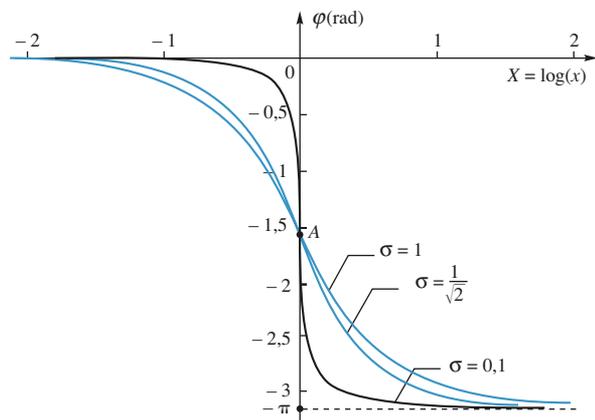
$$\omega_0 = \frac{1}{\tau},$$

- décroissance en bande atténuée : 40 dB par décade,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -\pi$,
- existence d'une résonance si :

$$\sigma < \sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \left(Q > Q_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$



Doc. 4. Courbes de réponse en gain pour différentes valeurs de σ (≤ 1).



Doc. 5. Courbes de réponses en phase d'un passe-bas d'ordre 2 pour différentes valeurs du facteur d'amortissement σ (< 1).

5 • Passe-haut d'ordre 2

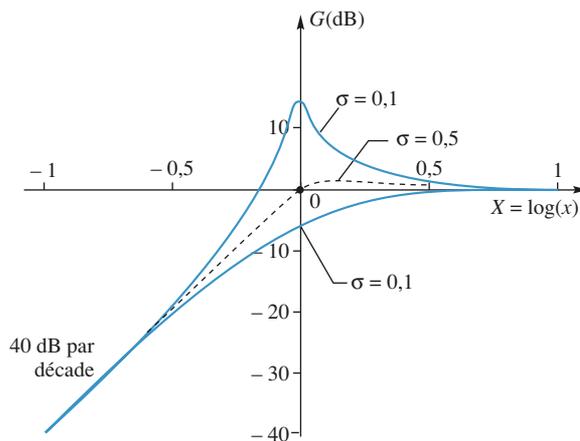
$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{-\tau^2\omega^2}{1 - \tau^2\omega^2 + 2\sigma j\omega\tau} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{2\sigma}{j\omega\tau} + \frac{1}{\tau^2\omega^2}} \end{aligned}$$

- Pulsation de coupure pour le diagramme asymptotique :

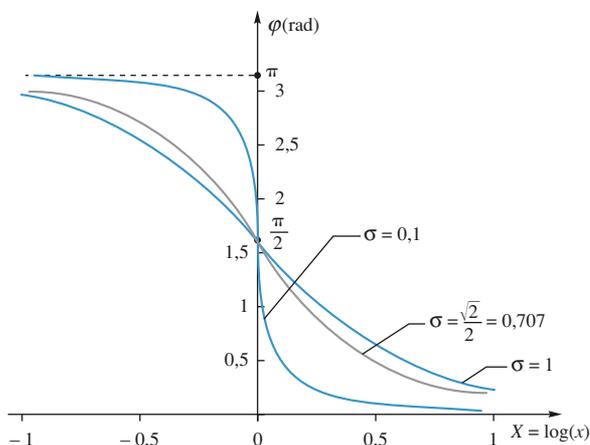
$$\omega_0 = \frac{1}{\tau},$$

- décroissance en bande atténuée : 40 dB par décade,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -\pi$,
- existence d'une résonance si :

$$\sigma < \sigma_c = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \left(Q > Q_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \right).$$



Doc. 6. Courbes de réponses en phase d'un passe-haut d'ordre 2 pour différentes valeurs du facteur d'amortissement σ (< 1).

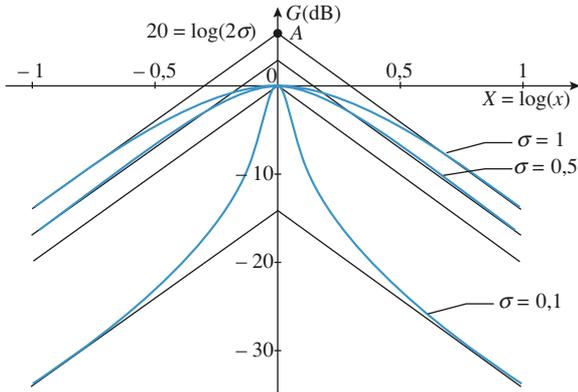


Doc. 7. Courbes de réponses en phase φ d'un passe-haut d'ordre 2 pour différentes valeurs de σ (< 1).

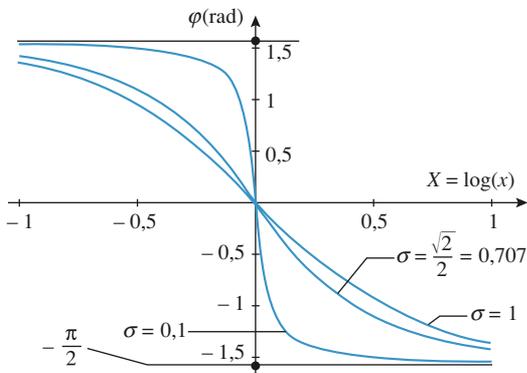
6 • Passe-bande d'ordre 2

$$\begin{aligned} \underline{H}(j\omega) &= \frac{2\sigma j\omega\tau}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \tau^2\omega^2} \\ &= \frac{1}{1 + Q \left(j\omega\tau + \frac{1}{j\omega\tau} \right)} \end{aligned}$$

- Pulsation centrale ou de résonance : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$,
- bande passante à - 3 dB = $\Delta\omega = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$,
- décroissance en bande atténuée : 20 dB par décade,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -\pi$.



Doc. 8. Courbes de réponse en gain d'un passe-bande d'ordre 2 pour différentes valeurs de $\sigma (< 1)$.

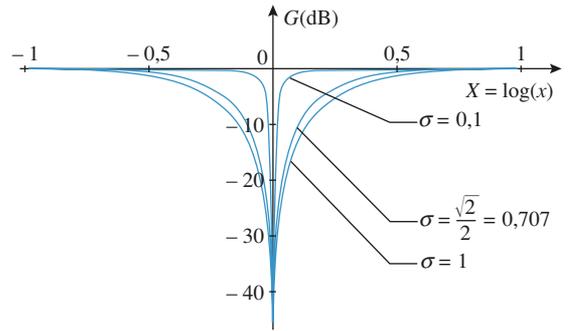


Doc. 9. Courbes de réponse en phase d'un passe-bande d'ordre 2 pour différentes valeurs de $\sigma (< 1)$.

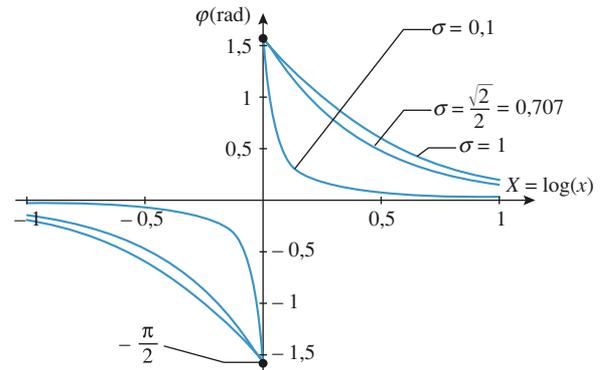
7 • Coupe-bande d'ordre 2

$$H(j\omega) = \frac{1 - \tau^2\omega^2}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \tau^2\omega^2}$$

- Pulsation rejetée : $\omega_0 = \frac{1}{\tau}$,
- bande rejetée à - 3 dB = $\Delta\omega = 2\sigma\omega_0 = \frac{\omega_0}{Q}$.



Doc. 10. Courbes de réponse en gain d'un coupe-bande d'ordre 2 pour différentes valeurs de $\sigma (< 1)$.

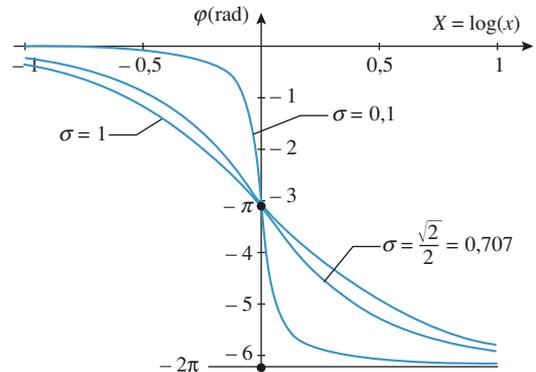


Doc. 11. Courbes de réponse en phase d'un coupe-bande d'ordre 2 et leurs diagrammes asymptotiques pour différentes valeurs de $\sigma (< 1)$.

8 • Déphaseur d'ordre 2

$$H(j\omega) = \frac{1 - 2\sigma j\omega\tau - \tau^2\omega^2}{1 + 2\sigma j\omega\tau - \tau^2\omega^2}$$

- $\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\frac{2\sigma\omega\tau}{1 - (\sigma\omega\tau)^2}$,
- rotation totale de phase : $\Delta\varphi = -2\pi$,
- le gain est constant et égal à 1.



Doc. 12. Courbes de réponse en phase et diagrammes asymptotiques d'un déphaseur d'ordre 2 $\sigma (< 1)$.

Jean-Marie BRÉBEC, Tania CHABOUD, Thierry DESMARAIS,
Alain FAVIER, Marc MÉNÉTRIER, Régine NOËL

La collection **H PRÉPA** propose des ouvrages clairs et complets pour faciliter l'apprentissage et la progression des étudiants des Classes préparatoires en Mathématiques, Physique et Chimie.

LA COLLECTION H PRÉPA

Mathématiques

Exercices et problèmes corrigés
Maths 1^{re} année MPSI PCSI PTSI

Cours avec exercices corrigés
Maths Tout en un MPSI
Maths Tout en un PCSI PTSI

Physique

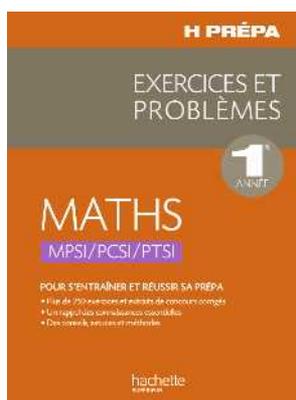
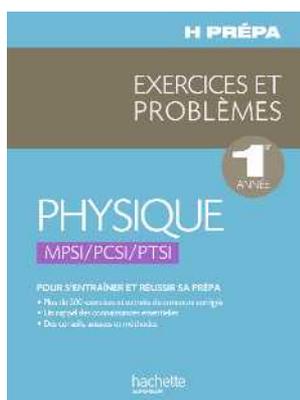
Exercices et problèmes corrigés
Physique 1^{re} année MPSI PCSI PTSI

Cours avec exercices corrigés
Physique Tout en un MPSI PCSI PTSI

Chimie

Exercices et problèmes corrigés
Chimie PCSI
Chimie MPSI PTSI

Cours avec exercices corrigés
Chimie Tout en un MPSI PTSI
Chimie Tout en un PCSI



14/5827/2
ISBN : 978-2-0118-1306-0



Le photocopillage, c'est l'usage abusif et collectif de la photocopie sans autorisation des éditeurs. Largement répandu dans les établissements d'enseignement, le photocopillage menace l'avenir du livre, car il met en danger son équilibre économique et prive les auteurs d'une juste rémunération.

En dehors de l'usage privé du copiste, toute reproduction totale ou partielle de cet ouvrage est interdite.

www.hachette-education.com



hachette
SUPÉRIEUR